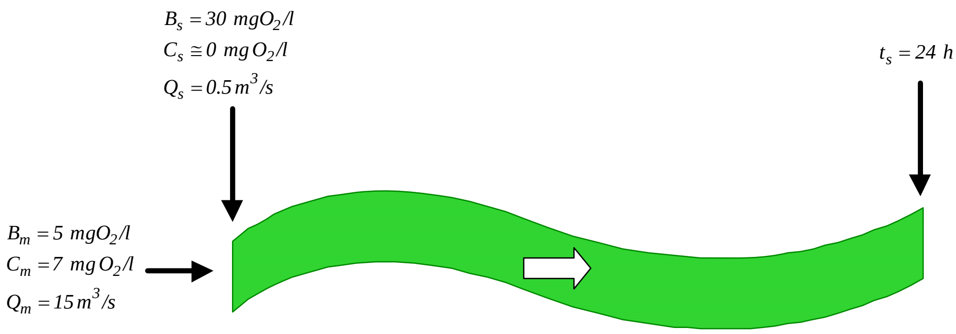
Dato il tratto fluviale in figura, nel quale si suppone diffusione nulla (D = 0), con un singolo scarico a monte di caratteristiche indicate in figura,



si determini la qualità fluviale (BOD e DO) a valle per $t_s = 24\ h$ utilizzando un modello di Streeter & Phelps con $K_b = 0.12\ h^{-1}$ e $K_c = 0.15\ h^{-1}$.

SOLUZIONE

Per prima cosa è necessario determinare la qualità a monte del tratto, subito dopo lo scarico. Per fare questo si devono calcolare le concentrazioni a valle dello scarico applicando le diluizioni

$$\text{BOD: } B_o = \frac{B_m \times Q_m + B_s \times Q_s}{Q_m + Q_s} = \frac{5 \times 15 + 30 \times 0.5}{15 + 0.5} = 7.742\ mg/l$$

$$\text{DO: } C_o = \frac{C_m \times Q_m + C_s \times Q_s}{Q_m + Q_s} = \frac{7 \times 15 + 0 \times 0.5}{15 + 0.5} = 6.774\ mg/l$$

Adesso è possibile integrare il modello di Streeter & Phelps con condizioni iniziali B_o e C_o

$$\begin{cases} \dfrac{dB}{dt_s} = -K_b \times B & \qquad B(0) = B_o \\[2ex] \dfrac{dC}{dt_s} = K_c(C_{sat} - C) - K_b \times B & \qquad C(0) = C_o \end{cases}$$

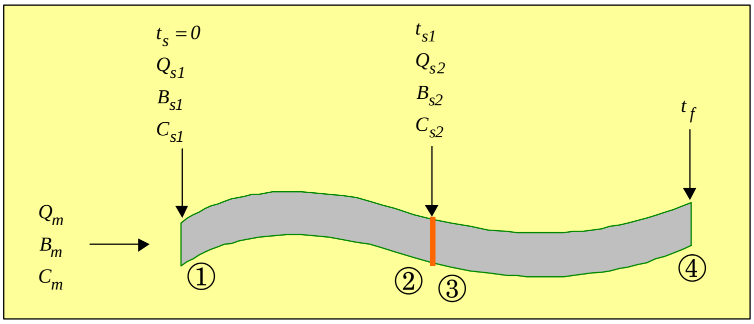
ottenendo

$$\begin{cases} B(t_s) = B_o\, e^{-K_b t_s} \\[2ex] C(t_s) = C_{sat} - \left(C_{sat} - C_o\right) e^{-K_c t_s} + \dfrac{K_b B_o}{K_b - K_c}\left(e^{-K_b t_s} - e^{-K_c t_s}\right) \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\boxed{\begin{cases} B(24) = 7.742 \times e^{-0.12 \times 24} = 0.345\ mg/l \\[2ex] C(24) = 9 - (9 - 6.774)e^{-0.15 \times 24} + \dfrac{0.12 \times 7.742}{0.12 - 0.15}\left(e^{-0.12 \times 24_s} - e^{-0.15 \times 24}\right) = 7.983\ mg/l \end{cases}}$$

Sia dato il sistema fluviale in figura, dove t_s rappresenta il tempo di scorrimento, per il quale si suppone nulla la diffusione (D = 0).



Con i seguenti valori

Monte: $\begin{cases} Q_m = 10 \ m^3/s \\ B_m = 7 \ mg/L \\ C_m = 7 \ mg/L \end{cases}$ Primo scarico $\begin{cases} t_{s1} = 0 \ h \\ Q_{s1} = 0.6 \ m^3/s \\ B_{s1} = 30 \ mg/L \\ C_{s1} = 0 \ mg/L \end{cases}$ Secondo scarico $\begin{cases} t_{s2} = 20 \ h \\ Q_{s2} = 0.25 \ m^3/s \\ B_{s2} = 50 \ mg/L \\ C_{s2} = 0 \ mg/L \end{cases}$

supponendo che C_{sat} = 8 mg/L e che le costanti cinetiche valgano K_b = 0.12 e K_c = 0.15, si determini:

a) Il modello di Streeter & Phelps per l'intero tratto fluviale

b) Il valore del BOD e dell'Ossigeno Disciolto nelle sezioni indicate con in numeri 1, 2, 3, 4, assumendo per il tempo finale, alla sezione 4, il valore t_f = 40 h.

La generica soluzione delle equazioni di Streeter & Phelps è

$$B(t_s) = B_{oi} \, e^{-K_b t_s}$$

$$C(t_s) = C_{sat} - (C_{sat} - C_{oi}) e^{-K_c t_s} + \frac{K_b B_{oi}}{(K_c - K_b)} \cdot \left[e^{-K_c t_s} - e^{-K_b t_s} \right] \qquad i = 1,3$$

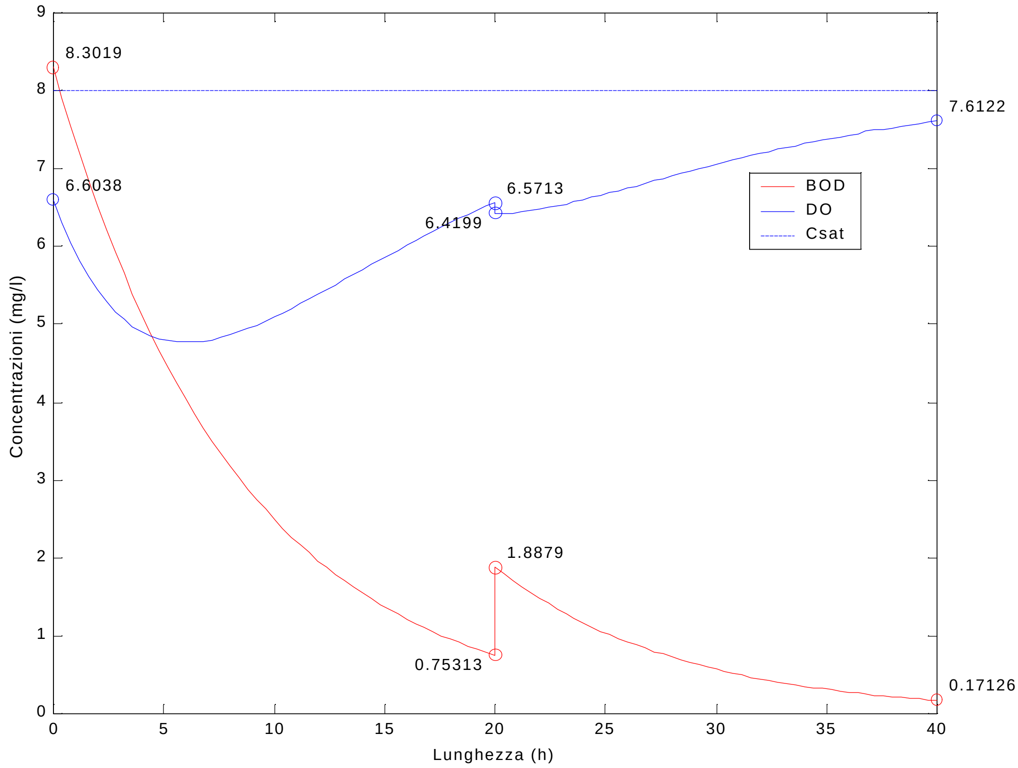
Dove le condizioni iniziali sono ricavate dalle diluizione a valle di ciascuno scarico concentrato. nel caso in esame esse valgono

Al punto 1	Al punto 3
$B_{o1} = \frac{B_m Q_m + Q_{s1} B_{s1}}{Q_m + Q_{s1}}$ $\quad C_{o1} = \frac{C_m Q_m}{Q_m + Q_{s1}}$	$B_{o3} = \frac{B_2 (Q_m + Q_{s1}) + Q_{s2} B_{s2}}{Q_m + Q_{s1} + Q_{s2}}$ $\quad C_{o3} = \frac{C_2 (Q_m + Q_{s1})}{Q_m + Q_{s1} + Q_{s2}}$

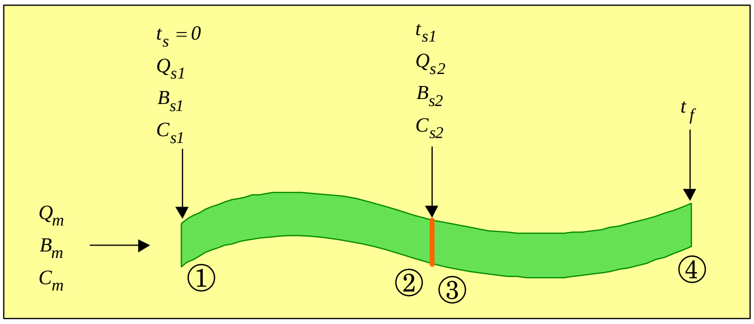
Sostituendo i valori numerici si ha

Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
B_1 = 8.3019	B_2 = 0.75313	B_3 = 1.8879	B_4 = 0.17126
C_1 = 6.6038	C_2 = 6.5713	C_3 = 6.4199	C_4 = 7.6122
Q_1 = 10.6	Q_2 = 10.6	Q_3 = 10.85	Q_4 = 10.85

L’andamento nel tempo di scorrimento è quello riportato in figura



Sia dato il sistema fluviale in figura, dove t_s rappresenta il tempo di scorrimento, per il quale si suppone nulla la diffusione (D = 0).



Con i seguenti valori

Monte: $\begin{cases} Q_m = 8 \ m^3/s \\ B_m = 7 \ mg/L \\ C_m = 7 \ mg/L \end{cases}$ Primo scarico $\begin{cases} t_{s1} = 0 \ h \\ Q_{s1} = 0.8 \ m^3/s \\ B_{s1} = 20 \ mg/L \\ C_{s1} = 0 \ mg/L \end{cases}$ Secondo scarico $\begin{cases} t_{s2} = 18 \ h \\ Q_{s2} = 0.5 \ m^3/s \\ B_{s2} = 60 \ mg/L \\ C_{s2} = 0 \ mg/L \end{cases}$

supponendo che C_{sat} = 8 mg/L e che le costanti cinetiche valgano K_b = 0.12 e K_c = 0.15, si determini:

a) Il modello di Streeter & Phelps per l'intero tratto fluviale

b) Il valore del BOD e dell'Ossigeno Disciolto nelle sezioni indicate con in numeri 1, 2, 3, 4, assumendo per il tempo finale, alla sezione 4, il valore t_f = 40 h.

La generica soluzione delle equazioni di Streeter & Phelps è

$$B(t_s) = B_o e^{-K_b t_s}$$

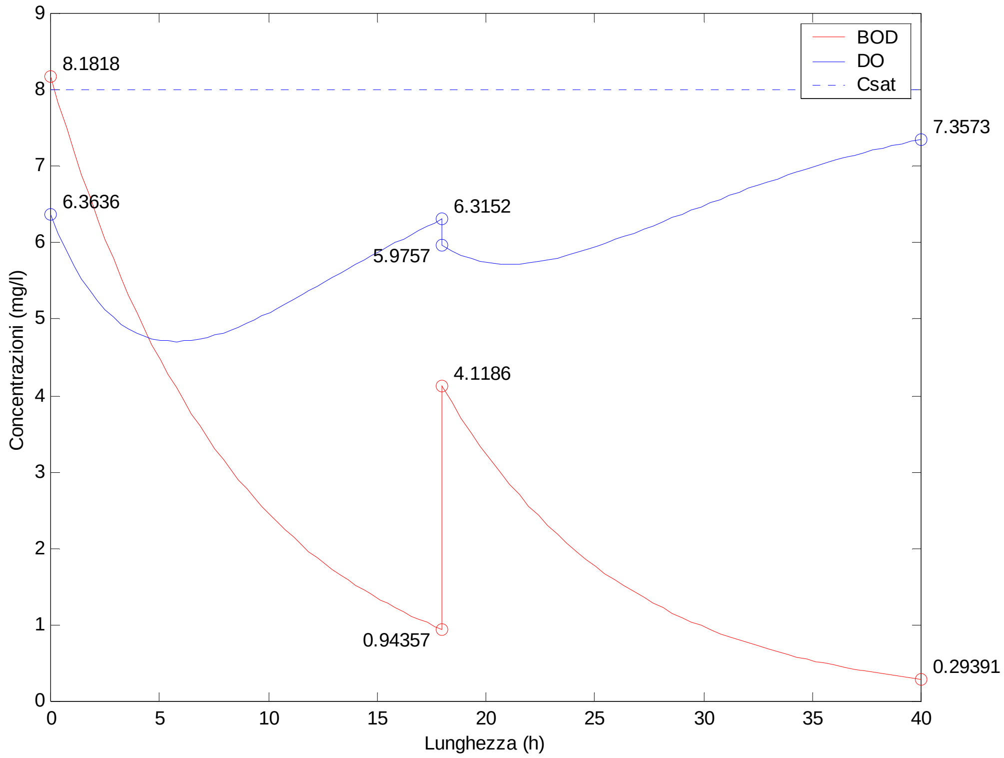
$$C(t_s) = C_{sat} - (C_{sat} - C_o) e^{-K_c t_s} + \frac{K_b B_o}{(K_c - K_b)} \cdot \left[e^{-K_c t_s} - e^{-K_b t_s} \right]$$

Dove le condizioni iniziali sono ricavate dalle diluizione a valle di ciascuno scarico concentrato. nel caso in esame esse valgono

Al punto 1	Al punto 3
$B_1 = \frac{B_m Q_m + Q_{s1} B_{s1}}{Q_m + Q_{s1}}$ $C_1 = \frac{C_m Q_m}{Q_m + Q_{s1}}$	$B_3 = \frac{B_2 (Q_m + Q_{s1}) + Q_{s2} B_{s2}}{Q_m + Q_{s1} + Q_{s2}}$ $C_3 = \frac{C_2 (Q_m + Q_{s1})}{Q_m + Q_{s1} + Q_{s2}}$

Sostituendo i valori numerici si ha

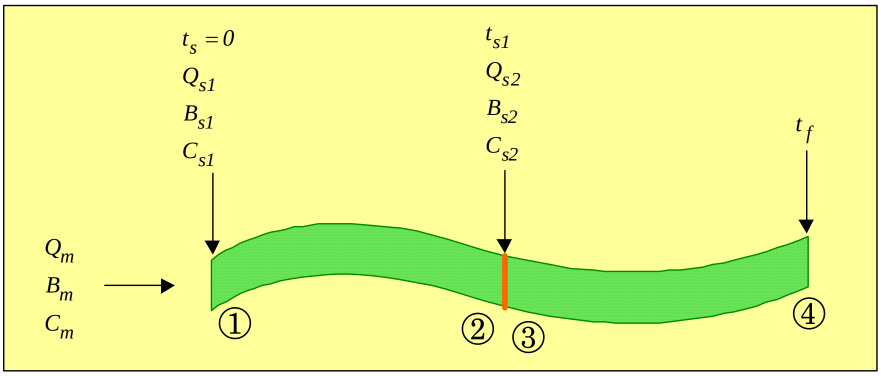
Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
B_1 = 8.1818	B_2 = 0.94357	B_3 = 4.1186	B_4 = 0.29391
C_1 = 6.3636	C_2 = 6.3152	C_3 = 5.9757	C_4 = 7.3573



BOD
DO
Csat
8.1818
6.3636
6.3152
5.9757
4.1186
0.94357
7.3573
0.29391
Concentrazioni (mg/l)
Lunghezza (h)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Es. n. 4

Sia dato il sistema fluviale in figura per il quale si suppone nulla la diffusione (D = 0) e la cui idrodinamica è descritta dalla seguente linea caratteristica $x = -0.03 \times t_s^2 + 1.83 \times t_s$, dove x è la distanza dalla sezione di monte in km e t_s rappresenta il tempo di scorrimento (h).



Con i seguenti valori

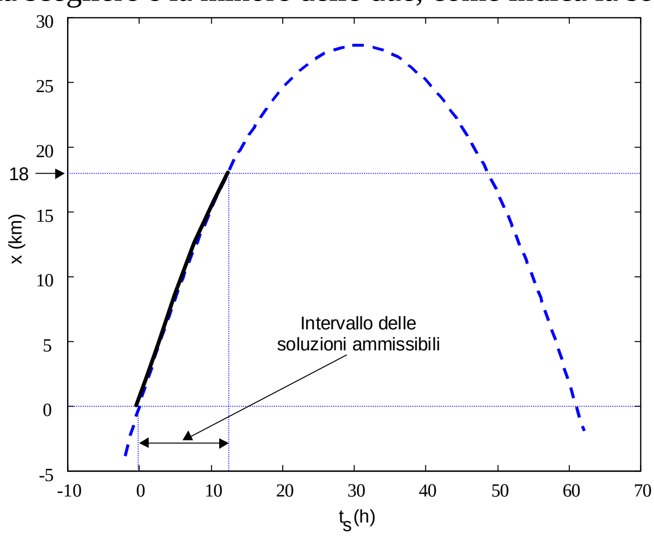
Monte: $\begin{cases} Q_m = 10 \;\; m^3/s \\ B_m = 10 \; mg/L \\ C_m = 7 \; mg/L \end{cases}$ Primo scarico $\begin{cases} x = 0 \, km \\ Q_{s1} = 1.2 \;\; m^3/s \\ B_{s1} = 30 \; mg/L \\ C_{s1} = 0 \; mg/L \end{cases}$ Secondo scarico $\begin{cases} x = 18 \; km \\ Q_{s2} = 0.6 \;\; m^3/s \\ B_{s2} = 40 \; mg/L \\ C_{s2} = 0 \; mg/L \end{cases}$

supponendo che C_{sat} = 9 mg/L e che le costanti cinetiche valgano $K_b = 0.1\ (h^{-1})$ e $K_c = 0.15\ (h^{-1})$, si ottiene:

a) il tempo di scorrimento, nell'ipotesi *follow the plug* secondo la linea caratteristica indicata, si ottiene risolvendo l'equazione, dove si pone il termine noto x pari alle distanze richieste.

$$-0.03t_s^2 + 1.83t_s - x = 0 \tag{1}$$

La più piccola delle due radici è il tempo di scorrimento richiesto, in quanto il tratto di parabola (1) che definisce il tempo di scorrimento di interesse è quello per x compreso fra 0 e 18 km. Ciò implica che la radice da scegliere è la minore delle due, come indica la seguente figura



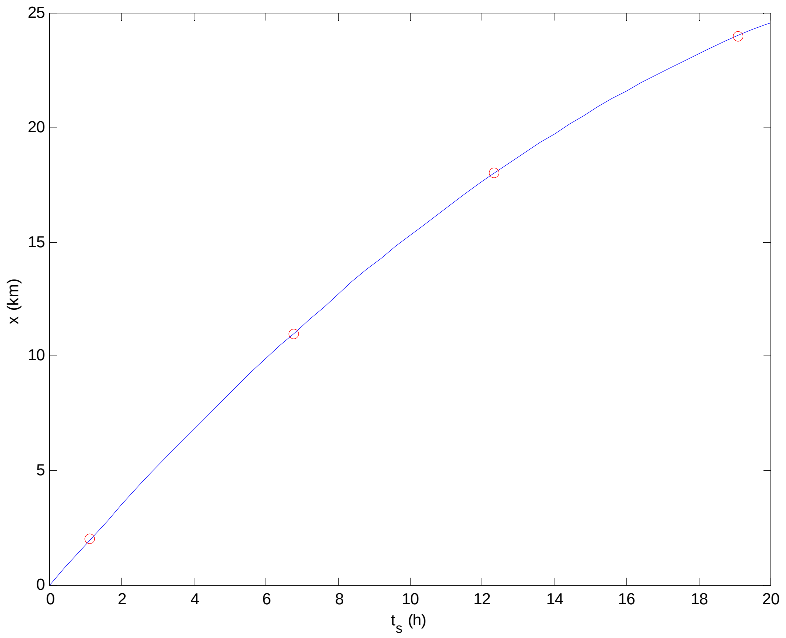
Per la velocità, derivando la (1) rispetto a t_s si ottiene

$$u = \frac{dx}{dt_s} = -0.06 t_s + 1.83 \qquad (2)$$

sostituendo i valori di t_s si ottiene la seguente tabella

distanza da monte *x* (km)	tempo di scorrimento t_s (h)	velocità *u* (km/h)
2	1.1132	1.7632
11	6.7601	1.4244
18	12.3272	1.0904
24	19.0873	0.6848

La posizione dei punti di misura lungo la linea caratteristica (linea continua) è indicata dai cerchietti



b) Il modello di Streeter & Phelps per l'intero tratto fluviale, scritto in tempo di scorrimento

$$\begin{cases} BOD & \dfrac{dB}{dt_s} = -K_b B \\ DO & \dfrac{dC}{dt_s} = K_c (C_{sat} - C) - K_b B \end{cases}$$

c) La generica soluzione delle equazioni di Streeter & Phelps è

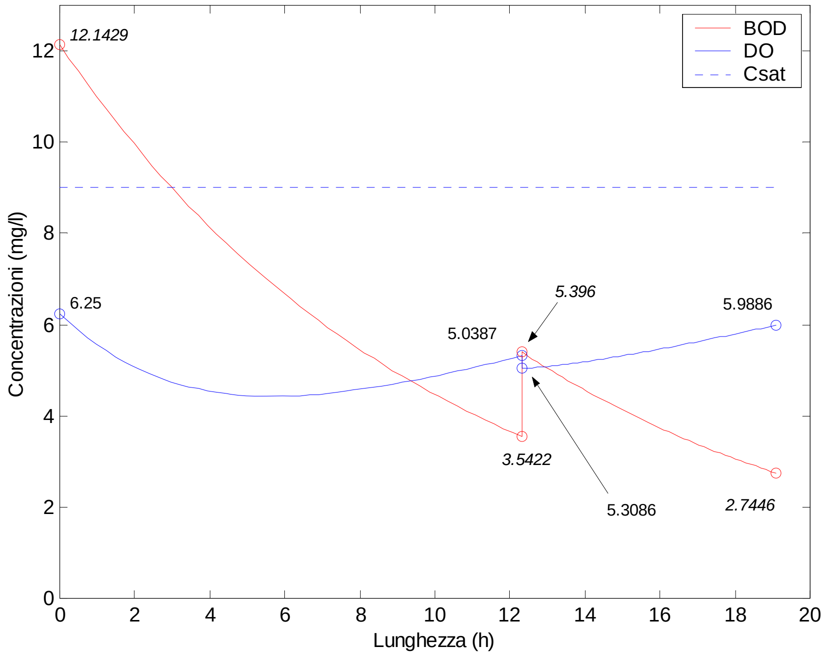
$$B(t_s) = B_o e^{-K_b t_s}$$

$$C(t_s) = C_{sat} - (C_{sat} - C_o) e^{-K_c t_s} + \frac{K_b B_o}{(K_c - K_b)} \cdot \left[e^{-K_c t_s} - e^{-K_b t_s} \right]$$

Dove le condizioni iniziali sono ricavate dalle diluizione a valle di ciascuno scarico concentrato. nel caso in esame esse valgono

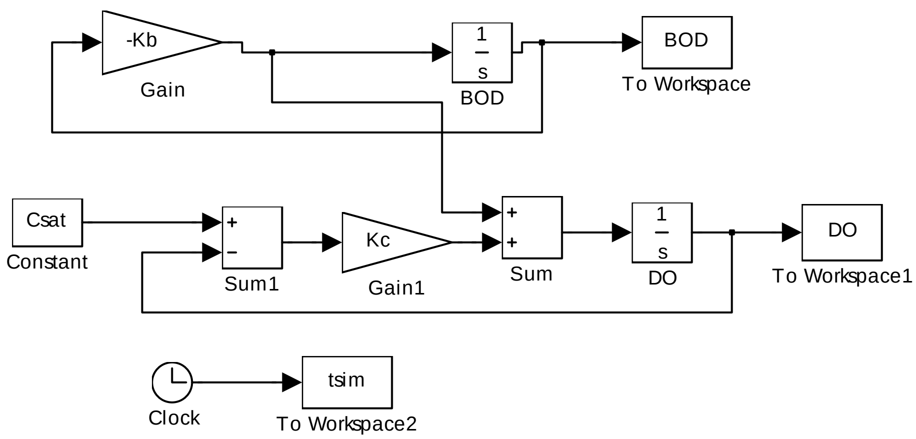
Al punto 1	Al punto 3
$B_1 = \frac{B_m Q_m + Q_{s1} B_{s1}}{Q_m + Q_{s1}} \quad C_1 = \frac{C_m Q_m}{Q_m + Q_{s1}}$	$B_3 = \frac{B_2 (Q_m + Q_{s1}) + Q_{s2} B_{s2}}{Q_m + Q_{s1} + Q_{s2}} \quad C_3 = \frac{C_2 (Q_m + Q_{s1})}{Q_m + Q_{s1} + Q_{s2}}$

d) I valori numerici del BOD e dell'Ossigeno Disciolto nelle sezioni indicate con in numeri 1, 2, 3, 4 sono indicati in figura



Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
$B_1 = 12.1429$	$B_2 = 3.5422$	$B_3 = 5.3960$	$B_4 = 2.7446$
$C_1 = 6.2500$	$C_2 = 5.3086$	$C_3 = 5.0387$	$C_4 = 5.9886$

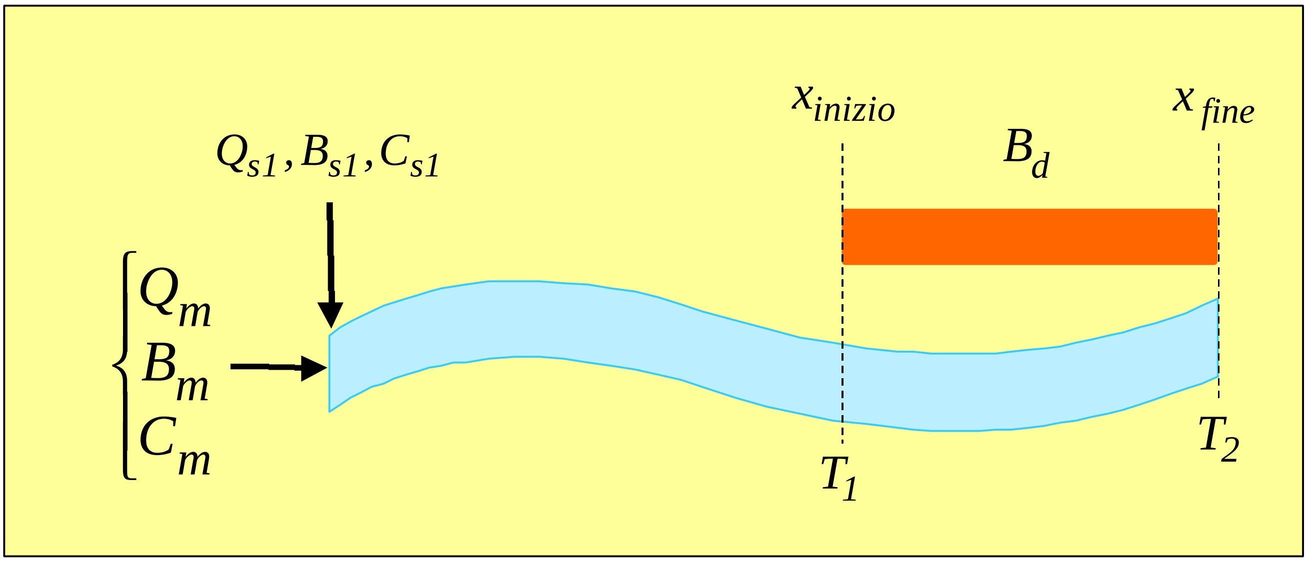
e) Lo schema Simulink per la simulazione dell'intero tratto è il seguente



dove le condizioni iniziali dei due integratori devono essere poste uguali ai valori ricavati per le sezioni 1 e 3 rispettivamente.

Es. n. 4 (8 punti)

Sia dato il sistema fluviale in figura con uno scarico concentrato a monte ed un tratto con BOD distribuito costante a valle, per il quale si suppone nulla la diffusione (D = 0) e il cui regime idraulico è descritto dalla seguente linea caratteristica $x = -0.02 \times t_s^2 + 1.9 \times t_s$, dove x è la distanza dalla sezione di monte in km e t_s rappresenta il tempo di scorrimento in ore.



I valori numerici sono i seguenti:

Fiume a monte	Scarico concentrato	Scarico distribuito
$\begin{cases} Q_m = 5 \ \ m^3/s \\ B_m = 10 \ mg/L \\ C_m = 7 \ mg/L \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \ \ km \\ Q_{s1} = 1.0 \ \ m^3/s \\ B_{s1} = 40 \ mg/L \\ C_{s1} = 0 \ mg/L \end{cases}$	$\begin{cases} x_{inizio} = 30 \ km \\ x_{fine} = 40 \ km \\ B_d = 0.6 \ mg/L.h \end{cases}$

Supponendo che C_{sat} = 8.6 mg/L e che le costanti cinetiche valgano $K_b = 0.1\ (h^{-1})$ e $K_c = 0.15\ (h^{-1})$, si determini:

a) Il tempo di scorrimento e la velocità corrispondente alle distanze: 10, 20, 30, 40 km.

b) Il modello di Streeter & Phelps per l'intero tratto fluviale, scritto nel tempo di scorrimento t_s;

c) L'espressione analitica del BOD e del DO lungo l'intero tratto fluviale;

d) Il valore numerico del BOD e dell'Ossigeno Disciolto agli istanti T_1 e T_2 (indicati in figura) del tempo di scorrimento;

e) Lo schema Simulink per la simulazione dell'intero tratto fluviale.

SVOLGIMENTO

a) Il tempo di scorrimento e la velocità corrispondente alle distanze 10, 20, 30, 40 km.

il tempo di scorrimento, nell'ipotesi *follow the plug* secondo la linea caratteristica indicata, si ottiene risolvendo l'equazione, dove si pone il termine noto x pari alle distanze richieste.

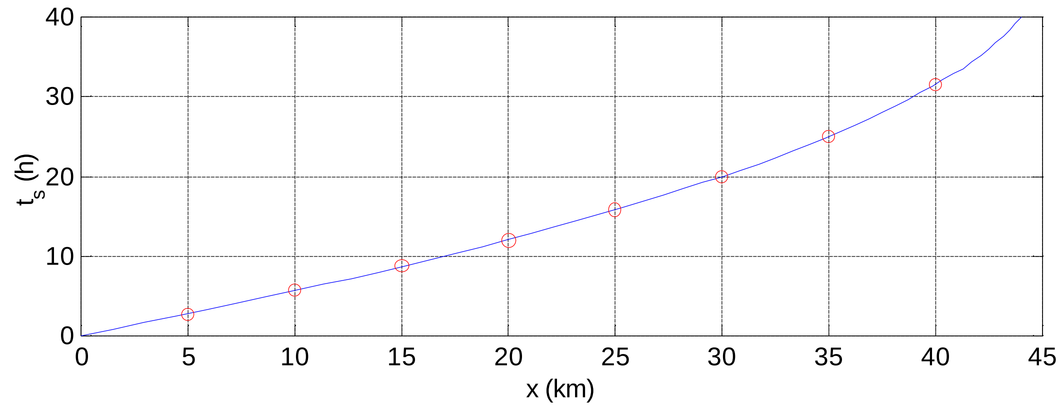
$$-0.02\times t_s^2+1.9\times t_s-x=0 \tag{1}$$

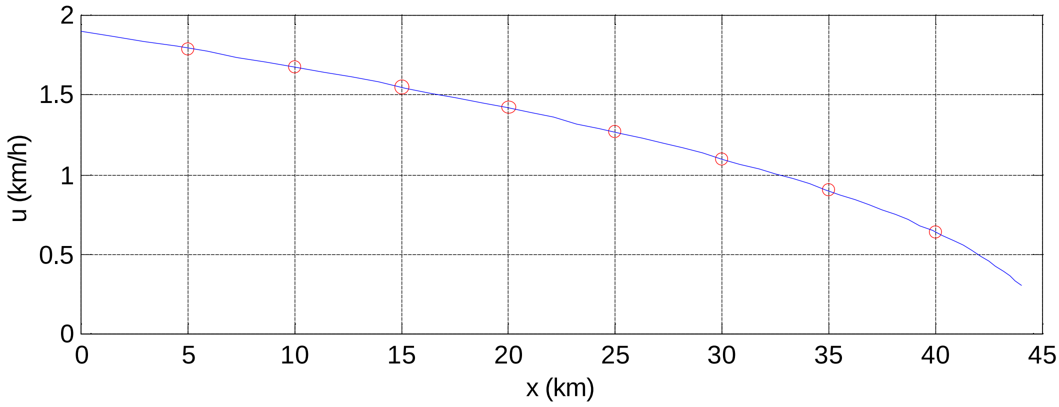
La più piccola delle due radici è il tempo di scorrimento richiesto. Analogamente, per la velocità, derivandola (1) rispetto a t_s si ottiene

$$u=\frac{dx}{dt_s}=-0.04\times t_s+1.9 \tag{2}$$

sostituendo i valori di t_s si ottiene la seguente tabella

distanza da monte x (km)	tempo di scorrimento t_s (h)	velocità u (km/h)
5	2.7088	1.7916
10	5.5924	1.6763
15	8.6896	1.5524
20	12.0564	1.4177
25	15.7786	1.2689
30	20.0000 = T_1	1.1000
35	25.0000	0.9000
40	31.4922 = T_2	0.6403





b) Il modello di Streeter & Phelps per l'intero tratto fluviale, scritto nel tempo di scorrimento t_s;

Il modello di Streeter & Phelps dal punto di monte fino all'inizio del BOD distribuito ha l'espressione

$$\begin{cases} BOD & \dfrac{dB}{dt_s} = -K_b B \\ DO & \dfrac{dC}{dt_s} = K_c\left(C_{sat} - C\right) - K_b B \end{cases} \qquad t_s < T_1 \tag{1}$$

mentre nel tratto con BOD distribuito è

$$\begin{cases} BOD & \dfrac{dB}{dt_s} = -K_b B + B_d \\ DO & \dfrac{dC}{dt_s} = K_c\left(C_{sat} - C\right) - K_b B \end{cases} \qquad T_1 \le t_s \le T_2 \tag{2}$$

Nel passare dall'equazione (1) alla (2) ***NON si devono ridefinire*** le condizioni iniziali, in quanto non si ha alcuna discontinuità.

c) L'espressione analitica del BOD e del DO lungo tutto il tratto;

c.1) Tratto a valle del carico concentrato, fino a T_1.

Integrando l'eq. (1) per t_s compreso fra 0 e 20 h (corrispondente a 30 km), si ha l'evoluzione del sistema nel tratto senza BOD distribuito, ottenendo

$$\begin{aligned} &B(t_s) = B_o\, e^{-K_b t_s} \\ &C(t_s) = C_{sat} - \left(C_{sat} - C_o\right) e^{-K_c t_s} + \frac{K_b B_o}{\left(K_c - K_b\right)} \cdot \left[\, e^{-K_c t_s} - e^{-K_b t_s} \,\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Le condizioni iniziali si determinano calcolando le diluizioni fra i valori a monte e quelli dello scarico concentrato.

$$B_o = \frac{B_m Q_m + Q_{s1} B_{s1}}{Q_m + Q_{s1}} \qquad C_o = \frac{C_m Q_m}{Q_m + Q_{s1}} \tag{4}$$

Con i valori dati, sostituendo in (4) si ha:

$$B_o = 15 \ mg/L \qquad C_o = 5.8333 \ mg/L \tag{4.a}$$

c.2) Tratto con carico distribuito, fra T_1 e T_2.

Nel tratto con BOD distribuito, la prima delle eq. (2) si può integrare adottando il seguente cambiamento di variabili, per tener conto che il tratto di interesse è limitato a valori di t_s tali che $T_1 \le t_s \le T_2$. Perciò considerando il nuovo tempo di scorrimento $t_s' = t_s - T_1$ si avrà ancora

$$B(t_s') = B_1 e^{-K_b t_s'} + \int_0^{t_s'} B_d e^{-K_b(t_s'-s)} ds \qquad 0 \le t_s' \le T_2 - T_1 \tag{5}$$

Essendo B_d costante, l'integrale di convoluzione è risolvibile mediante una sostituzione di variabili

$$t_s' - s = x \quad \Rightarrow ds = -dx \tag{6}$$

con i nuovi estremi di integrazione

$$s = 0 \Rightarrow x = t_s' \quad \& \quad s = t_s' \Rightarrow x' = 0 \tag{7}$$

ottenendo

$$\int_0^{t_s'} B_d e^{-K_b(t_s'-s)} ds = -B_d \int_{t_s'}^{0} e^{-K_b x} dx = B_d \int_0^{t_s'} e^{-K_b x} dx = -\frac{B_d}{K_b} e^{-K_b x}\Big|_0^{t_s'} = \frac{B_d}{K_b}\left(1 - e^{-K_b t_s'}\right) \tag{8}$$

Perciò, combinando la (5) e la (8), l'evoluzione completa del BOD nel tratto distribuito è

$$\boxed{B(t_s') = B_1 e^{-K_b t_s'} + \frac{B_d}{K_b}\left(1 - e^{-K_b t_s'}\right) = \frac{B_d}{K_b} + \left(B_1 - \frac{B_d}{K_b}\right) e^{-K_b t_s'}} \tag{9}$$

Per l'equazione del DO, si effettua un cambiamento di variabili introducendo il Deficit di ossigeno $D(t_s) = C_{sat} - C(t_s)$. Inoltre si considera il termine di BOD come l'ingresso forzante al sistema. In tal modo la seconda delle eq. (2) diviene

$$\frac{dD(t_s')}{dt_s'} = -K_c D(t_s') + K_b B(t_s') = -K_c D(t_s') + K_b \left\{ \frac{B_d}{K_b} + \left(B_1 - \frac{B_d}{K_b}\right) e^{-K_b t_s'} \right\} \tag{10}$$

Risolvendo ancora con l'integrale di convoluzione

$$D(t_s') = D_1 e^{-K_c t_s'} + K_b \int_0^{t_s'} \left\{ \frac{B_d}{K_b} + \left(B_1 + \frac{B_d}{K_b}\right) e^{-K_b s} \right\} e^{-K_c(t_s'-s)} ds \tag{11}$$

L'integrale di convoluzione si compone di due termini additivi

$$K_b \int_0^{t_s'} \frac{B_d}{K_b} e^{-K_c(t_s'-s)} ds \tag{12.a}$$

$$K_b \int_0^{t_s'} \left\{ \left(B_1 + \frac{B_d}{K_b} \right) e^{-K_b s} \right\} e^{-K_c (t_s' - s)} ds \qquad (12.b)$$

Il primo (12.a) è identico a (8) e perciò vale

$$K_b \int_0^{t_s'} \frac{B_d}{K_b} e^{-K_c (t_s' - s)} ds = \frac{B_d}{K_c}\left(1 - e^{-K_c t_s'}\right) \qquad (13)$$

Il secondo si integra come nella classica equazione del Deficit di Streeter & Phelps estraendo dall'integrale i termini funzione dell'estremo superiore di integrazione (t_s')

$$\begin{aligned} K_b \int_0^{t_s'} \left\{ \left(B_1 + \frac{B_d}{K_b} \right) e^{-K_b s} \right\} e^{-K_c (t_s' - s)} ds &= K_b \left(B_1 + \frac{B_d}{K_b} \right) e^{-K_c t_s'} \int_0^{t_s'} e^{(K_c - K_b)s} ds \\ &= K_b \left(B_1 + \frac{B_d}{K_b} \right) e^{-K_c t_s'} \frac{1}{K_c - K_b} e^{(K_c - K_b)s} \Big|_0^{t_s'} \qquad (14) \\ &= \left(B_1 + \frac{B_d}{K_b} \right) e^{-K_c t_s'} \frac{K_b}{K_c - K_b} \left(e^{(K_c - K_b)t_s'} - 1 \right) \end{aligned}$$

Ricomponendo i vari termini, si ha la soluzione completa

$$\boxed{D(t_s') = D_1 e^{-K_c t_s'} + \frac{B_d}{K_c}\left(1 - e^{-K_c t_s'}\right) + \left(B_1 + \frac{B_d}{K_b} \right) e^{-K_c t_s'} \frac{K_b}{K_c - K_b} \left(e^{(K_c - K_b)t_s'} - 1 \right)} \qquad (15)$$

d) Il valore numerico del BOD e dell'Ossigeno Disciolto agli istanti T_1 e T_2 (indicati in figura) del tempo di scorrimento;

Per ottenere i valori di BOD e DO a T_1 si deve integrare le eq. (3) dalla condizione di monte fino all'inizio del tratto con BOD distribuito ($t_s = T_1$), ottenendo i valori finali del tratto, per $t_s = T_1$.

Dati i valori iniziali, dopo la diluizione,

$$B_o = 15 \ (mg/L) \quad C_o = 5.8333 \ (mg/L) \qquad (4.a)$$

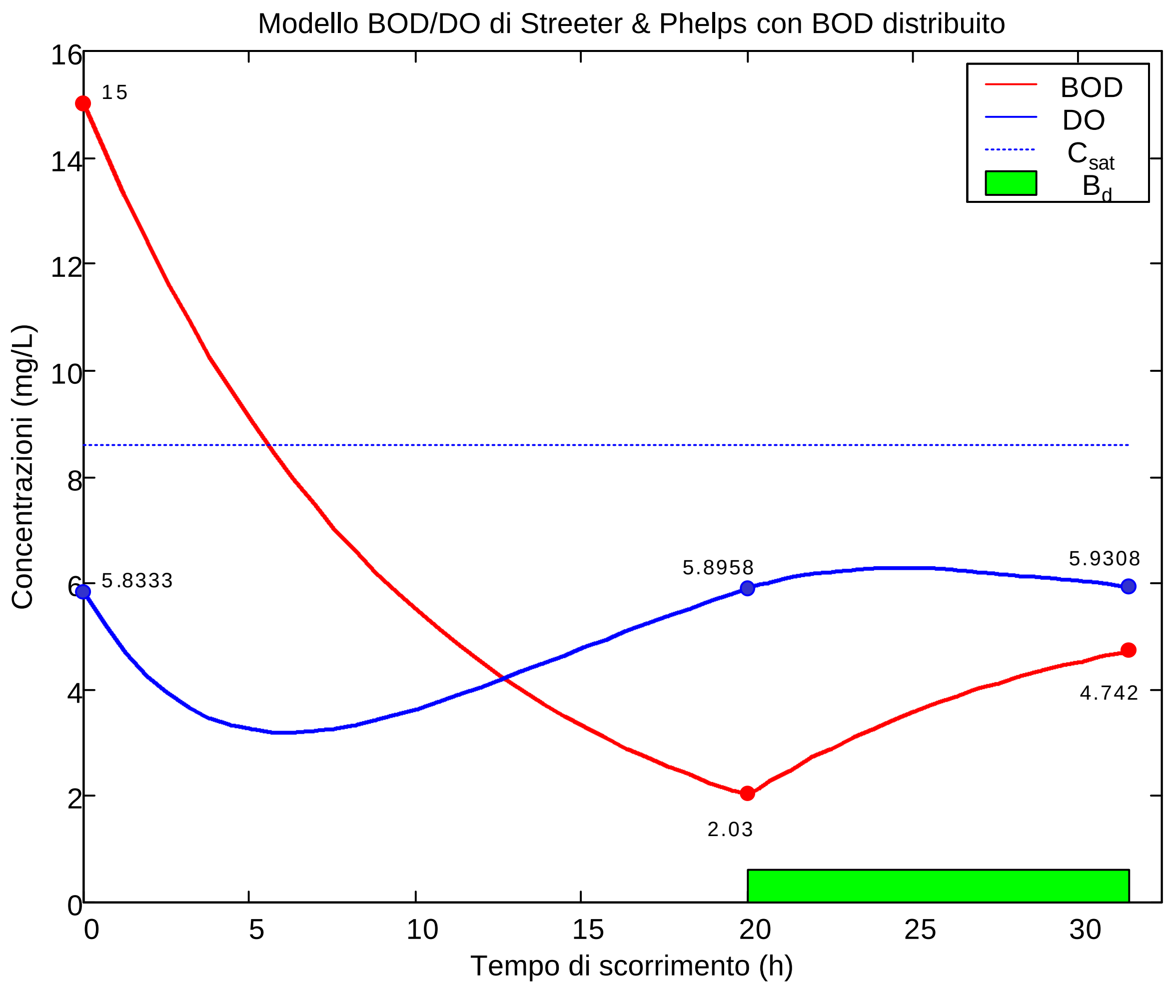
si ottiene

$$\boxed{B_1 = 2.03 \ (mg/L) \quad C_1 = 5.898 (mg/L)}$$

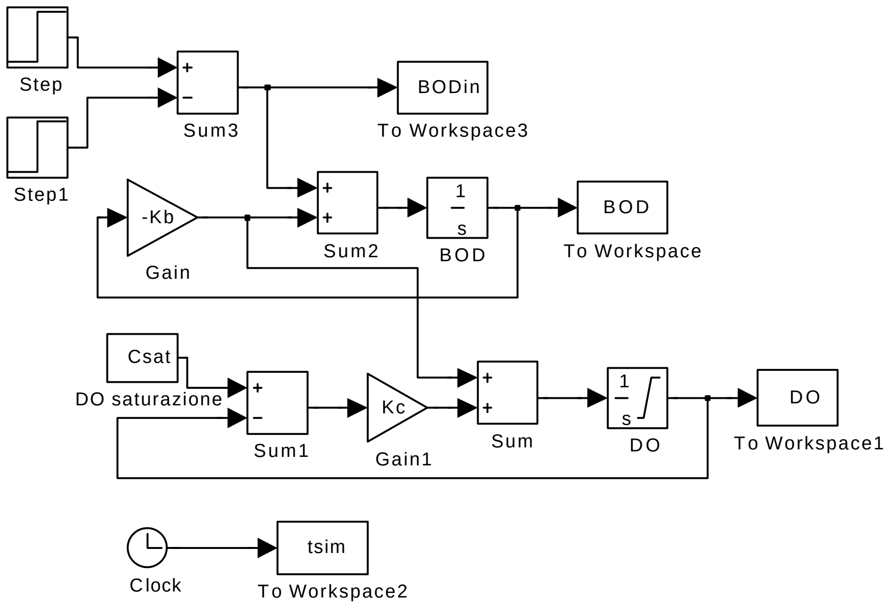
Per il tratto con BOD distribuito, si utilizzano le eq. (9) e (15) sostituendo a t_s' il valore pari alla differenza fra T_1 e T_2 , ovvero $T_2 - T_1 = 31.4922 - 20 = 11.4922 \ h$. Con questi valori, ed utilizzando i valori di B_1 e C_1 appena ricavati, si ottiene

$$\boxed{B_2 = 4.7420 \ (mg/L) \quad C_2 = 5.9309 \ (mg/L)}$$

La figura seguente mostra l'andamento delle due variabili lungo l'intero tratto fluviale.



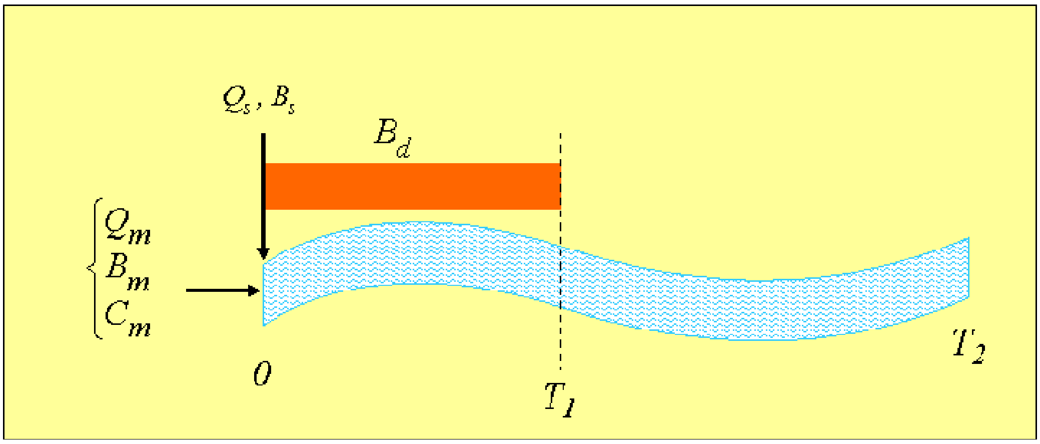
d) Lo schema Simulink per la simulazione dell'intero tratto fluviale.



Corso di Modellistica e Controllo dei Sistemi Ambientali *Prova Scritta del 29 Giugno 2005*	
Cognome e nome	Matr.
Attenzione: *Apporre il proprio nome su ciascun foglio.* *Non sono ammesse cancellature in bianchetto*	

Es n. 1 (10 punti)

Il sistema fluviale descritto in figura consiste in uno scarico concentrato a monte, seguito immediatamente da un tratto a valle dove per $0 < t_s \le T_1$ è presente uno scarico di BOD distribuito B_d. Su tutto il tratto è anche presente una domanda di ossigeno dal sedimento (SOD). Il tratto da considerare si estende fino a T_2.



I parametri del sistema sono i seguenti:

Qualità a monte:	Scarico concentrato	Scarico distribuito	Parametri
$\begin{cases} Q_m = 5 \ m^3 \ s^{-1} \\ B_m = 7 \ mg \ L^{-1} \\ C_m = 7 \ mg \ L^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_s = 0.5 \ m^3 s^{-1} \\ B_s = 40 \ mg \ L^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} T_0 = 0 \ h \\ T_1 = 25 \ h \\ B_d = 0.5 \ mg \ L^{-1} \ h^{-1} \end{cases}$	$K_b = 0.12 \ h^{-1}$ $K_c = 0.15 \ h^{-1}$ $C_{sat} = 8.6 \ mg \ L^{-1}$ $SOD = 0.2 \ mg \ L^{-1} \ h^{-1}$ $T_2 = 50 \, h$

Si determini:

a) Il sistema di equazioni differenziali che definisce il modello della qualità fluviale per l'intero tratto;

b) L'espressione analitica dell'andamento di BOD e DO per l'intero tratto;

c) Tracciare un andamento *qualitativo* di BOD e DO lungo tutto il tratto, discutendone le caratteristiche più rilevanti;

d) I valori numerici del BOD e del DO per $t_s = T_0, T_1, T_2$;

e) Il diagramma Simulink del sistema.

SVOLGIMENTO

Conviene suddividere il fiume nei due tratti L_1 (dall'inizio fino a T_1) e L_2 (da T_1 a T_2)

Nel tratto L_1 esiste un apporto di BOD distribuito costante pari a B_d. Le equazioni differenziali che costituiscono il modello per questo tratto sono le seguenti:

$$\begin{cases} BOD \quad \dfrac{dB}{dt_s} = -K_b B + B_d \\ DO \quad \dfrac{dC}{dt_s} = K_c\left(C_{sat} - C\right) - K_b B - SOD \end{cases} \tag{1}$$

Essendo presente uno scarico *concentrato* nella sezione di monte, le condizioni iniziali si determinano attraverso la diluizione fra la qualità di monte e lo scarico. Tenendo presente che l'ossigeno disciolto nello scarico è nullo, si ha:

$$B_o = \frac{B_m Q_m + B_s Q_s}{Q_m + Q_s} \quad ; \quad C_o = \frac{C_m Q_m}{Q_m + Q_s} \tag{2}$$

L'equazione del BOD ha un ingresso rappresentato dal BOD distribuito, che è costante e pari a B_d, perciò la prima delle eq. (1) si integra direttamente ottenendo

$$B(t) = B_o e^{-K_b t_s} + \int_0^{T_1} B_d e^{-K_b(t_s - \sigma)} d\sigma \tag{3}$$

da cui si ricava

$$B(t_s) = B_o e^{-K_b t_s} + \frac{B_d}{K_b}\left(1 - e^{-K_b t_s}\right) \quad 0 < t_s \le T_1 \tag{4}$$

Per esprimere l'ingresso di BOD nell'equazione del DO, la (4) si può riscrivere raggruppando i termini con l'esponenziale

$$B(t_s) = \frac{B_d}{K_b} + \left(B_o - \frac{B_d}{K_b}\right)e^{-K_b t_s} \quad 0 < t_s \le T_1 \tag{5}$$

Sostituendola nell'equazione del DO ed introducendo il Deficit $D = C_{sat} - C$, tenendo conto che $\dfrac{dD}{dt_s} = \dfrac{d\left(C_{sat} - C\right)}{dt_s} = -\dfrac{dC}{dt_s}$, la seconda eq. (1) diviene

$$\frac{dD}{dt_s} = -K_c D + K_b B(t_s) + SOD = -K_c D + K_b\left[\frac{B_d}{K_b} + \left(B_o - \frac{B_d}{K_b}\right)e^{-K_b t_s}\right] + SOD \tag{6}$$

La (6) è di nuovo un sistema lineare con dinamica -K_c e due ingressi: il BOD distribuito ed il SOD, perciò si può applicare nuovamente la soluzione generale, ottenendo

$$D(t_s) = D_o\, e^{-K_c t_s} + K_b \int_0^{t_s} \left[\frac{B_d}{K_b} + \left(B_o - \frac{B_d}{K_b} \right) e^{-K_b \sigma} \right] e^{-K_c (t_s - \sigma)} d\sigma + \int_0^{t_s} SOD e^{-K_c (t_s - \sigma)} d\sigma \qquad (7)$$

Ciascun integrale può essere svolto direttamente termine a termine. Consideriamo il primo

$$\begin{aligned} & K_b \int_0^{t_s} \left[\frac{B_d}{K_b} + \left(B_o - \frac{B_d}{K_b} \right) e^{-K_b \sigma} \right] e^{-K_c (t_s - \sigma)} d\sigma \\ & = B_d \int_0^{t_s} e^{-K_c (t_s - \sigma)} d\sigma + K_b \int_0^{t_s} \left(B_o - \frac{B_d}{K_b} \right) e^{-K_b \sigma}\, e^{-K_c (t_s - \sigma)} d\sigma \end{aligned} \qquad (8)$$

Il primo termine è identico a quello già trattato per il BOD e perciò vale

$$B_d \int_0^{t_s} e^{-K_c (t_s - \sigma)} d\sigma = \frac{B_d}{K_c} \left(1 - e^{-K_c t_s} \right) \qquad (9)$$

Mentre il secondo si calcola alla stessa maniera

$$\begin{aligned} & K_b \int_0^{t_s} \left(B_o - \frac{B_d}{K_b} \right) e^{-K_b \sigma} e^{-K_c (t_s - \sigma)} d\sigma = K_b e^{-K_c t_s} \int_0^{t_s} \left(B_o - \frac{B_d}{K_b} \right) e^{(K_c - K_b)\sigma} d\sigma \\ & = K_b e^{-K_c t_s} \left(B_o - \frac{B_d}{K_b} \right) \frac{1}{K_c - K_b} e^{(K_c - K_b)\sigma} \Big|_0^{t_s} = K_b e^{-K_c t_s} \left(B_o - \frac{B_d}{K_b} \right) \frac{1}{K_c - K_b} \left(e^{(K_c - K_b) t_s} - 1 \right) \end{aligned} \qquad (10)$$

Analogamente alla (9) l'integrale del SOD vale

$$\int_0^{t_s} SOD\; e^{-K_c (t_s - \sigma)} d\sigma = \frac{SOD}{K_c} \left(1 - e^{-K_c \bar{t} s} \right) \qquad (11)$$

Perciò la soluzione completa è

$$D(t_s) = D_o\, e^{-K_c t_s} + \frac{B_d}{K_c} \left(1 - e^{-K_c t_s} \right) + K_b e^{-K_c t_s} \left(B_o - \frac{B_d}{K_b} \right) \frac{1}{K_c - K_b} \left(e^{(K_c - K_b) t_s} - 1 \right) + \frac{SOD}{K_c} \left(1 - e^{-K_c \bar{t} s} \right) \qquad (12)$$

Raggruppando i termini

$$\boxed{D(t_s) = D_o\, e^{-K_c t_s} + \frac{B_d + SOD}{K_c} \left(1 - e^{-K_c t_s} \right) + K_b e^{-K_c t_s} \left(B_o - \frac{B_d}{K_b} \right) \frac{1}{K_c - K_b} \left(e^{(K_c - K_b) t_s} - 1 \right)} \qquad (13)$$

Nel tratto L_2, dove manca il BOD distribuito, il sistema di eq. (1) si riduce a

$$\begin{cases} BOD & \dfrac{dB}{dt_s} = -K_b B \\ DO & \dfrac{dC}{dt_s} = K_c \left(C_{sat} - C \right) - K_b B - SOD \end{cases} \qquad T_1 < t_s \le T_2 \qquad (14)$$

Conviene riposizionare l’asse dei tempi ridefinendo un tempo $t_s^{'}$ di scorrimento con inizio a T_1, ovvero $0 < t_s^{'} \le T_2 - T_1$. In queste ipotesi, l’integrazione della prima delle eq. (14) è

$$\boxed{B(t_s^{'}) = B_o^{'}\, e^{-K_b t_s^{'}}} \tag{15}$$

dove la condizione iniziale $B_o^{'}$ è uguale al valore finale del tratto precedente, ovvero $B(T_1)$ ottenuta dalla eq. (4) o dalla eq. (5).

Per il DO, l’integrazione è la solita, tenendo conto che ancora agiscono due ingressi, il BOD, questa volta dato dalla eq. (15), ed il termine costante SOD. Perciò si possono riutilizzare i risultati precedenti. Passando nuovamente al deficit e sostituendo i termini forzanti nella seconda eq. (14) si ha

$$\frac{dD}{dt_s^{'}} = -K_c D + K_b B(t_s) + SOD = -K_c D + K_b B_o^{'}\, e^{-K_b t_s^{'}} + SOD \tag{16}$$

che ha la seguente soluzione generale

$$D(t_s^{'}) = D_o^{'}\, e^{-K_c t_s^{'}} + K_b B_o^{'} \int_0^{t_s^{'}} e^{-K_b \sigma}\, e^{-K_c\left(t_s^{'} - \sigma\right)} d\sigma + \int_0^{t_s^{'}} SOD\, e^{-K_c\left(t_s^{'} - \sigma\right)} d\sigma \tag{17}$$

estraendo i termini funzione dell’estremo superiore di integrazione

$$D(t_s^{'}) = D_o^{'}\, e^{-K_c t_s^{'}} + K_b B_o^{'} e^{-K_c t_s^{'}} \int_0^{t_s^{'}} e^{(K_c - K)_b \sigma}\, d\sigma + e^{-K_c t_s^{'}} \int_0^{t_s^{'}} SOD\, e^{K_c \sigma} d\sigma\,. \tag{18}$$

Risolvendo i singoli integrali

$$\int_0^{t_s^{'}} e^{(K_c - K_b)\sigma} d\sigma = \frac{1}{K_c - K_b} e^{(K_c - K_b)\sigma}\Big|_0^{t_s^{'}} = \frac{1}{K_c - K_b}\left(e^{(K_c - K_b)t_s^{'}} - 1\right) \tag{19}$$

e

$$\int_0^{t_s^{'}} SOD\, e^{K_c \sigma} d\sigma = \frac{SOD}{K_c} e^{K_c \sigma}\Big|_0^{t_s^{'}} = \frac{SOD}{K_c}\left(e^{K_c t_s^{'}} - 1\right) \tag{20}$$

sostituendo nell’eq. (18)

$$D(t_s^{'}) = D_o^{'}\, e^{-K_c t_s^{'}} + K_b B_o^{'} e^{-K_c t_s^{'}} \frac{1}{K_c - K_b}\left(e^{(K_c - K_b)t_s^{'}} - 1\right) + e^{-K_c t_s^{'}} \frac{SOD}{K_c}\left(e^{K_c t_s^{'}} - 1\right) \tag{21}$$

e raggruppando i termini si ha la soluzione

$$\boxed{D(t_s^{'}) = D_o^{'}\, e^{-K_c t_s^{'}} + \frac{K_b}{K_c - K_b} B_o^{'}\left(e^{-K_b t_s^{'}} - e^{-K_c t_s^{'}}\right) + \frac{SOD}{K_c}\left(1 - e^{K_c t_s^{'}}\right)} \tag{22}$$

Graficamente la soluzione ha l'andamento in figura. Si noti che anche nel tratto con BOD distribuito, il valore di B_d non è tale da far invertire l'andamento BDO/DO, nel senso che il BOD è comunque decrescente, mentre il DO presenta la consueta saccatura con un minimo $DO_{min} = 2.6481$ $mg\ L^{-1}$ per $t_s = 11\ h$. Successivamente, il BOD ha andamento esponenziale ed il DO crescente anch'esso con andamento esponenziale fino a raggiungere asintoticamente C_{sat}.

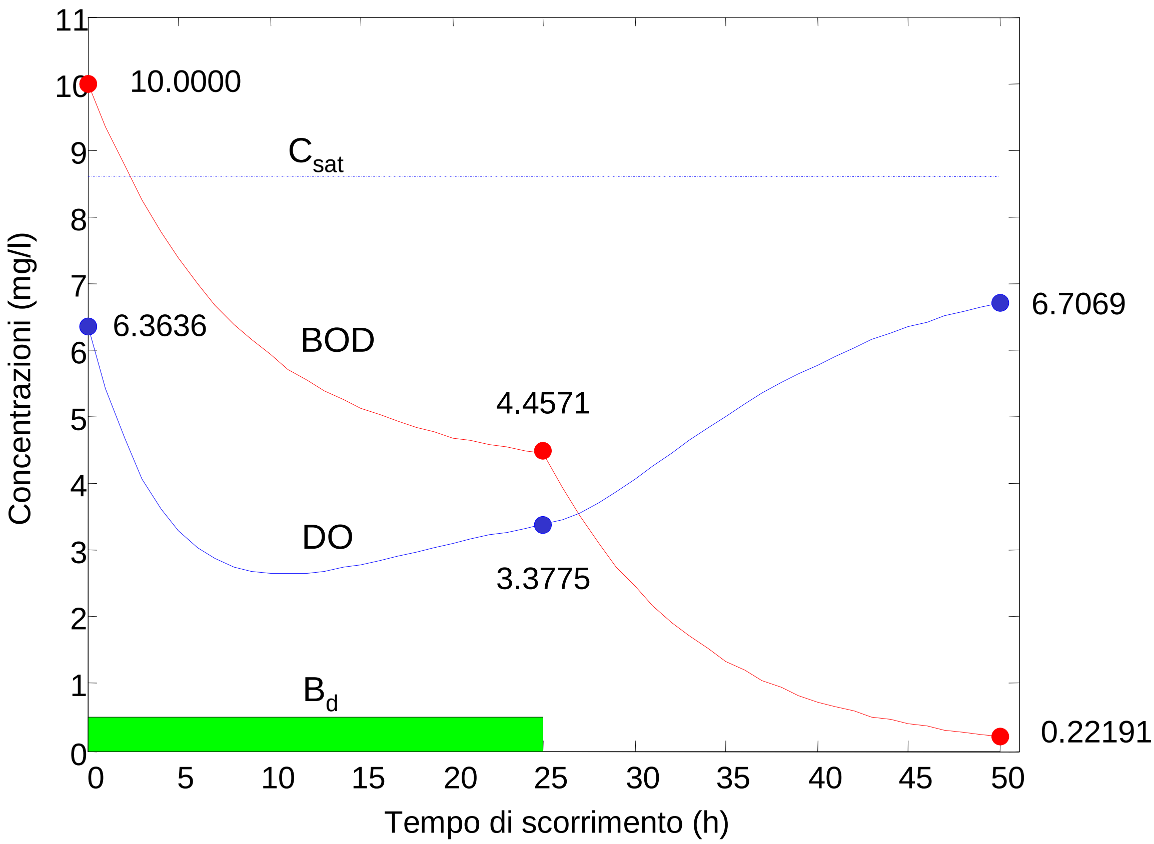
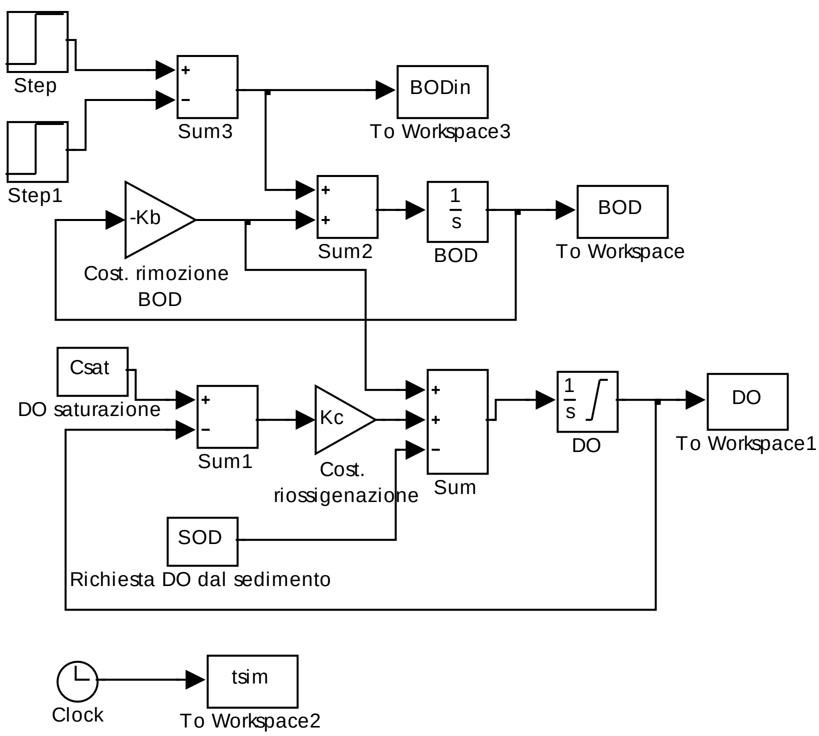
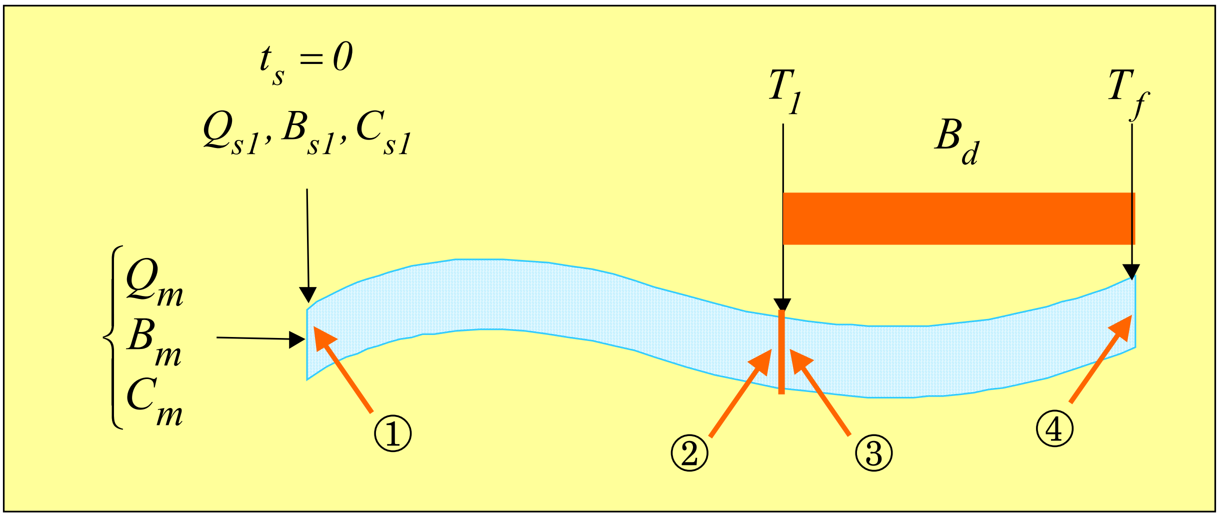


Diagramma Simulink



Es n. 4 (8 punti)

Il sistema fluviale descritto in figura consiste in uno scarico concentrato a monte, seguito da un tratto a valle dove per $T_1 < t_s \leq T_f$ è presente uno scarico di BOD distribuito B_d.



I parametri del sistema sono i seguenti:

Qualità a monte:	Scarico concentrato	Scarico distribuito	Parametri
$\begin{cases} Q_m = 5\ m^3 s^{-1} \\ B_m = 7\ mg\, L^{-1} \\ C_m = 7\ mg\, L^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_{s1} = 0.5\ m^3 s^{-1} \\ B_{s1} = 40\ mg\, L^{-1} \\ C_{s1} = 2\ mg\, L^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} T_1 = 30\ h \\ T_f = 50\ h \\ B_d = 0.5\ mg\ L^{-1}\ h^{-1} \end{cases}$	$K_b = 0.12\ h^{-1}$ $K_c = 0.15\ h^{-1}$ $C_{sat} = 8.6\ mg\ L^{-1}$

Si determini:

a) Il sistema di equazioni differenziali che definisce il modello di Streeter & Phelps per l'intero tratto fluviale;

b) L'espressione analitica dell'andamento di BOD e DO nel tratto 1 - 2, per $0 < t_s \leq T_1$;

c) L'andamento *qualitativo* di BOD e DO lungo tutto il tratto $(0 < t_s \leq T_f)$, discutendone le caratteristiche più rilevanti;

d) I valori numerici del BOD nei punti 1, 2, 3, 4 indicati in figura;

e) I valori numerici del DO nei punti 1, 2, 3 indicati in figura;

f) Lo schema Simulink per la simulazione del sistema fluviale in figura.

Svolgimento

Le equazioni differenziali che costituiscono il modello di Streeter & Phelps per l'intero tratto sono le seguenti

$$\begin{cases} BOD & \dfrac{dB}{dt} = -K_b B + B_d \\ DO & \dfrac{dC}{dt} = K_c\left(C_{sat} - C\right) - K_b B \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} B_d = 0 & 0 < t_s \le T_1 \\ B_d \neq 0 & T_1 < t_s \le T_f \end{cases} \tag{1}$$

a) Nel tratto 1 - 2 l'equazione del BOD non ha ingresso $\left(B_d = 0\right)$ perciò si integra facilmente ottenendo

$$B(t_s) = B_o\, e^{-K_b t_s} \quad \forall\ t_s \in \left(0, T_1\right) \tag{2}$$

L'equazione del DO *nel tratto iniziale, prima dello scarico distribuito, per* $0 < t_s \le T_1$ si risolve considerando il BOD $B(t_s)$ come forzante ed introducendo come variabile il deficit $D(t) = C_{sat} - C(t) \ \Rightarrow\ \dfrac{dD}{dt} = -\dfrac{dC}{dt}$, ottenendo

$$D(t_s) = D_o e^{-K_c t_s} + K_b \int_0^{t_s} e^{-K_c\left(t_s - \sigma\right)} B_o e^{-K_b \sigma}\, d\sigma \tag{3}$$

da cui si ricava la soluzione

$$C(t_s) = C_{sat} - \left(C_{sat} - C_o\right) e^{-K_c t_s} + \frac{K_b B_o}{\left(K_c - K_b\right)} \cdot \left[\ e^{-K_c t_s} - e^{-K_b t_s}\ \right] \quad \forall\ t_s \in \left(0, T_1\right) \tag{4}$$

Per il tratto successivo $T_1 < t_s \le T_f$ l'equazione del BOD si può integrare con lo stesso metodo della (3) considerando il forzante costante B_d,

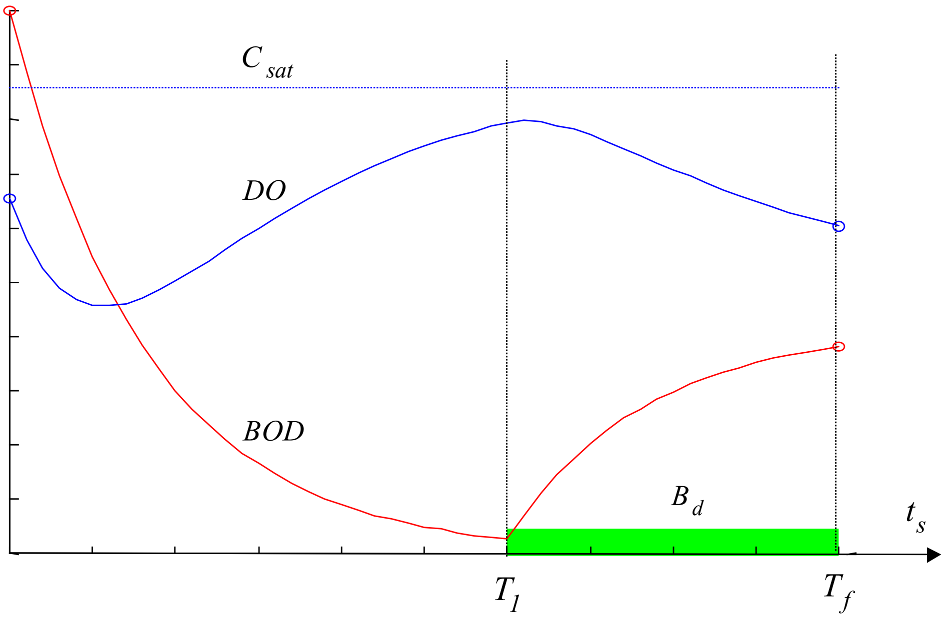
$$B(t_s) = B(T_1) e^{-K_b t_s} + \int_0^{t_s} B_d e^{-K_b\left(t_s - \sigma\right)} d\sigma \quad \forall\ t_s \in \left(0, T_f - T_1\right) \tag{5}$$

risolvendo l'integrale di convoluzione si ottiene

$$B(t_s) = B(T_1) e^{-K_b t_s} + \frac{B_d}{K_b}\left(1 - e^{-K_b t_s}\right) \quad \forall\ t_s \in \left(0, T_f - T_1\right) \tag{6}$$

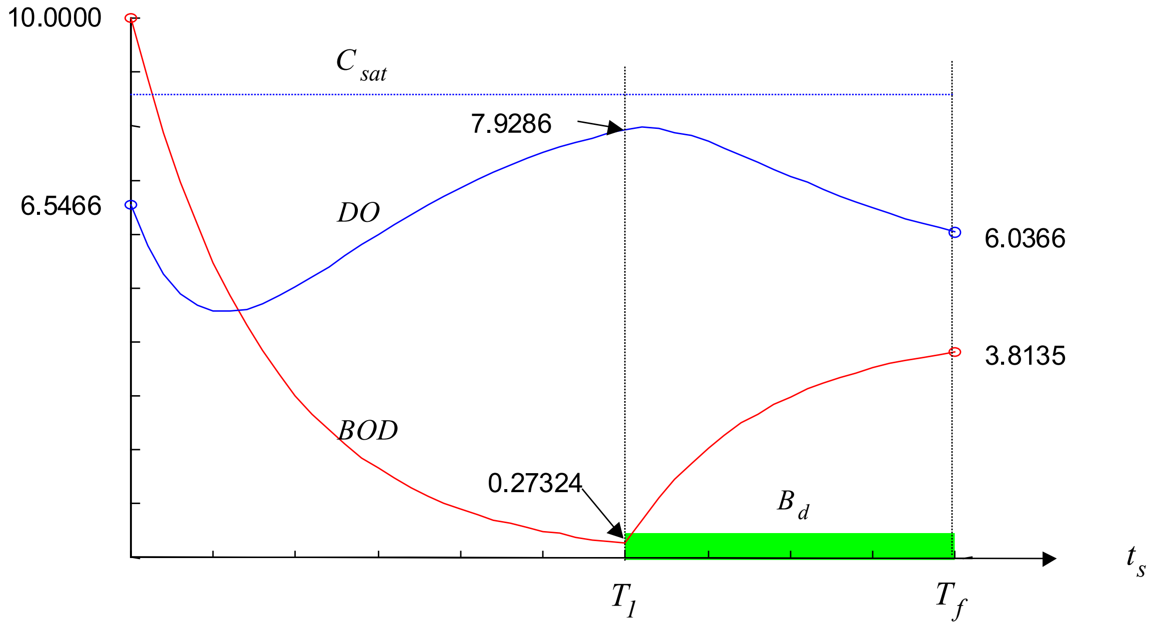
Per il tratto 2 - 3 non è possibile risolvere analiticamente l'equazione del DO, perché il termine forzante del BOD, dato dalla eq. (6), non è costante e pertanto l'integrale di convoluzione non è facilmente risolvibile in termini analitici.

c) L'andamento qualitativo di BOD e DO per l'intero tratto è riportato nella figura seguente

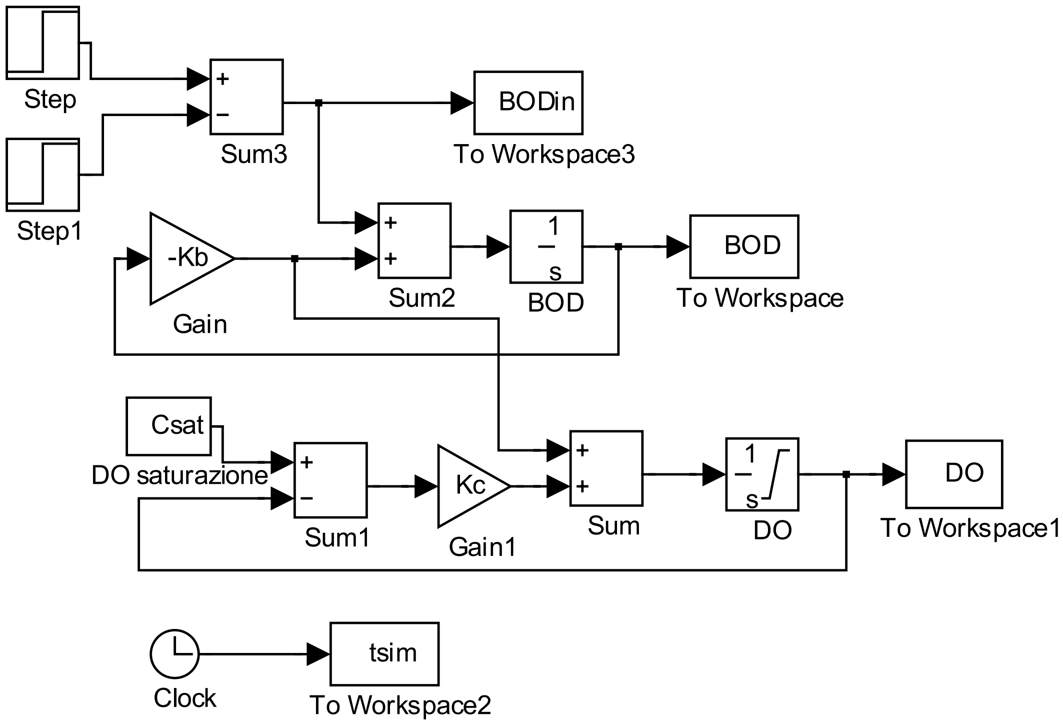


L'andamento fino a T_1 è quello classico, con decremento esponenziale per il BOD e saccatura del DO. Al contrario, nel tratto con ingresso distribuito, il BOD ***sale con andamento esponenziale*** secondo l'eq. (6), contemporaneamente il ***DO diminuisce*** a causa del consumo distribuito, che in questo caso è maggiore della corrispondente riossigenazione. E' importante notare che, diversamente al caso di scarichi concentrati, ***fra i punti 2 e 3 non ci sono discontinuità*** né per il BOD né per il DO. Inoltre, se la situazione di scarico distribuito costante B_d continuasse indefinitamente a valle, il BOD si attesterebbe al valore costante $\frac{B_d}{K_b} = 4.1\overline{6}\ mg/L$, ottenibile facendo tendere t_s all'infinito nella (6).

d, e) I valori numerici nei punti 1 - 4 sono riportati in figura, si noti che in questo caso non c'è discontinuità fra i punti 2 e 3 che pertanto hanno gli stessi valori.



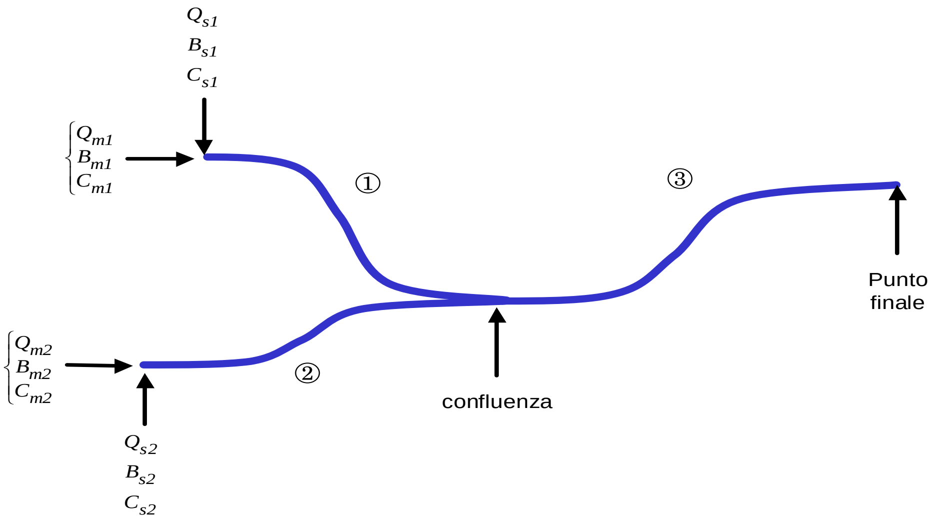
g) Lo schema simulink è riportato in figura



Il BOD distribuito è stato ottenuto per sottrazione di due funzioni step, ambedue con ampiezza B_d, il primo con inizio a tempo T_1, mentre il secondo inizia al tempo T_f, in modo da cancellare il primo. In questo caso, dato che T_f è anche il tempo finale, il secondo step non è strettamente necessario. Lo sarebbe se a valle di T_f ci fosse un ulteriore tratto senza scarichi, né concentrati né distribuiti.

L'integratore del DO e del tipo a saturazione, con valore inferiore pari a 0 in modo da evitare valori negativi del DO nel caso che il carico di BOD fosse tale da forzare la dinamica verso questa zona.

Sia dato il sistema fluviale in figura, composto da due affluenti (1 e 2) che si incontrano nel punto di confluenza indicato per poi proseguire in un unico alveo (3). Per tutto il sistema si suppone nulla la diffusione (D = 0), $C_{sat} = 8\, mg\, L^{-1}$ e le costanti cinetiche valgono $K_b = 0.12\, h^{-1}$ $\quad K_c = 0.15\, h^{-1}$.



Nel punto di monte di ciascuno dei due tratti si trova uno scarico concentrato. I valori della qualità a monte dei due tratti, quelli dei rispettivi scarichi ed i tempi di scorrimento dei tre tratti sono dati in tabella

$$\begin{cases} Q_{m1} = 10\ m^3/s \\ B_{m1} = 7\ mg/L \\ C_{m1} = 7\ mg/L \end{cases} \quad \begin{cases} Q_{s1} = 0.5\ m^3/s \\ B_{s1} = 30\ mg/L \\ C_{s1} = 0\ mg/L \end{cases} \quad \begin{cases} Q_{m2} = 5\ m^3/s \\ B_{m2} = 7\ mg/L \\ C_{m2} = 7\ mg/L \end{cases} \quad \begin{cases} Q_{s2} = 0.25\ m^3/s \\ B_{s2} = 40\ mg/L \\ C_{s2} = 0\ mg/L \end{cases} \quad \begin{cases} t_{s1} = 12\, h \\ t_{s2} = 15\, h \\ t_{s3} = 20\, h \end{cases}$$

si determini:

a) Il modello di Streeter & Phelps per l'intero sistema fluviale

b) Il valore del BOD e dell'Ossigeno Disciolto alla confluenza ed al punto finale.

La generica soluzione delle equazioni di Streeter & Phelps è

$$B(t_s) = B_{oi}\, e^{-K_b t_s}$$

$$C(t_s) = C_{sat} - \left(C_{sat} - C_{oi}\right) e^{-K_c t_s} + \frac{K_b B_{oi}}{\left(K_c - K_b\right)} \cdot \left[e^{-K_c t_s} - e^{-K_b t_s} \right] \qquad i = 1{,}2{,}confluenza$$

Dove le condizioni iniziali sono ricavate dalle diluizione a valle di ciascuno scarico concentrato. nel caso in esame esse valgono

A monte del tratto 1	A monte del tratto 2
$B_{o1} = \dfrac{B_{m1}Q_{m1} + Q_{s1}B_{s1}}{Q_{m1} + Q_{s1}} \quad C_{o1} = \dfrac{C_{m1}Q_{m1}}{Q_m 1 + Q_{s1}}$	$B_{o2} = \dfrac{B_{m2}Q_{m2} + Q_{s2}B_{s2}}{Q_{m2} + Q_{s2}} \quad C_{o2} = \dfrac{C_{m2}Q_{m2}}{Q_{m2} + Q_{s2}}$

A questo punto si integrano i due tratti 1 e 2 per ottenere i singoli contributi alla confluenza

Contributo del tratto 1:

$$B(t_{s1}) = B_{o1}\, e^{-K_b t_{s1}}$$

$$C(t_{s1}) = C_{sat} - \left(C_{sat} - C_{o1}\right) e^{-K_c t_{s1}} + \frac{K_b B_{o1}}{\left(K_c - K_b\right)} \cdot \left[\, e^{-K_c t_{s1}} - e^{-K_b t_{s1}} \,\right]$$

Contributo del tratto 2:

$$B(t_{s2}) = B_{o2}\, e^{-K_b t_{s2}}$$

$$C(t_{s2}) = C_{sat} - \left(C_{sat} - C_{o2}\right) e^{-K_c t_{s2}} + \frac{K_b B_{o2}}{\left(K_c - K_b\right)} \cdot \left[\, e^{-K_c t_{s2}} - e^{-K_b t_{s2}} \,\right]$$

Per trovare le condizioni iniziali per il tratto comune (3) si calcola il mescolamento delle due correnti

$$B_{o3} = \frac{B(t_{s1})\left(Q_{m1} + Q_{s1}\right) + B(t_{s2})\left(Q_{m2} + Q_{s2}\right)}{Q_{m1} + Q_{s1} + Q_{m2} + Q_{s2}} \quad C_{o3} = \frac{C(t_{s1})\left(Q_{m1} + Q_{s1}\right) + C(t_{s2})\left(Q_{m2} + Q_{s2}\right)}{Q_{m1} + Q_{s1} + Q_{m2} + Q_{s2}}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

Condizioni iniziali tratto 1	Condizioni iniziali tratto 2	Condizioni finali tratto 1	Condizioni finali tratto 2	Condizioni iniziali confluenza	Condizioni finali
$B_{o1} = 8.0952$	$B_{o2} = 8.5714$	$B(t_{s1}) = 1.9179$	$B(t_{s2}) = 1.4168$	$B_{o3} = 1.7508$	$B_{fin} = 0.1588$
$C_{o1} = 6.6667$	$C_{o2} = 6.6667$	$C(t_{s1}) = 5.4602$	$C(t_{s2}) = 5.8058$	$C_{o3} = 5.5706$	$C_{fin} = 7.5920$