

# Esercitazione di Analisi dei Sistemi Ambientali

Preparazione per il compito intermedio 18 Aprile 2008

A.A. 2007 – 2008

Y Dato il sistema tempo-discreto  $\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.15 & -0.2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times u$ , determinare:

- 1) Gli autovalori del sistema e dire se il sistema è stabile
- 2) Indicare qualitativamente il tipo di risposta attesa dal sistema nel caso autonomo ( $u = 0$ )
- 3) Diagonalizzare il sistema, individuando un'opportuna matrice di similitudine  $P$
- 4) Determinare il valore di equilibrio dello stato quando il sistema è sottoposto ad un ingresso costante  $u^* = 3.15$ .

*Svolgimento:*

1. Essendo il sistema 2x2, in forma canonica controllabile, si vede direttamente che i termini dell'ultima riga valgono in questo caso  $a_{21} = -\lambda_1\lambda_2$  e  $a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ . Perciò gli autovalori si possono ricavare risolvendo l'equazione di secondo grado

$s^2 + 0.2s - 0.15 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -0.5 \quad \lambda_2 = 0.3$ . Essendo entrambi gli autovalori compresi nel cerchio unitario, il sistema è asintoticamente stabile;

2. Essendo uno degli gli autovalori di segno negativo, esso darà luogo ad una risposta oscillatoria, ovviamente smorzata a causa del suo modulo minore di 1;
3. Essendo  $A$  in forma canonica controllabile, la matrice di similitudine  $P$  che la trasforma nella

diagonale è la seguente  $P = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$ . Per ottenere la similitudine

$A = P^{-1}AP$  si deve preliminarmente invertire  $P$ , ottenendo  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.375 & -1.25 \\ 0.625 & 1.25 \end{bmatrix}$ . Si ha così la

forma diagonale cercata

$$A = \begin{bmatrix} 0.375 & -1.25 \\ 0.625 & 1.25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.15 & -0.2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

4. Il sistema a regime con ingresso dato  $u^*$  ha la seguente espressione  $x = Ax + bu^*$  da cui si ricava lo stato a regime  $x^*$  come  $x^* = (I - A)^{-1}bu^*$ . Si calcola per prima cosa la matrice  $(I - A)^{-1}$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.15 & 1.2 \end{bmatrix} \rightarrow (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.1429 & 0.9524 \\ 0.1429 & 0.9524 \end{bmatrix} \text{ da cui}$$

$$x^* = (I - A)^{-1}bu^* = \begin{bmatrix} 1.1429 & 0.9524 \\ 0.1429 & 0.9524 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 3.15 = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 3.0 \end{bmatrix}$$

## Popolazione con struttura di età

Una scuola media si compone di tre classi. I nuovi iscritti possono accedere solo alla prima classe e si suppone che nessuno si iscriva alle altre classi. Inoltre, per ogni anno si ha una percentuale di bocciati  $b = 0.1$ . In queste ipotesi, trovare:

1. il modello del sistema con scala dei tempi pari a 1 anno;
2. gli autovalori del sistema
3. l'espressione del numero dei diplomati alla fine del terzo anno  $y_t$ .
4. il valore stazionario dei diplomati dopo alcuni anni nell'ipotesi che ogni anno ci siano 20 nuovi iscritti alla prima classe.

*Svolgimento:*

1. Dalla definizione che si è data del sistema, si possono scrivere direttamente le equazioni che descrivono l'evoluzione della popolazione scolastica notando che in ogni classe saranno presenti i bocciati di quella classe dell'anno precedente e i promossi dalla classe precedente.

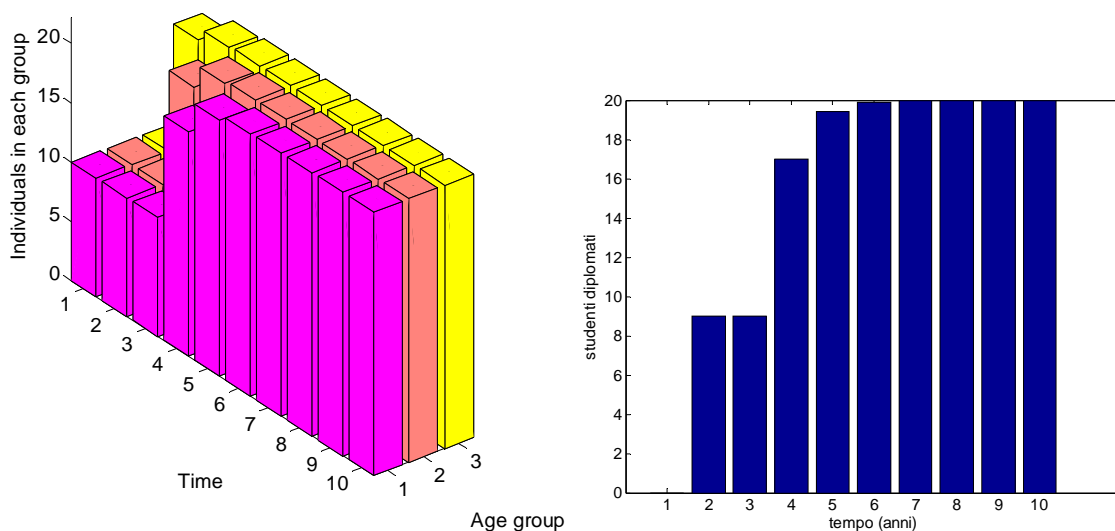
$$\begin{aligned} x_1^{t+1} &= bx_1^t + u_t \\ x_2^{t+1} &= (1-b)x_1^t + bx_2^t \\ x_3^{t+1} &= (1-b)x_2^t + bx_3^t \end{aligned} \quad \text{e in forma matriciale} \quad \begin{bmatrix} x_1^{t+1} \\ x_2^{t+1} \\ x_3^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 1-b & b & 0 \\ 0 & 1-b & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_t$$

2. Sostituendo il valore di  $b$  si ottiene la matrice di sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

da cui si nota "a vista" che  $A$  ha tre autovalori coincidenti pari a 0.1, perciò il sistema sarà stabile e non oscillatorio. Ovviamente, in mancanza di nuovi iscritti il sistema si estingue. Con i dati del problema, l'andamento nel tempo della popolazione nelle tre classi è quella di figura.

Leslie model for age-group population



3. L'uscita del sistema è data dalla frazione dei promossi del terzo anno, ovvero  $1-b$ , della componente  $x_3$ , relativa all'ultimo anno, perciò  $y_t = [0 \ 0 \ 1-b] \times x_t$ , come in figura a destra.

4. A questa domanda si può rispondere in tre modi:

- a. Iterando il sistema  $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}u_t$  fino a che non si stabilizza; in tal caso si otterrebbe la sequenza di stati seguente, partendo da una popolazione di 10 alunni per ciascuna classe

| anni  | 1      | 2      | 3       | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
|-------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x_1$ | 10.000 | 21.000 | 22.100  | 22.210 | 22.221 | 22.222 | 22.222 | 22.222 | 22.222 | 22.222 |
| $x_2$ | 10.000 | 10.000 | 19.900  | 21.880 | 22.177 | 22.216 | 22.221 | 22.222 | 22.222 | 22.222 |
| $x_3$ | 10.000 | 10.000 | 10.0000 | 18.910 | 21.583 | 22.117 | 22.206 | 22.220 | 22.222 | 22.222 |

- b. Si può trovare direttamente lo stato di regime ricordando che in questa condizione l'equazione di stato si semplifica in  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\bar{u}$ , dove l'indice tempo è stato ommesso perché non più significativo e  $\bar{u}$  è il valore costante dell'ingresso. Risolvendo per  $\mathbf{x}$  si ottiene  $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\bar{u}$ .

Calcolando a parte  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.111 & 0 & 0 \\ 1.111 & 1.111 & 0 \\ 1.111 & 1.111 & 1.111 \end{bmatrix}$  si ottiene

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1.111 & 0 & 0 \\ 1.111 & 1.111 & 0 \\ 1.111 & 1.111 & 1.111 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 20 = \begin{bmatrix} 22.222 \\ 22.222 \\ 22.222 \end{bmatrix}$$

- c. Essendo il sistema stabile, la matrice di transizione  $\mathbf{A}^t$  tenderà a  $\mathbf{0}$  per  $t$  crescente, perciò lo stato sarà determinato solamente dell'ingresso e non più dalle condizioni iniziali, ovvero

$$\bar{\mathbf{x}} = \dots + \mathbf{A}^5 \mathbf{b}\bar{u} + \mathbf{A}^4 \mathbf{b}\bar{u} + \mathbf{A}^3 \mathbf{b}\bar{u} + \mathbf{A}^2 \mathbf{b}\bar{u} + \mathbf{A} \mathbf{b}\bar{u} + \mathbf{I} \mathbf{b}\bar{u} = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{A}^{i-1} \right) \mathbf{b}\bar{u}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \left( \dots + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}^3 + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 20 \\ &= \left( \dots + \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0.027 & 0.001 & 0 \\ 0.243 & 0.027 & 0.001 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0.18 & 0.01 & 0 \\ 0.81 & 0.18 & 0.01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 20 \\ &= \begin{bmatrix} 1.111 & 0 & 0 \\ 1.111 & 1.111 & 0 \\ 1.111 & 1.111 & 1.111 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 20 = \begin{bmatrix} 22.222 \\ 22.222 \\ 22.222 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Y Dato un sistema tempo – continuo definito dalle tre matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{c} = [1 \quad 1]$$

Determinare:

- gli autovalori del sistema
- discuterne la stabilità
- la matrice di similitudine verso la forma diagonale
- la matrice esponenziale  $e^{At}$
- l'espressione dell'uscita  $y(t)$  a partire da uno stato iniziale  $\mathbf{x}_0 = [1 \quad 1]^T$

*Svolgimento:*

- Essendo il sistema del secondo ordine, gli autovalori si determinano facilmente trovandole radici del polinomio caratteristico, che ha la forma  $s^2 + 4s + 5$ , ottenendo  $\lambda = -2 \pm j1$  ricordando che nel caso di radici complesse coniugate  $\lambda = a \pm jb$  il polinomio caratteristico ha la forma  $s^2 + 2as + (a^2 + b^2)$ . Si tratta perciò di una coppia di autovalori complessi coniugati con parte reale negativa.
- Avendo gli autovalori parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile e l'equilibrio verrà raggiunto in modo oscillatorio.
- Essendo la matrice  $A$  in forma canonica controllabile, la matrice di similitudine  $P$  tale che  $A = PAP^{-1}$  ha per colonne le potenze crescenti degli autovalori, perciò

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \text{ Inoltre, per trovare la sua inversa si ricordi che data } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ la sua inversa è}$$

$$\text{data da } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Formalmente la matrice esponenziale 2x2 si può indicare così

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

In questo caso si ha che  $\det(P) = -j2$ . Perciò l'inversa sarà

$$P^{-1} = \frac{1}{-j2} \begin{bmatrix} -2-j & -1 \\ 2-j & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5-j & -j0.5 \\ 0.5+j & j0.5 \end{bmatrix}.$$

Come riprova, applicando la similitudine  $A = P^{-1}AP$  si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 + j1 & -2 - j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.5 - j & -j0.5 \\ 0.5 + j & j0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + j & 0 \\ 0 & -2 - j \end{bmatrix}$$

d) La matrice esponenziale si trova esponenziando la matrice diagonale ed applicandovi la stessa similitudine  $e^{At} = P e^{At} P^{-1}$ . Sostituendo

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 + j1 & -2 - j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{(-2+j)t} & 0 \\ 0 & e^{(-2-j)t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.5 - j & -j0.5 \\ 0.5 + j & j0.5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-0.5 - j)e^{(-2+j)t} + (0.5 + j)e^{(-2-j)t} & -j0.5e^{(-2+j)t} + j0.5e^{(-2-j)t} \\ (-2 + j)(-0.5 - j)e^{(-2+j)t} + (-2 - j)(0.5 + j)e^{(-2-j)t} & (-2 + j)(-j0.5)e^{(-2+j)t} + j0.5(-2 - j)e^{(-2-j)t} \end{bmatrix}$$

semplificando

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (0.5 - j)e^{(-2+j)t} + (0.5 + j)e^{(-2-j)t} & -j0.5e^{(-2+j)t} + j0.5e^{(-2-j)t} \\ j2.5e^{(-2+j)t} - j2.5e^{(-2-j)t} & (0.5 + j)e^{(-2+j)t} + (0.5 - j)e^{(-2-j)t} \end{bmatrix}$$

L'uscita a partire dallo stato iniziale  $x_o = [1 \quad 1]^T$  è data da

$$y(t) = c \cdot e^{At} \cdot x_o$$

$$= [1 \quad 1] \times \begin{bmatrix} (0.5 - j)e^{(-2+j)t} + (0.5 + j)e^{(-2-j)t} & -j0.5e^{(-2+j)t} + j0.5e^{(-2-j)t} \\ j2.5e^{(-2+j)t} - j2.5e^{(-2-j)t} & (0.5 + j)e^{(-2+j)t} + (0.5 - j)e^{(-2-j)t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

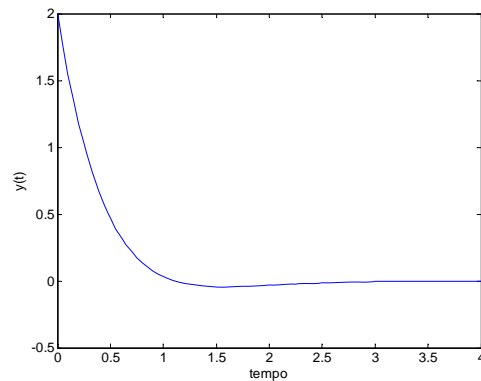
$$= (1 + j0.5)e^{(-2+j)t} + (1 - j0.5)e^{(-2-j)t}$$

Raccogliendo i termini reali e immaginari si ha

$$y(t) = e^{(-2+j)t} + e^{(-2-j)t} + j0.5(e^{(-2+j)t} - e^{(-2-j)t})$$

$$= e^{-2t}(e^{jt} + e^{-jt}) - \frac{1}{2j}e^{-2t}(e^{jt} - e^{-jt})$$

$$= e^{-2t}(2 \cos(t) - \sin(t))$$



¶ Dato un sistema tempo – continuo definito dalle tre matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{c} = [1 \quad 1]$$

Determinare:

- gli autovalori del sistema
- discuterne la stabilità
- la matrice di similitudine verso la forma diagonale
- la matrice esponenziale  $e^{\mathbf{A}t}$
- l'espressione dell'uscita  $y(t)$  a partire da uno stato iniziale  $\mathbf{x}_o = [1 \quad 1]^T$

*Svolgimento:*

Il polinomio caratteristico è  $s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2 \rightarrow \lambda = -1$  perciò l'autovalore a -1 è doppio. il sistema è asintoticamente stabile.

In questo caso la diagonalizzazione della matrice  $\mathbf{A}$  va effettuata con la decomposizione di Jordan. Per una matrice 2x2, in generale si ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 - 2\lambda s + \lambda^2 = (s - \lambda)^2.$$

Nell'ipotesi che l'autovalore doppio sia anche l'unico, la decomposizione in blocco di Jordan  $\mathbf{J}$  e la matrice di similitudine  $\mathbf{P}$  e la sua inversa  $\mathbf{P}^{-1}$  sono rispettivamente

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

Perciò la matrice esponenziale è

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}t} \mathbf{P}^{-1} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 - \lambda t & t \\ -\lambda^2 t & 1 + \lambda t \end{bmatrix}$$

Partendo da uno stato iniziale  $\mathbf{x}_o = [1 \quad 1]^T$  l'evoluzione è data da

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_o = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 - \lambda t & t \\ -\lambda^2 t & 1 + \lambda t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 - \lambda t + t \\ 1 + \lambda t - \lambda^2 t \end{bmatrix} = \begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t} (1 - \lambda t + t) \\ x_2(t) = e^{\lambda t} (1 - \lambda^2 t + \lambda t) \end{cases}$$

$$y(t) = \mathbf{c} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_o = [1 \quad 1] e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 - \lambda t & t \\ -\lambda^2 t & 1 + \lambda t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} [1 \quad 1] \times \begin{bmatrix} 1 - \lambda t + t \\ 1 + \lambda t - \lambda^2 t \end{bmatrix}$$

$$= e^{\lambda t} (1 - \lambda t + t + 1 - \lambda^2 t + \lambda t) = e^{\lambda t} (2 + t - \lambda^2 t)$$

Sostituendo il valore di  $\lambda = -1$  si ottiene  $y(t) = 2e^{-t}$ , perciò in questo caso pur essendo l'autovalore doppio, non si ha un termine lineare nel tempo. Se però fosse stato dato ad es.  $\lambda = -0.5$ , si sarebbe avuto  $y(t) = e^{-t} (2 + 0.75t)$ .

Y Dato un sistema tempo – continuo definito dalle tre matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2.5 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{c} = [1 \quad 1]$$

Determinare:

- gli autovalori del sistema
- discuterne la stabilità
- la matrice di similitudine verso la forma diagonale
- la matrice esponenziale  $e^{At}$
- la risposta impulsiva dell'uscita  $y(t)$

*Svolgimento:*

Il polinomio caratteristico è  $s^2 + 2.5s + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -0.5; \lambda_2 = -2$  perciò essendo ambedue gli autovalori a parte reale negativa il sistema è asintoticamente stabile.

Per calcolare la risposta impulsiva, è necessario prima calcolare la matrice esponenziale  $e^{At}$  e perciò anche la matrice di similitudine con la forma diagonale. Essendo nota la struttura della matrice di similitudine fra la forma diagonale e la forma canonica controllabile (matrice di Vandermonde), si ha

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Sostituendo i valori di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  si ha

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2e^{-0.5t} + 0.5e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-0.5t} \\ e^{-0.5t} - e^{-2t} & -2e^{-2t} + 0.5e^{-0.5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-0.5t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-0.5t} \\ -\frac{2}{3}e^{-0.5t} + \frac{2}{3}e^{-2t} & \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-0.5t} \end{bmatrix}$$

La risposta impulsiva ha espressione  $h(t) = \mathbf{c} \cdot e^{At} \cdot \mathbf{b}$ , perciò sostituendo l'espressione della matrice esponenziale ed i valori delle matrici  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{b}$  si ottiene

$$h(t) = [1 \quad 1] \times \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-0.5t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-0.5t} \\ -\frac{2}{3}e^{-0.5t} + \frac{2}{3}e^{-2t} & \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-0.5t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}e^{-0.5t} + \frac{2}{3}e^{-2t}$$

