

Corso di Analisi dei Sistemi Ambientali
Prova Scritta Intermedia del 18 Aprile 2008

Es. 1 Dato il sistema *tempo-discreto* $\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times u$, determinare:

- 1) Gli autovalori del sistema e dire se il sistema è stabile
- 2) Indicare qualitativamente il tipo di risposta attesa dal sistema nel caso autonomo ($u = 0$)
- 3) Diagonalizzare il sistema, individuando un'opportuna matrice di similitudine P
- 4) Determinare il valore di equilibrio dello stato quando il sistema è sottoposto ad un ingresso costante $u^* = 1$.
- 5) Il codice Matlab per calcolare i punti 1 e 3 precedenti.

Svolgimento:

- 1) Essendo il sistema 2x2, in forma canonica controllabile, è $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}$ si può comporre

il polinomio caratteristico direttamente come $s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$ essendo $a_{21} = -\lambda_1\lambda_2$ e $a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$. Perciò gli autovalori si possono ricavare risolvendo l'equazione di secondo grado $s^2 - 0.25 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0.5 \quad \lambda_2 = -0.5$.

- 2) Entrambi gli autovalori sono compresi nel cerchio unitario, perciò il sistema è *asintoticamente stabile*. Inoltre, dato che uno degli autovalori è di segno negativo, esso darà luogo ad una risposta oscillatoria, ovviamente smorzata a causa del suo modulo minore di 1;
- 3) Essendo A in forma canonica controllabile, la matrice di similitudine P che la trasforma nella diagonale si trova direttamente conoscendo gli autovalori

$$P = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Per ottenere la similitudine $\Lambda = P^{-1}AP$ si deve preliminarmente invertire P . Per trovare la sua inversa si ricordi che essa si ottiene dividendo per il determinante la trasposta della matrice

aggiogata, ovvero data una generica matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ la sua inversa è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \text{ Applicando questa regola all'inversione della matrice } P \text{ si ha}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ottenendo } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.0 \\ 0.5 & -1.0 \end{bmatrix}.$$

Si ha così la conferma della forma diagonale cercata

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.0 \\ 0.5 & -1.0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

- 4) Il sistema a regime con ingresso dato u^* ha la seguente espressione $x = A \cdot x + b \cdot u^*$ da cui si ricava lo stato a regime x^* come $x^* = (I - A)^{-1} b u^*$. Si calcola per prima cosa la matrice $(I - A)^{-1}$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.25 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3333 & 1.3333 \\ 0.3333 & 1.3333 \end{bmatrix} \text{ da cui}$$

$$x^* = (I - A)^{-1} b u^* = \begin{bmatrix} 1.3333 & 1.3333 \\ 0.3333 & 1.3333 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1 = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.3333 \end{bmatrix}$$

- 5) Codice Matlab per il calcolo degli autovalori e della diagonalizzazione

```
clear
A=[0 1;0.25 0];
e=eig(A);
P=ones(2,2);
P(2,:)=e;
L=inv(P)*A*P
```

Es. 2 Popolazione con struttura di età

Una popolazione di animali è strutturabile in tre classi di età con fertilità e sopravvivenze date dalla seguente tabella

| classi | n_0 | n_1 | n_2 | n_3 |
|-----------|--------|-------|-------|-------|
| individui | 100 | 37 | 4 | 2 |
| fertilità | 2.7027 | 0 | 0 | 0 |

In queste ipotesi, trovare:

- 1) il modello del sistema;
- 2) gli autovalori del sistema
- 3) scrivere un programma Matlab per i due punti precedenti e per la simulazione del sistema.

Svolgimento:

- 1) Per prima cosa si calcolano i coefficienti di sopravvivenza $\sigma_i = \frac{n_{i+1}}{n_i}$ $i = 0, 1, 2$. Dai dati in tabella

che rappresentano un generico censo della popolazione, supposto abbastanza stazionario si ricava

$$\sigma_0 = \frac{n_1}{n_0} = \frac{37}{100} = 0.37 \quad \sigma_1 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{4}{37} = 0.1081 \quad \sigma_2 = \frac{n_3}{n_2} = \frac{2}{4} = 0.5$$

La fertilità data interessa la prima componente della popolazione. Perciò si hanno tutti gli elementi per comporre la matrice di Leslie

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_o f_o & 0 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 \times 2.7027 & 0 & 0 \\ 0.1081 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0.1081 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2) Essendo \mathbf{M} triangolare (inferiore) si vede direttamente che i suoi autovalori sono gli elementi diagonali, ovvero (1, 0, 0) *senza bisogno di risolvere il polinomio caratteristico*.
- 3) Il codice Matlab per la simulazione del sistema è il seguente:

```
Xold= da specificare;
A=[sigma(1)*f(1) 0 0;
   sigma(2) 0 0;
   0 sigma(3) 0 ];
eig(A)
Tmax= da specificare;
XX=[];
XX(1,:)=Xold;
for i=2:Tmax+1;
    Xnew=A*Xold;
    XX=[XX;Xnew'];
    Xold=Xnew;
end;
```

Es. 3 Dato un sistema tempo – continuo definito dalle tre matrici.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.125 & -0.750 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{c} = [1 \quad 1]$$

Determinare:

- 1) gli autovalori del sistema
- 2) discuterne la stabilità
- 3) la matrice di similitudine \mathbf{P} che trasforma \mathbf{A} nella forma diagonale
- 4) la matrice esponenziale $e^{\mathbf{A}t}$
- 5) il valore asintotico dell'uscita $y(t)$ per un ingresso $u = 1$.

Svolgimento:

- 1) Essendo il sistema 2x2, in forma canonica controllabile, si vede direttamente che i termini dell'ultima riga valgono in questo caso $a_{21} = -\lambda_1 \lambda_2 = -0.125$ e $a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 = -0.750$. Perciò gli autovalori si possono ricavare risolvendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 0.75s + 0.125 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -0.25 \quad \lambda_2 = -0.5$.
- 2) Gli autovalori sono ambedue a parte reale negativa, perciò il sistema è *asintoticamente stabile* e l'equilibrio verrà raggiunto in modo *monotono* in quanto ambedue gli autovalori sono reali.
- 3) Essendo la matrice \mathbf{A} in forma canonica controllabile, la matrice di similitudine \mathbf{P} tale che $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$ ha per colonne le potenze crescenti degli autovalori. Per ottenere l'inversa di \mathbf{P} si applica il lemma

già visto all'Es. 1, $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{P})} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}$. In questo caso si ha che $\det(\mathbf{P})$

$= -0.25$, perciò l'inversa sarà $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{-0.25} \begin{bmatrix} -0.5 & 0.25 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$. Come riprova, applicando

la similitudine $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ si ottiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.125 & 0.75 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Formalmente la matrice esponenziale 2x2 si può indicare così:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{P} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{bmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

La matrice esponenziale si trova esponenziando la matrice diagonale \mathbf{A} ed applicandovi la stessa similitudine $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{P}^{-1}$. Sostituendo

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-0.25t} & 0 \\ 0 & e^{-0.5t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-0.25t} - e^{-0.5t} & 4e^{-0.25t} - 4e^{-0.5t} \\ -0.5e^{-0.25t} + 0.5e^{-0.5t} & -e^{-0.25t} + 2e^{-0.5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 4) Essendo il sistema stabile, sottoposto ad un ingresso costante si porterà in uno stato di equilibrio che si può calcolare annullandola derivata

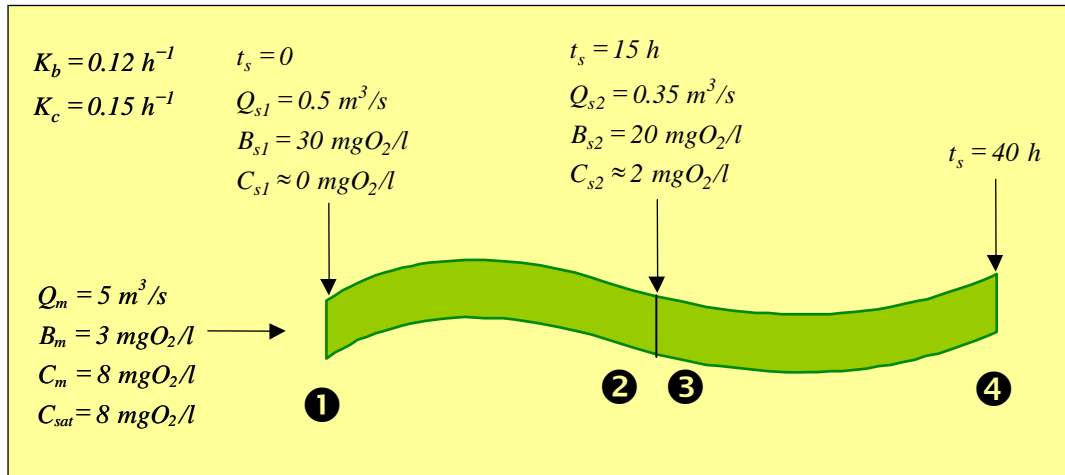
$$\dot{\mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{eq} + \mathbf{b} \cdot u \Rightarrow \mathbf{x}_{eq} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot u$$

Applicando il solito lemma di inversione di matrice si ha $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ perciò lo stato di

equilibrio si ottiene come $\mathbf{x}_{eq} = -\begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ da cui l'uscita

$$y_{eq} = \mathbf{c} \times \mathbf{x}_{eq} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = 8$$

Es. 4 Sia dato il sistema fluviale in figura con due scarichi concentrati, dove t_s rappresenta il tempo di scorrimento, per il quale si suppone nulla la diffusione ($D = 0$) ed è perciò applicabile il modello di Streeter & Phelps.



Con i valori dati in figura si calcolino:

- 1) L'espressione dell'andamento di BOD e DO lungo l'intero tratto
- 2) Il valore di BOD e DO nei punti 1, 2, 3, 4
- 3) Si tracci lo schema Simulink per la simulazione del sistema fluviale

Svolgimento:

- 1) Il generico modello di Streeter & Phelps si può scrivere come segue, nel tempo di scorrimento t_s

$$\begin{cases} \text{BOD} & \frac{dB}{dt_s} = -k_b B \\ \text{DO} & \frac{dC}{dt_s} = k_c (C_{sat} - C) - k_b B \end{cases}$$

Tale modello vale per l'intero tratto, salvo ricordare che ad ogni scarico concentrato dovranno essere ricalcolate le condizioni iniziali prima di proseguire con l'integrazione. Perciò per prima cosa si calcolano le condizioni iniziali a valle del primo scarico considerando la diluizione

$$B_1 = \frac{B_m Q_m + B_{s1} Q_{s1}}{Q_m + Q_{s1}} \quad C_1 = \frac{C_m Q_m}{Q_m + Q_{s1}}$$

Con queste condizioni iniziali si integra analiticamente la coppia di equazioni precedenti, tenendo conto che la prima si può risolvere indipendentemente, ottenendo

$$B(t_s) = B_1 e^{-k_b t_s}$$

Tale quantità può essere ora inserita nella seconda equazione come ingresso nell'integrale di convoluzione, ma prima conviene effettuare un cambiamento di variabili, introducendo il deficit di ossigeno $D(t_s) = C_{sat} - C(t_s)$

$$D(t_s) = C_{sat} - C(t_s) \Rightarrow \frac{dD}{dt_s} = -\frac{dC}{dt_s}$$

per cui la seconda equazione diventa

$$\frac{dD}{dt_s} = -k_c D + k_b B$$

dove il secondo termine (BOD) è già stato risolto indipendentemente come $B(t_s) = B_1 e^{-k_b t_s}$ e perciò può essere considerato come ingresso esterno. Perciò si può applicare il generico integrale di convoluzione

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\sigma)} \mathbf{b}u(\sigma) d\sigma$$

che in questo caso diviene

$$\begin{aligned} D(t_s) &= D_1 e^{-k_c t_s} + k_b \int_0^{t_s} e^{-k_c(t_s-\sigma)} B_1 e^{-k_b \sigma} d\sigma \\ &= D_1 e^{-k_c t_s} + k_b B_1 e^{-k_b t_s} \cdot \frac{1}{(k_c - k_b)} \cdot e^{(k_c - k_b)\sigma} \Big|_0^{t_s} \\ &= D_1 e^{-k_c t_s} + k_b B_1 e^{-k_b t_s} \cdot \frac{1}{(k_c - k_b)} \cdot [e^{(k_c - k_b)t_s} - 1] \end{aligned}$$

raggruppando i termini si ha

$$D(t_s) = D_1 e^{-k_c t_s} + \frac{k_b B_1}{(k_c - k_b)} \cdot [e^{-k_b t_s} - e^{-k_c t_s}]$$

Sostituendo nuovamente la variabile originale C al posto del deficit D si ha l'espressione dell'ossigeno disciolto fra uno scarico e l'altro

$$C(t_s) = C_{sat} - (C_{sat} - C_1) e^{-k_c t_s} + \frac{k_b B_1}{(k_c - k_b)} \cdot [e^{-k_c t_s} - e^{-k_b t_s}]$$

Perciò la coppia di equazioni soluzione del modello di Streeter & Phelps a valle del primo scarico concentrato (cioè nel tratto 1 - 2) è la seguente

$$B(t_s) = B_1 e^{-k_b t_s}$$

$$C(t_s) = C_{sat} - (C_{sat} - C_1) e^{-k_c t_s} + \frac{k_b B_1}{(k_c - k_b)} \cdot [e^{-k_c t_s} - e^{-k_b t_s}] \quad \text{per } 0 \leq t_s < 15$$

Arrivati alla sezione 3, dove si trova il secondo scarico concentrato si dovranno ricalcolare le condizioni iniziali mediante diluizione, assunto come condizioni a monte dello scarico quelle finali del tratto precedente 2

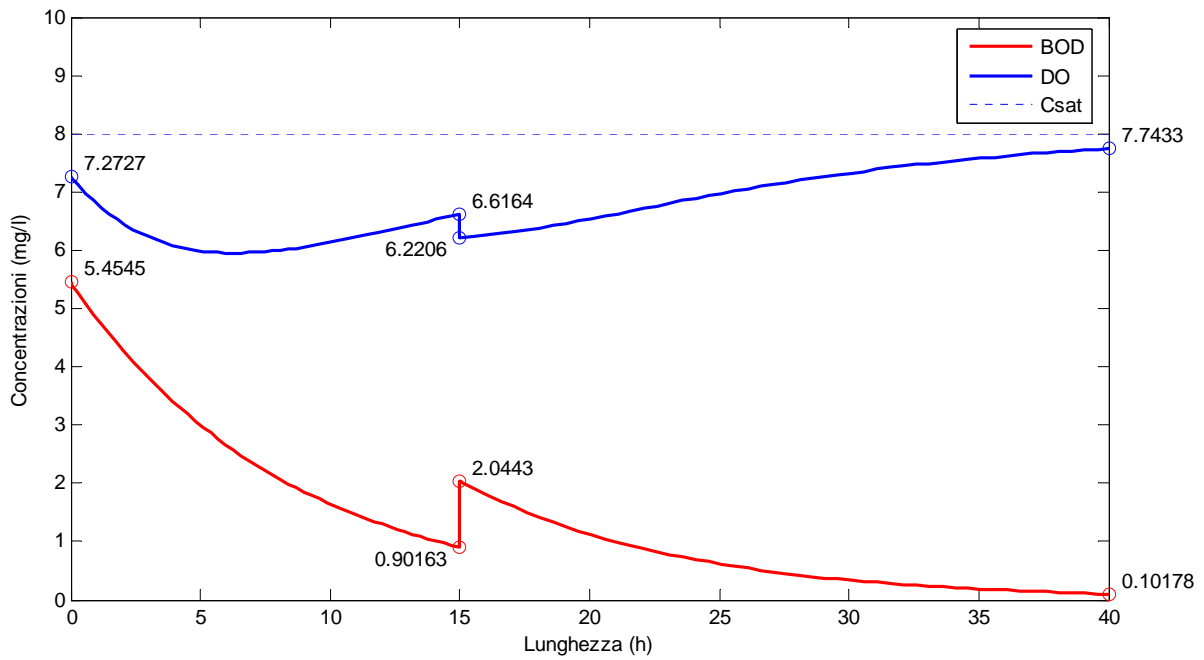
$$B_3 = \frac{B_2(Q_m + Q_{s1}) + B_{s2}Q_{s2}}{Q_m + Q_{s1} + Q_{s2}} \quad C_3 = \frac{C_2(Q_m + Q_{s1})}{Q_m + Q_{s1} + Q_{s2}}$$

Con queste condizioni iniziali si riprende l'integrazione, che ha la stessa espressione precedente, ma viene estesa al solo secondo tratto (fra le sezioni 3 e 4)

$$B(t_s) = B_1 e^{-k_b t_s}$$

$$C(t_s) = C_{sat} - (C_{sat} - C_1) e^{-k_c t_s} + \frac{k_b B_1}{(k_c - k_b)} \cdot [e^{-k_c t_s} - e^{-k_b t_s}] \text{ per } 0 \leq t_s < 40 - 15$$

I valori di BOD e DO nelle quattro sezioni richieste sono indicate in figura insieme al loro andamento lungo tutto il tratto.



Lo schema Simulink che realizza il modello di Streeter & Phelps per ogni tratto è il seguente

