

Esercizi sulla dinamica delle popolazioni

Esercizio 1

Supponendo che la seguente dinamica logistica di una popolazione continua

$$\frac{dx}{dt} = 0.5 \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

rappresenti una risorsa rinnovabile, determinare

- Il rateo di raccolta costante massimo sostenibile h_{MSY}
- Il livello della popolazione nel caso di un prelievo costante $h=5$
- Scrivere lo script Matlab per il punto a

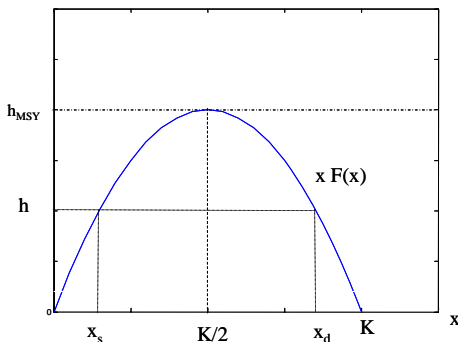
Svolgimento

- La generica espressione della dinamica di una popolazione sottoposta ad un prelievo continuo nel tempo è

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot F(x) - h(t)$$

In questo caso $F(x) = r \cdot x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ e $h(t)$ è costante.

Il prelievo risulta sostenibile quando la retta orizzontale $h = \text{cost}$ incontra la curva $x F(x)$



Il massimo rateo di raccolta sostenibile sarà $h_{MSY} = \max(xF(x))$.

Questo valore si trova imponendo $\frac{dx}{dt}(x \cdot F(x)) = 0$

$$\frac{d}{dx} \left[r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) \right] = r \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{K}\right) = 0 \quad x_{MSY} = \frac{K}{2} \quad h_{MSY} = (x \cdot F(x))|_{x_{MSY}} = \frac{r \cdot K}{4}$$

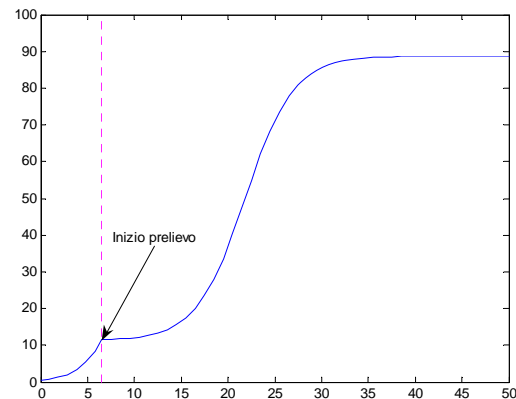
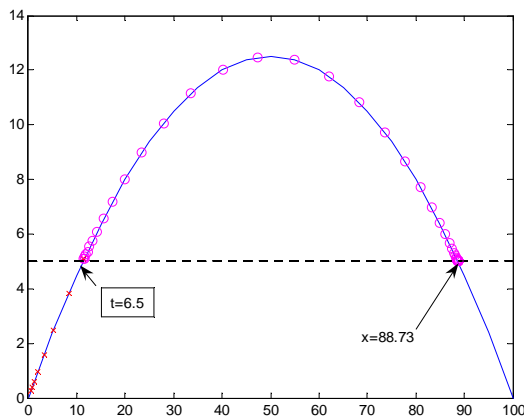
Essendo $r=0.5$ e $K=100$; $h_{MSY}=12.5$

- Quando $h < h_{MSY}$ il prelievo è sostenibile, quindi $h = 5 < h_{MSY}$ risulta essere un prelievo sostenibile

Ponendo $\frac{dx}{dt} = 0$ $rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) = h$ si trovano 2 punti di equilibrio, uno instabile $x_s < x_{MSY}$ e uno stabile $x_d > x_{MSY}$. Occorre quindi effettuare il prelievo una volta che la popolazione abbia superato la densità x_s altrimenti la specie si estinguerà

$$\frac{rx^2}{K} - rx + h = 0 \quad x_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4\frac{hK}{r}}}{2} \quad x_1 = 11.27 \quad \text{e} \quad x_2 = 88.73$$

Dunque se il prelievo viene effettuato dopo che la popolazione ha superato x_s , la popolazione si porterà ad un livello pari a $x_d = 88.73$, come indicato in figura.



Al contrario, se il prelievo inizia prima di aver superato il valore $h = 5$, l'equilibrio instabile sarà dominante e respingerà la traiettoria verso l'origine. Infatti per $x = x_1 = 11.27$ si ha instabilità in quanto la derivata della funzione di crescita è positiva (si vede anche graficamente)

$$\frac{d}{dx} \left[r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K} \right) \right] = 0.5 \cdot \left(1 - \frac{2 \times 11.27}{100} \right) = 0.3873 > 0$$

Dalla simulazione si vede che il punto critico in cui la popolazione raggiunge il valore di prelievo si ha per $t = 6.5$ circa. Iniziando a prelevare quando la popolazione ha superato tale livello, si ha la dominanza del prelievo stabile.

c) Programma Matlab

% Sfruttamento costante

clear

close all

r=0.5;K=100;x0=2;h=5;

H_msy=r*K/4 **% Massimo prelievo**

sostenibile

x_equ=roots([1 -K K*h/r]) **% Calcolo dei punti**

di equilibrio

figure(1)

hold off;clf

x=0:K/20:K;

dx=r*x.*(1-x./K);

plot(x,dx)

hold on

plot([0 K],[h h],':b')

plot(x_equ,h,'o')

if (r*(1-2*x_equ(1)/K))<0

disp(' x_equ(1) equilibrio stabile')

else

disp(' x_equ(1) equilibrio instabile')

end

if (r*(1-2*x_equ(2)/K))<0

disp(' x_equ(2) equilibrio stabile')

else

disp(' x_equ(2) equilibrio instabile')

end

Esercizio 2

Data una risorsa rinnovabile con dinamica logistica e sfruttamento proporzionale

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - gx$$

- Dimostrare che si ha un unico punto di equilibrio e che è sempre stabile
- Trovare il massimo rateo di sfruttamento g_{MSY}
- Trovare il valore della risorsa sfruttata in queste condizioni, dati i seguenti parametri $r = 0.4$ e $K = 10$
- Il programma Matlab/Simulink che determina l'equilibrio ed effettua la simulazione

Svolgimento

a) Il punto di equilibrio della risorsa sfruttata si trova azzerando la derivata della sua dinamica

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - gx = 0 \Rightarrow r \left(1 - \frac{x}{K} \right) = g \Rightarrow x^* = K \left(1 - \frac{g}{r} \right)$$

Per dimostrare che questo equilibrio è sempre stabile, si deriva la dinamica rispetto a x

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*} = \left. \frac{\partial}{\partial x} \left[rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - gx \right] \right|_{x^*} = r \left(1 - \frac{2x^*}{K} \right) - g = r \left(1 - \frac{2K \left(1 - \frac{g}{r} \right)}{K} \right) - g = r \left(1 - 2 \left(1 - \frac{g}{r} \right) \right) - g$$

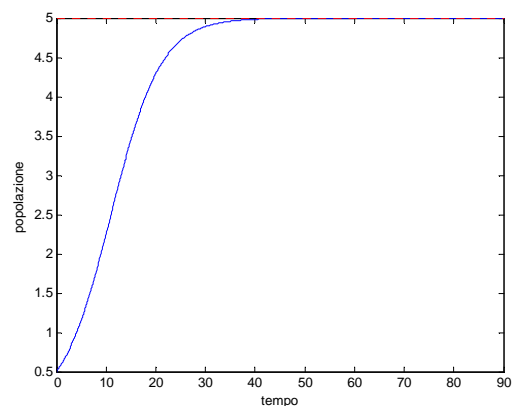
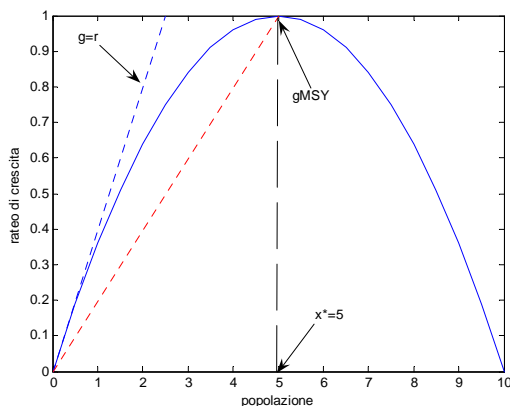
$$= r - 2r + 2g - g = -r + g < 0 \Rightarrow r > g$$

Perciò la derivata nel punto di equilibrio è sempre negativa se $g < r$. D'altra parte se fosse $g > r$ non ci sarebbe neanche equilibrio ammissibile perché la retta di prelievo non incontrerebbe la curva di crescita.

b) Sapendo che il massimo rateo di crescita della logistica si ha per $x^* = K/2$, sostituendo questo valore nel generico equilibrio si ha

$$\frac{K}{2} = K \left(1 - \frac{g}{r} \right) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{g}{r} \Rightarrow g_{MSY} = \frac{r}{2}$$

c) Con i valori dati è $g_{MSY} = \frac{0.4}{2} = 0.2$ e $x^* = 10 \left(1 - \frac{0.2}{0.4} \right) = 5$



d) Programma Matlab

```
% Sfruttamento proporzionale
```

```
clear
```

```
close all
```

```
r=0.4;K=10;x0=0.5;
```

```
g=r/2; % Rateo di prelievo al MSY
```

```
figure(1)
```

```
hold off;clf
```

```
x=0:K/20:K;
```

```
dx=r*x.*(1-x./K);
```

```
plot(x,dx)
```

```
hold on
```

```
plot([0 K/4],[0 r*K/4],':b')
```

```
plot([0 K/2],[0 0.5*r*K/2],':r')
```

```
xlabel('popolazione')
```

```
ylabel('rateo di crescita')
```

```
tfin=90;
```

```
%
```

```
axis(axis)
```

```
% Simulazione
```

```
%
```

```
[t,x,y]=sim('harvest_g',[0 tfin]);
```

```
figure(2)
```

```
plot(tsim,pop)
```

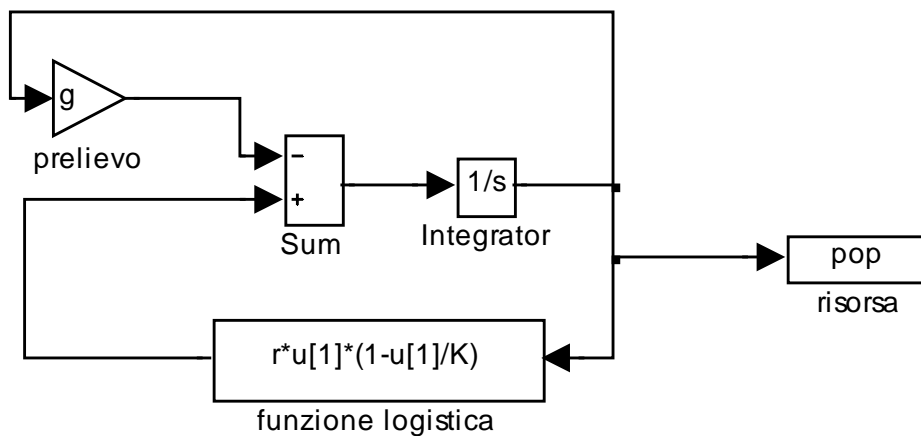
```
xlabel('tempo')
```

```
ylabel('popolazione')
```

```
hold on
```

```
plot([0 tfin],[K/2 K/2],':r')
```

Schema Simulink per la simulazione della risorsa con sfruttamento proporzionale
'harvest_g'



Esercizio n. 3

Dato il sistema di due specie in competizione descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(r_1 - \gamma_{11}x_1 - \gamma_{12}x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(r_2 - \gamma_{22}x_2 - \gamma_{21}x_1) \end{cases} \quad (1)$$

e le cui isocline di equilibrio sono mostrate in figura,

Determinare:

- il tipo di equilibrio (ammissibile o non ammissibile) e giustificare il risultato trovato;
- tracciare l'andamento qualitativo di una traiettoria del sistema partendo da una condizione iniziale a piacere nel primo quadrante;
- quotare i punti di intersezione delle isocline con gli assi coordinati usando i simboli dell'eq. (1) assumendo i seguenti valori dei parametri:
 $r_1 = 0.20$; $r_2 = 0.15$
 $\gamma_{11} = 0.01$; $\gamma_{12} = 0.0114$; $\gamma_{21} = 0.0062$; $\gamma_{22} = 0.0060$

Svolgimento:

Azzerando le derivate nella (1) si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 0 = x_1(r_1 - \gamma_{11}x_1 - \gamma_{12}x_2) \\ 0 = x_2(r_2 - \gamma_{22}x_2 - \gamma_{21}x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

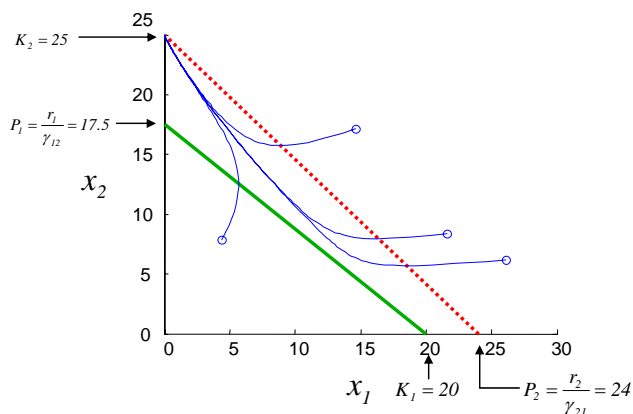
Sostituendo i valori

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0114 \\ 0.0062 & 0.0060 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.0000 \\ -21.8750 \end{bmatrix}$$

Oppure si può ricavare direttamente $x_1^* = \frac{r_1 - \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} r_2}{\gamma_{11} - \frac{\gamma_{12}\gamma_{21}}{\gamma_{22}}}$ $x_2^* = \frac{r_2 - \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{11}} r_1}{\gamma_{22} - \frac{\gamma_{21}\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}$ ottenendo gli stessi

valori.

Chiaramente l'equilibrio non è ammissibile in quanto una delle due popolazioni è negativa. Perciò si tratta di equilibrio con esclusione della specie 1.



$$x_1^* = 45.0000$$

$$x_2^* = -21.8750$$

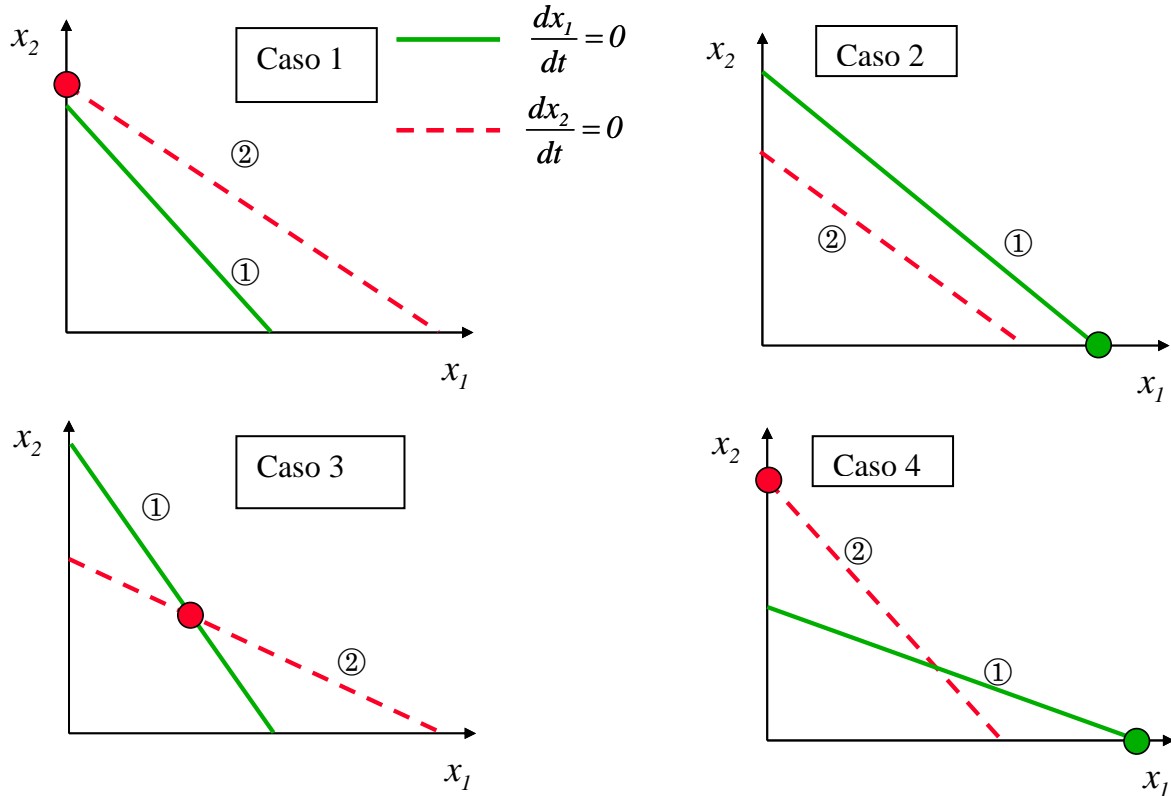
$$J = \begin{bmatrix} -0.4500 & -0.5143 \\ 0.1367 & 0.1313 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -0.2783$$

$$\lambda_2 = -0.0404$$

Esercizio n. 4

Dati le quattro possibili configurazioni delle isocline in figura, discutere i relativi equilibri competitivi basandosi sul comportamento delle traiettorie



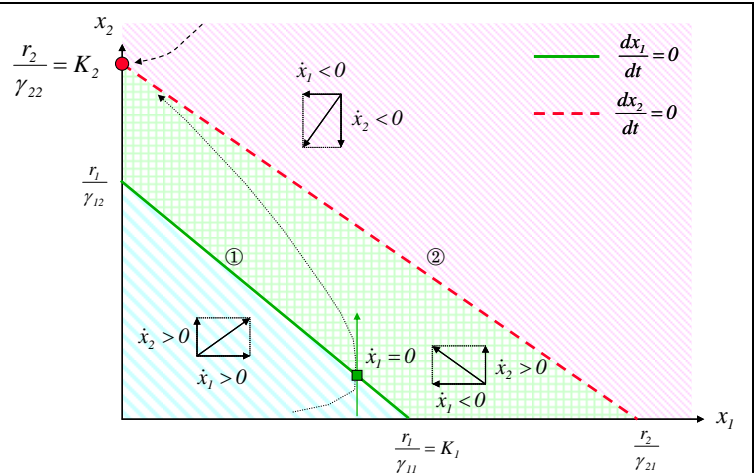
Svolgimento:

Caso 1: Sopravvivenza della specie 2

L'isocline della specie 2 è sempre superiore a quella della specie 1. Nella zona intermedia fra le due isocline la derivata di x_1 è negativa, perciò la specie 1 va all'estinzione.

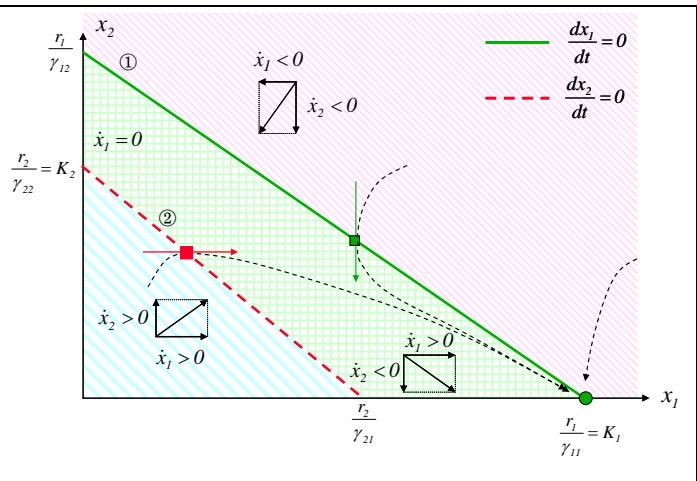
L'unica zona dove la derivata di x_1 è positiva è quella inferiore, ma allora, essendo positiva anche la derivata di x_2 , l'isocline di 1 verrà attraversata verticalmente e la traiettoria rientra nel settore intermedio, con comportamento già analizzato.

Perciò la specie 2 prevale e si porta alla capacità portante. L'unico equilibrio è dato da $x_2 = K_2$ e $x_1 = 0$



Caso 2: Sopravvivenza della specie 1

L'isoclina della specie 2 è sempre inferiore a quella della specie 1. Nella zona intermedia fra le due isocline la derivata di x_2 è negativa, perciò la specie 2 va all'estinzione. L'unica zona dove la derivata di x_2 è positiva è quella inferiore, ma allora, essendo positiva anche la derivata di x_1 , l'isoclina di 2 verrà attraversata orizzontalmente e la traiettoria rientra nel settore intermedio, con comportamento già analizzato. Perciò la specie 1 prevale e si porta alla capacità portante. L'unico equilibrio è dato da $x_1 = K_1$ e $x_2 = 0$



Caso 3: Coesistenza competitiva

Basandosi sui segni delle derivata nei quattro settori in cui dividono il primo quadrante, si può vedere che tutte le traiettorie convergono al punto di equilibrio

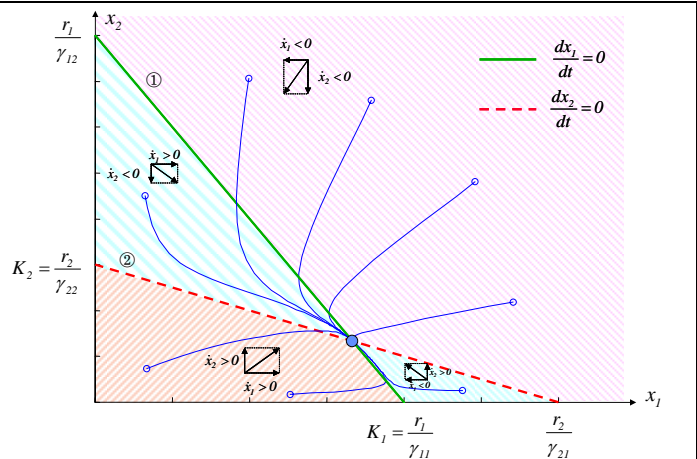
Lo Jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} r_1 - 2\gamma_{11}x_1^* - \gamma_{12}x_2^* & -\gamma_{12}x_1^* \\ -\gamma_{21}x_2^* & r_2 - 2\gamma_{22}x_2^* - \gamma_{21}x_1^* \end{bmatrix}$$

calcolato all'equilibrio

$$x_1^* = \frac{r_1 - \gamma_{12}x_2^*}{\gamma_{11}} \quad x_2^* = \frac{r_2 - \gamma_{21}x_1^*}{\gamma_{22}}$$

Ha autovalori reali e negativi, confermando la stabilità dell'equilibrio.



Caso 4: Esclusione competitiva

Basandosi sui segni delle derivata nei quattro settori in cui dividono il primo quadrante, si vede che prevale l'una o l'altra specie a seconda della condizione iniziale.

In questo caso è possibile calcolare il punto di equilibrio come incontro delle due isocline, ma tale punto è un equilibrio instabile come conferma lo Jacobiano che ha un autovalore positivo.

Ad es. per i seguenti valori:

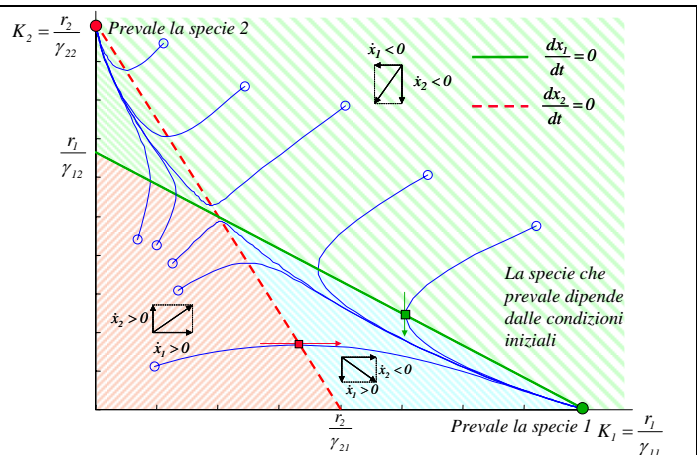
$$r_1 = 0.4000; \quad r_2 = 0.2000$$

$$g_{12} = 0.0600; \quad g_{21} = 0.0100;$$

$$g_{11} = 0.0100; \quad g_{22} = 0.0200$$

lo Jacobiano ha autovalori

$$\lambda_1 = 0.0732; \quad \lambda_2 = -0.2732$$



Esercizio n. 5

Dato il sistema preda-predatore di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \text{preda} & \frac{dx}{dt} = r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) - b_{12} \cdot x \cdot y \\ \text{predatore} & \frac{dy}{dt} = -m \cdot y + b_{21} \cdot x \cdot y \end{cases}$$

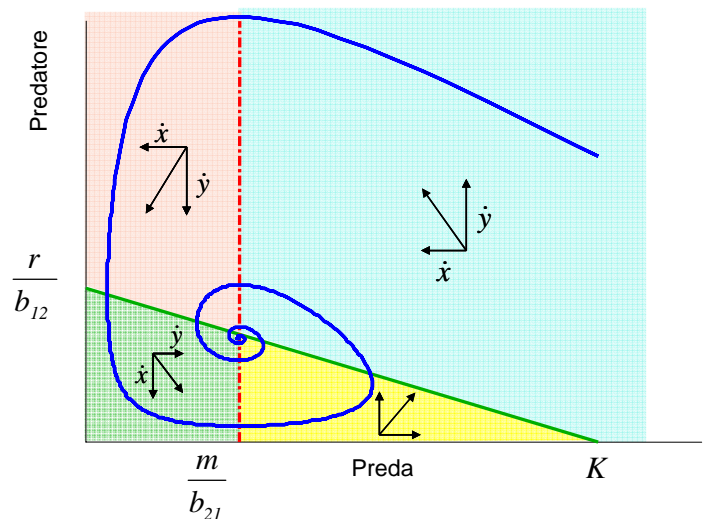
- Derivare le condizioni (grafiche e analitiche) per avere un equilibrio ammissibile
- Dimostrare che se l'equilibrio è ammissibile esso è anche stabile
- Ricavare le condizioni sui parametri per cui il comportamento del sistema è oscillatorio
- Calcolare il punto di equilibrio e gli autovalori per i seguenti valori dei parametri $r=0.5$; $m=0.3$; $K=10$; $b_{12}=0.43$; $b_{21}=0.1$
- Programma Matlab/Simulink per la ricerca del punto di equilibrio, tracciamento delle isocline e simulazione del sistema

Svolgimento

a) Si calcolano le due isocline corrispondenti a $\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt} = 0$, che valgono

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = 0 &\Rightarrow r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - b_{12}y = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 &\Rightarrow -m + b_{21}x = 0 \end{aligned} \quad \text{da cui si ricava il punto di equilibrio} \quad \begin{cases} r \left(1 - \frac{x}{K}\right) = b_{12}y \\ x^* = \frac{m}{b_{21}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^* = \frac{r}{b_{12}} \left(1 - \frac{m}{b_{21}K}\right) \\ x^* = \frac{m}{b_{21}} \end{cases}$$

Graficamente, l'isoclina della preda è una retta con pendenza negativa che incontra l'asse x in K e l'asse y in r/b_{12} , mentre l'isoclina del predatore è una retta verticale di ascissa m/b_{21} . Inoltre, considerando che la derivata di ciascuna variabile è positiva per valori superiori all'equilibrio e negativa per valori inferiori, si può costruire l'andamento qualitativo della traiettoria considerando la risultante delle due derivate in ciascuno dei quattro settori in cui le isocline dividono il primo quadrante



L'ammissibilità dell'equilibrio richiede che le due isocline si incontrino nel primo quadrante. Ciò avviene se e solo se $K > m/b_{21}$.

b) All'equilibrio lo Jacobiano vale $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\frac{m \cdot r}{b_{21} \cdot K} & -m \frac{b_{12}}{b_{21}} \\ b_{21} \frac{r}{b_{12}} \left(1 - \frac{m}{b_{21} \cdot K}\right) & 0 \end{bmatrix}$ i cui autovalori sono

$$\lambda = \frac{-\frac{m \cdot r}{b_{21} \cdot K} \pm \sqrt{\left(\frac{m \cdot r}{b_{21} \cdot K}\right)^2 - 4 \cdot m \cdot r \left(1 - \frac{m}{b_{21} \cdot K}\right)}}{2}.$$

Perciò dato che la quantità sotto radice è sempre inferiore al primo termine, se $K > m/b_{21}$, la parte reale degli autovalori sarà comunque negativa.

c) Il sistema avrà risposta oscillatoria se la quantità sotto radice è minore di zero, perciò dovrà essere

$$\left(\frac{m \cdot r}{b_{21} \cdot K}\right)^2 < 4 \cdot m \cdot r \left(1 - \frac{m}{b_{21} \cdot K}\right)$$

d) Con i valori dati, l'equilibrio ha coordinate $x^* = 3.0000$ e $y^* = 0.8140$. In questo punto lo Jacobiano vale

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0.1500 & -1.2900 \\ 0.0814 & 0 \end{bmatrix}$$

con autovalori $\lambda = -0.0750 \pm j 0.3152$. Perciò il punto di equilibrio è ammissibile e stabile, con risposta oscillatoria. Infatti, la condizione precedente vale

$$\left(\frac{m \cdot r}{b_{21} \cdot K}\right)^2 < 4 \cdot m \cdot r \left(1 - \frac{m}{b_{21} \cdot K}\right) \Rightarrow \left(\frac{0.3 \cdot 0.5}{0.1 \cdot 10}\right)^2 < 4 \cdot 0.3 \cdot 0.5 \left(1 - \frac{0.3}{0.1 \cdot 10}\right) \Rightarrow 0.0225 < 0.4200$$

e) Programma Matlab/Simulink

```
clear
close all

r=0.5;m=0.3;K=10;b12=0.43;b21=0.1;tfin=80;
Xo=10;Yo=2;% Parametri per risposta
oscillatoria

% Calcolo delle popolazioni di equilibrio
x_equil=m/b21
y_equil=(r/b12)*(1-x_equil/K)

% Calcolo degli autovalori
J=zeros(2,2);
J(1,1)=-m*r/(b21*K);
J(1,2)=-m*b12/b21;
J(2,1)=(b21*r/b12)*(1-m/(b21*K));
eig(J)

[t,x,y]=sim('LV',[0 tfin]);
figure(1)
hold off;clf
plot([0 K],[r/b12 0],'Color',[0.1 0.8 0.3]) %
Isoclina della preda
```

```
Xlim=max(Xo,K);
Ylim=max(Yo,r/b12);
axis([0 1.2*Xlim 0 1.6*Ylim]);
limite=axis;hold on
axis(axis)
plot([m/b21 m/b21],[0 limite(4)],'-r') %
Isoclina del predatore
plot(Xv,Yv,'b')
plot(Xo,Yo,'ob')
text(1.03*Xo,Yo,'(Xo,Yo)')
xlabel('Preda')
ylabel('Predatore')
pause
figure(2)
hold off;clf
plot(t,Xv,'g',t,Yv,'r')
a=axis;
axis([a(1) a(2) a(3) a(4)*1.3])
xlabel('tempo')
ylabel('Popolazioni')
legend('preda','predatore')
```

Schema Simulink per la simulazione del sistema Preda/Predatore

