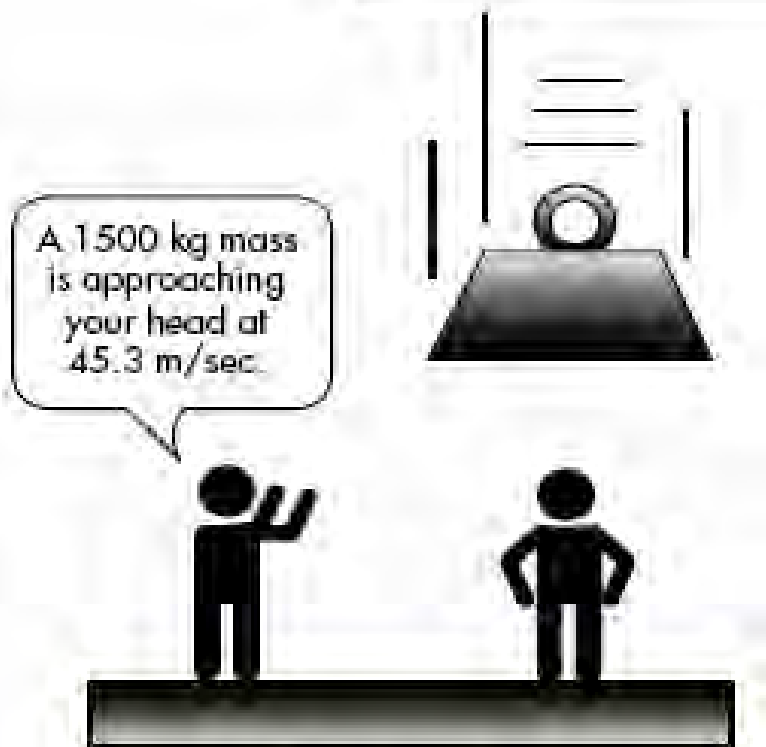


FUZZY SETS

*Ragionamento approssimato con
concetti definiti in modo vago*

E' più importante la precisione o il significato?

Precision and Significance in the Real World



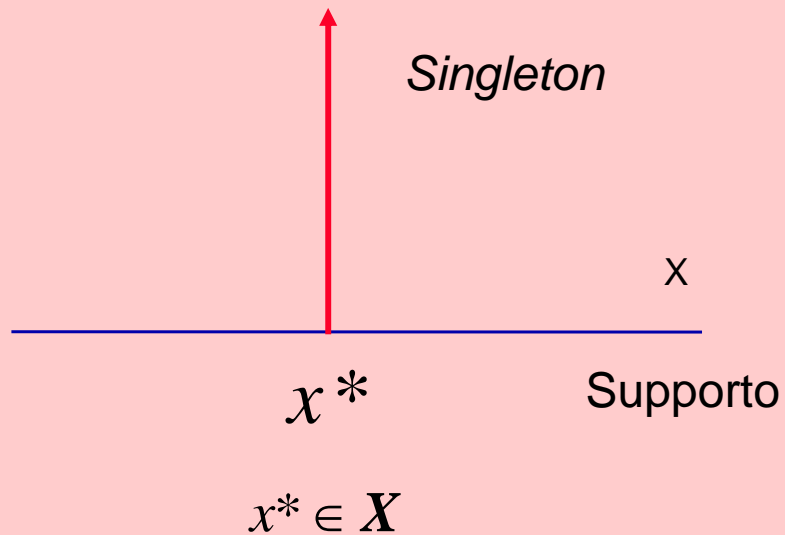
Precision



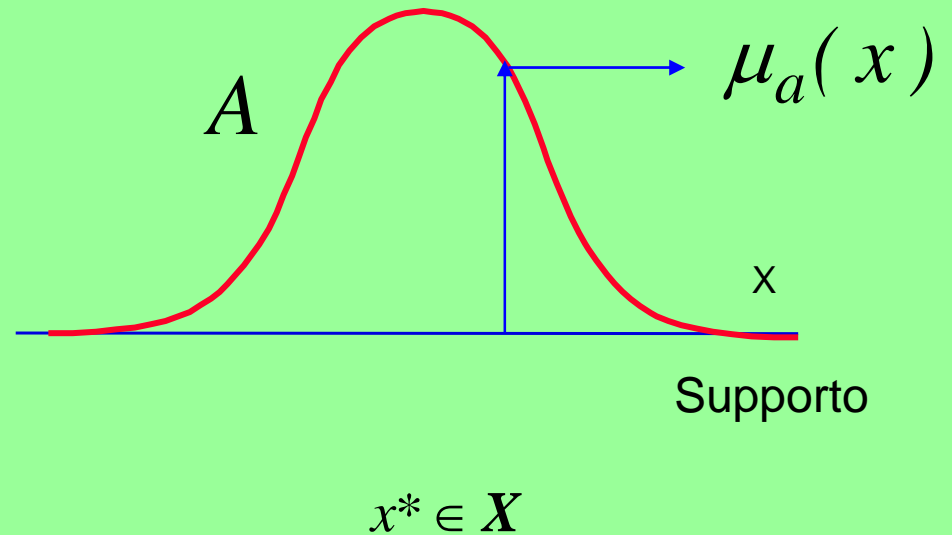
Significance

Valori *Crisp* e Fuzzy Sets

Rappresentazione
deterministica
(singleton)

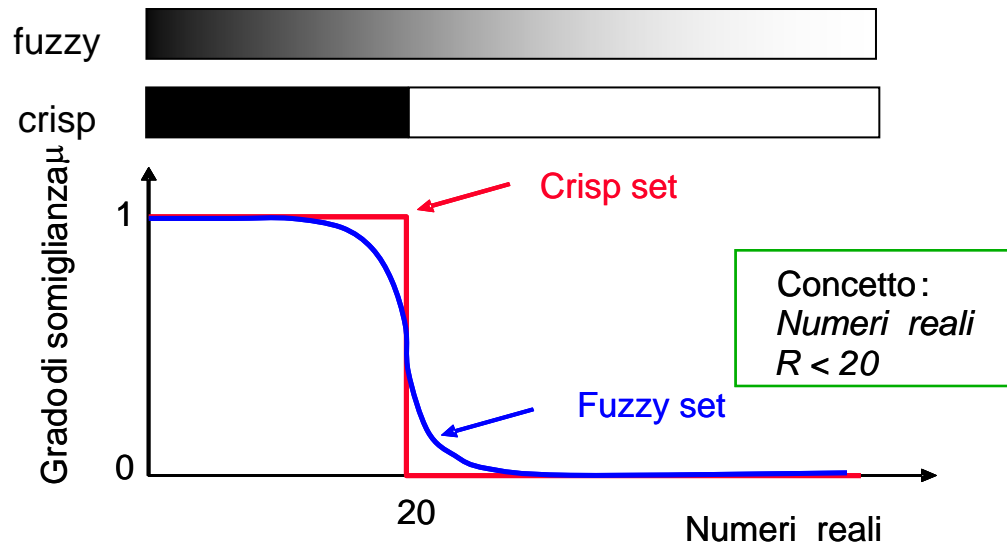


Fuzzy set



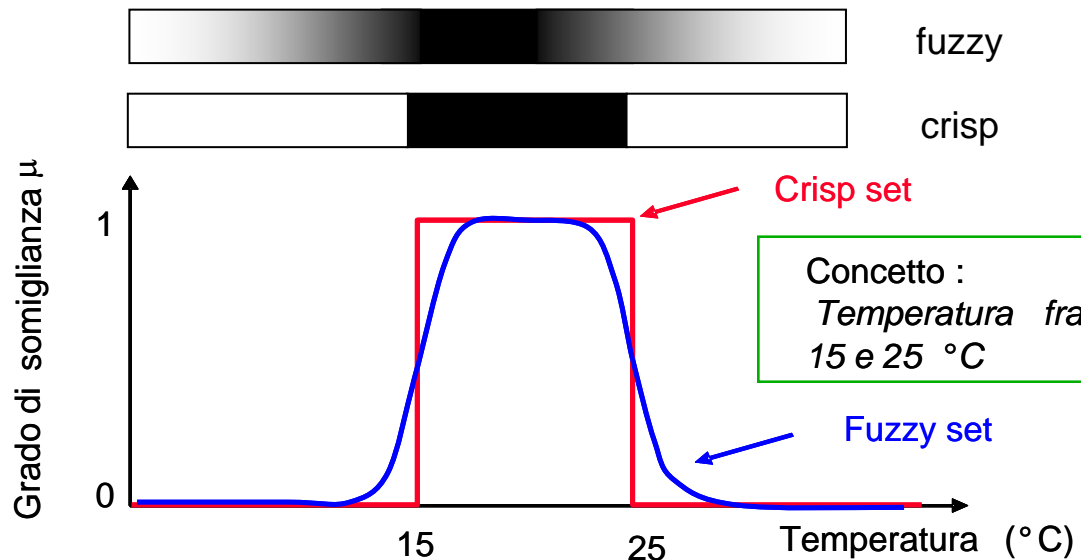
$$X \mapsto A : x \rightarrow \mu_a(x)$$

La logica Fuzzy introduce il *grado di somiglianza*



Il ragionamento “crisp” opera solamente con i concetti di **uguale** o **diverso** (*non uguale*)

Il ragionamento “fuzzy” introduce la nozione di **“grado di somiglianza”** come appartenenza di un concetto ad un *prototipo* predefinito che ha la funzione di termine di paragone

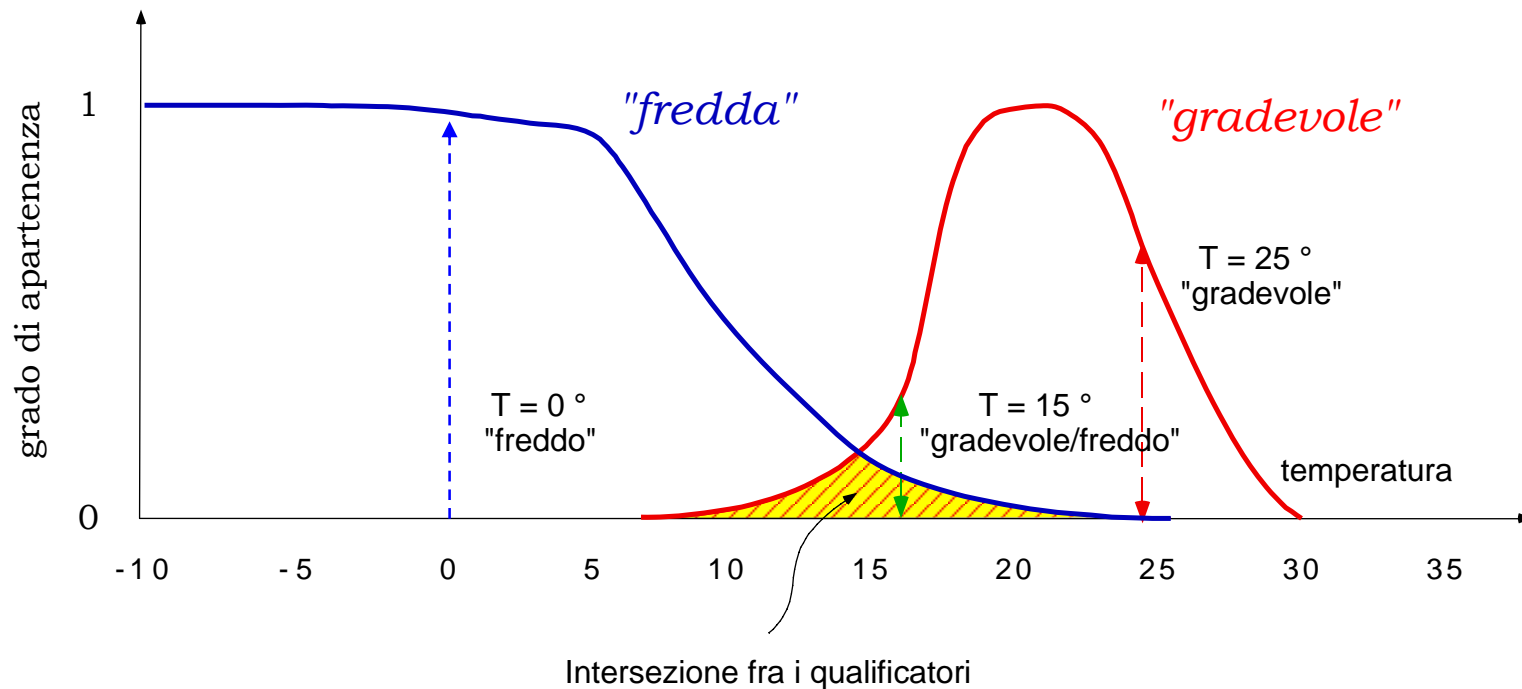


Perciò il risultato hard *vero/falso* si “ammorbidisce” nel grado di appartenenza, che può assumere qualsiasi valore fra 0 e 1 con continuità

Le **curve blu** rappresentano i *prototipi* corrispondenti ai concetti espressi nelle scatole verdi

Creazione Empirica dei Qualificatori

Dato l'insieme di supporto delle temperature ambientali definire i qualificatori di temperatura "gradevole" e "fredda"



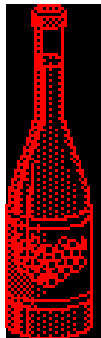
- ☞ Ciascun qualificatore deve valere 1 per almeno un valore del supporto (**Normalità**)
- ☞ L'insieme dei qualificatori deve coprire l'intero supporto (**Completezza**)
- ☞ Ci possono essere delle sovrapposizioni (**Ambiguità**)

FUZZY vs. PROBABILITY

La Fuzziness esprime il grado di verità di un oggetto rispetto ad un concetto predefinito, basato su una *esperienza diretta*, mentre la probabilità esprime *l'eventualità* che un evento futuro possa o non possa accadere.

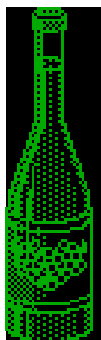


Bezdek, 1991



A: Potabile con
fuzziness = 0.9

*Da quale bottiglia
preferireste bere?*



B: Potabile con
probabilità = 0.9

Il contenuto della bottiglia è “simile” ad acqua potabile con “somiglianza pari a 90%. Questa è un'affermazione basata su una *reale confronto* fra il contenuto di *quella* bottiglia ed un'acqua potabile di riferimento. Questa è una certezza!

C'è una probabilità su 10 che il contenuto della bottiglia *NON* sia potabile !!!
Questa è un'affermazione basata su un test statistico, che basandosi *induttivamente* su un gran numero di test (*ma non su quella bottiglia!*), tenta di inferire il contenuto di quella bottiglia. Non c'è alcuna certezza circa il reale contenuto di *quella* bottiglia!

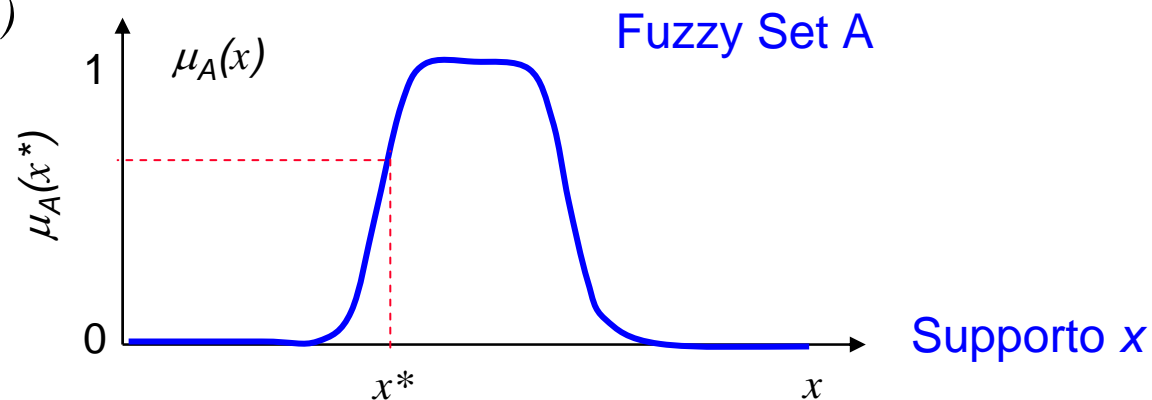
Definizioni di base dei Fuzzy Sets

- 👉 **Supporto:** l'intervallo $X \in \mathcal{R}$ di interesse per la variabile indipendente x
- 👉 **Funzione di appartenenza:** la funzione $\mu(x)$ che fornisce il **grado di verità** per ciascun valore di $x \in X$. Tale funzione definisce operativamente il fuzzy set A come

$$A = \{ \mu_A(x) : X \rightarrow (0,1) \}$$

- 👉 Il fuzzy set generalizza il concetto di appartenenza (*grado di verità*) graduandolo attraverso la funzione di appartenenza $\mu(x)$
- 👉 Dato un supporto X , un fuzzy set A su X è definito dalla funzione di appartenenza $\mu(x)$ che associa ciascun elemento di $x \in X$ ad un grado di verità associato al Fuzzy Set A attraverso $\mu(x)$

Funzione di appartenenza
 $\mu(x)$

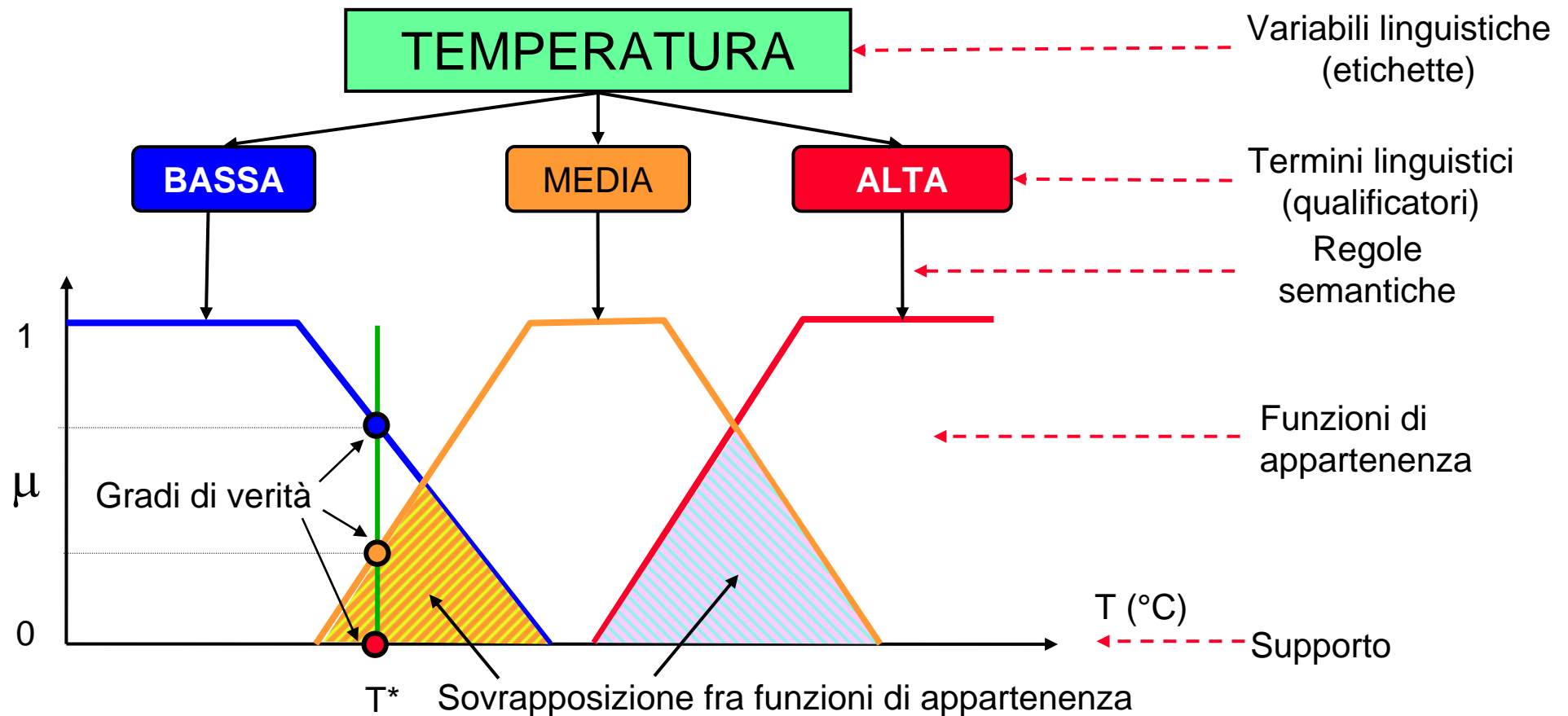


Variabili linguistiche

Una variabile linguistica è un'etichetta che definisce un concetto.

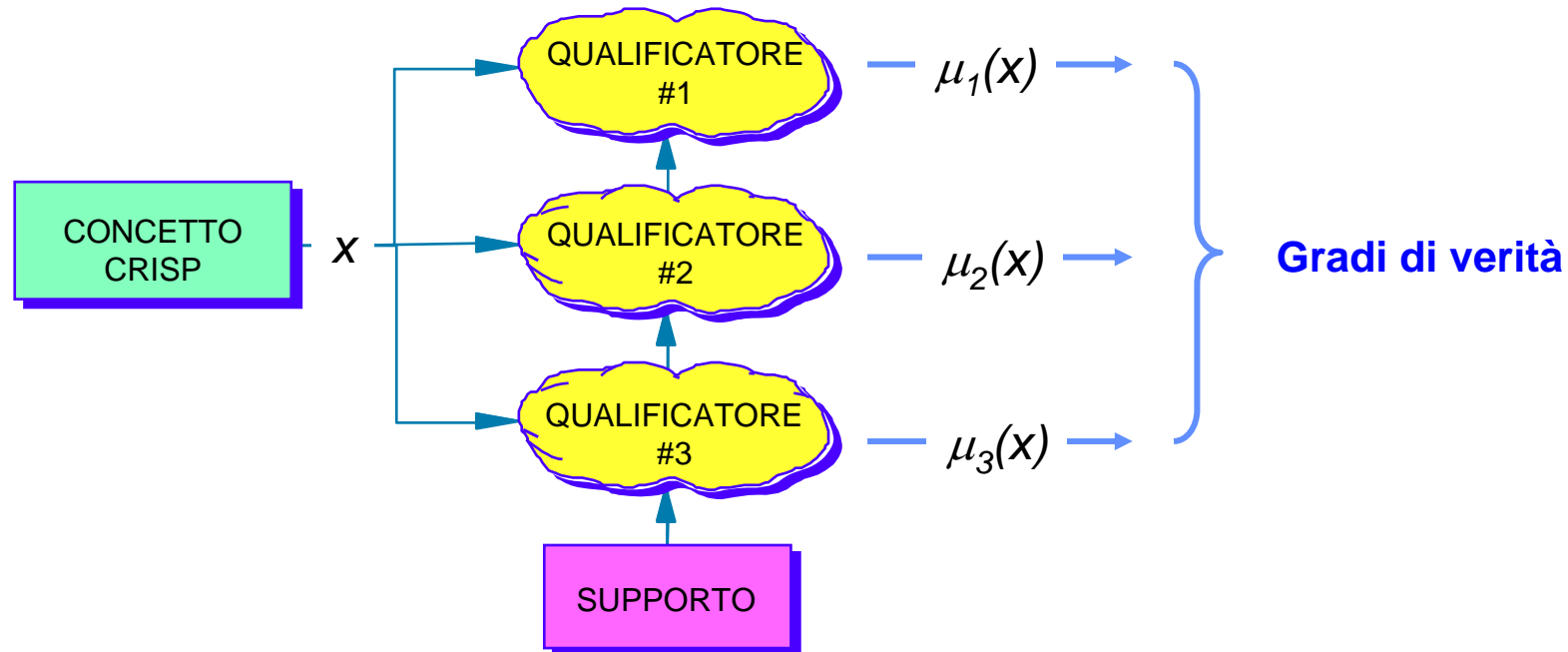
Ad essa corrisponde una funzione di appartenenza (qualificatore).

Esso determina il grado di verità μ di un qualsiasi valore del supporto.



Fuzzificazione

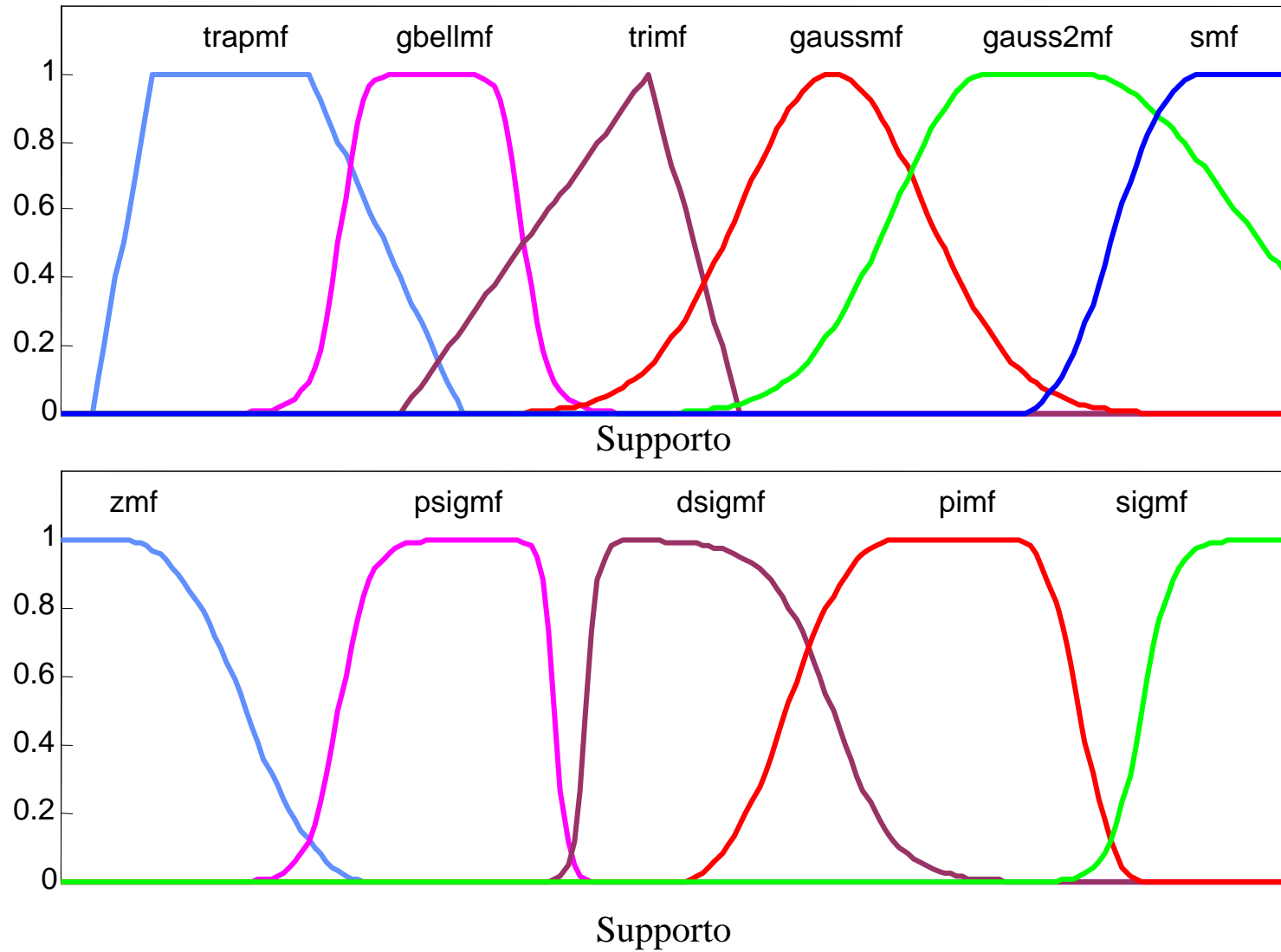
Consiste nella determinazione dei gradi di verità di un dato concetto rispetto ad un insieme di qualificatori predefiniti



Il risultato della fuzzificazione è un vettore contenente i gradi di verità del concetto rispetto ai qualificatori

$$x \xrightarrow{\text{fuzzificazione}} [\mu_1(x) \quad \mu_2(x) \quad \mu_3(x)]$$

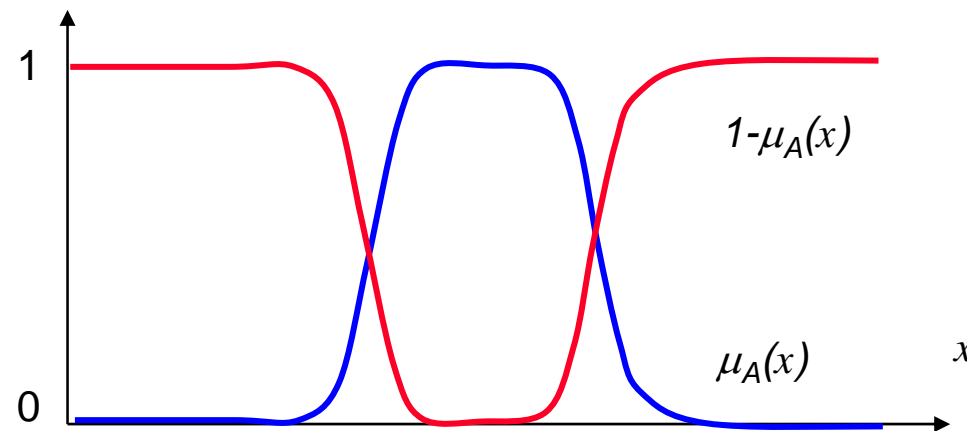
Qualificatori disponibili nella Matlab Fuzzy Toolbox



Alcune proprietà dei Fuzzy Sets

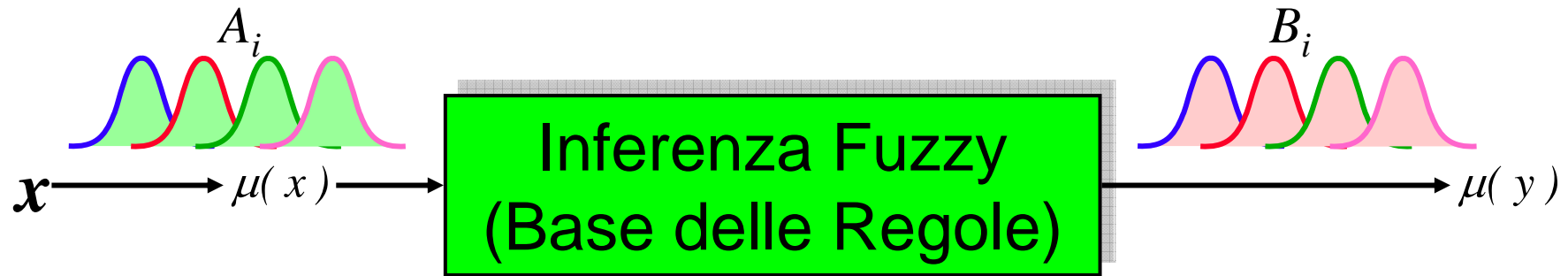
- ☞ **Insieme complemento:** il fuzzy set con funzione di appartenenza complementare rispetto a μ

$$\bar{A} : \{\bar{\mu}(x) = 1 - \mu(x) : X \rightarrow (0,1)\}$$



- ☞ **Normalità:** se esiste almeno un elemento di $x \in X$ tale che $\mu(x) = 1$
- ☞ **Completezza:** dato un insieme di fuzzy set $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ definiti tramite le funzioni di appartenenza $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ su un supporto $X \in \mathcal{R}$, tale insieme dicesi **completo** se per un qualsiasi $x \in X$ esiste almeno una funzione di appartenenza nell'insieme $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ diversa da zero.

Logica Fuzzy



Regola di inferenza $R_i : IF \underbrace{x_1 \text{ is } A_1 \text{ AND } x_2 \text{ is } A_2}_{\text{antecedente}} THEN \underbrace{y \text{ is } B}_{\text{conseguente}}$

- ☞ Alla base della logica fuzzy stanno le regole di inferenza
- ☞ Più predicati fuzzy possono essere **connessi** fra loro (**AND**)
- ☞ Dato un predicato **antecedente**, la sua verità implica (**THEN**) quella del predicato **conseguente**
- ☞ Vanno definiti gli operatori logici di **connessione** fra concetti fuzzy e di **implicazione** fra antecedente e conseguente

Operatori fuzzy: norme triangolari come connettivi AND

$$T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

☞ L'operatore $T(.,.)$ ha le seguenti proprietà

⇒ Limitatezza $T(0,0) = 0; T(a,1) = T(1,a) = a$ *Prevale il più piccolo*

⇒ Monotonicità $b \leq c \Rightarrow T(a,b) \leq T(a,c)$

⇒ Commutatività $T(a,b) = T(b,a)$

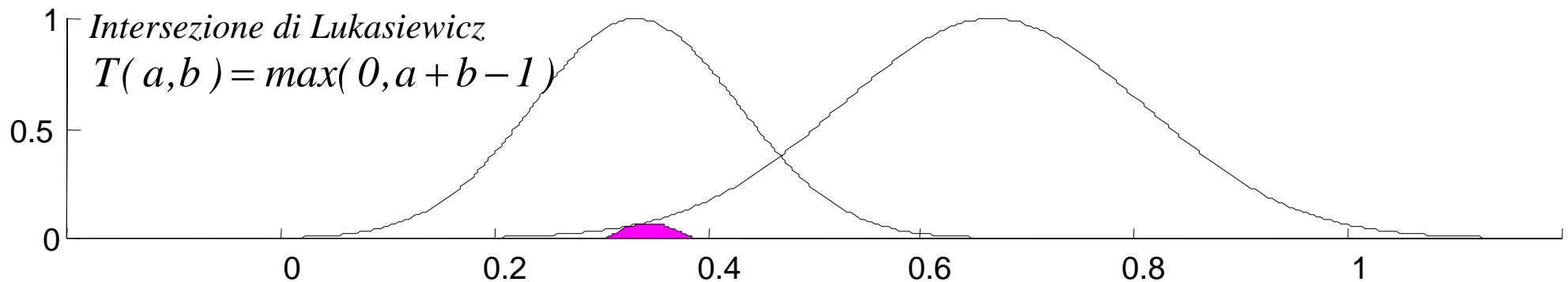
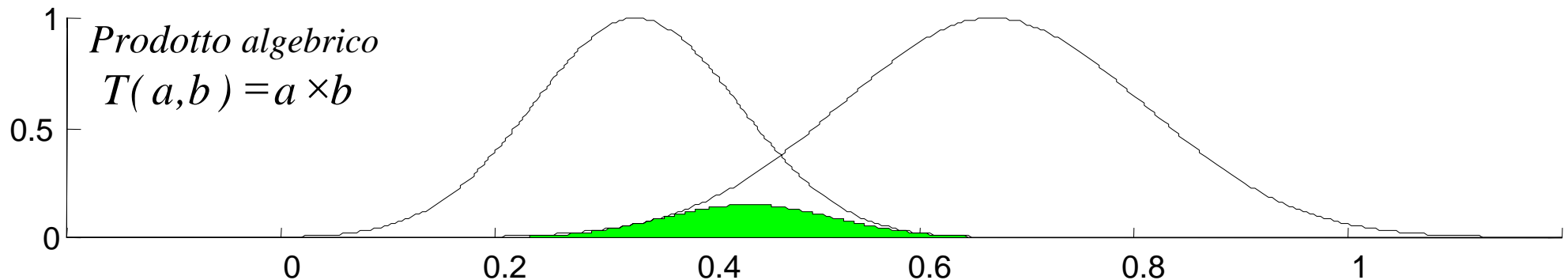
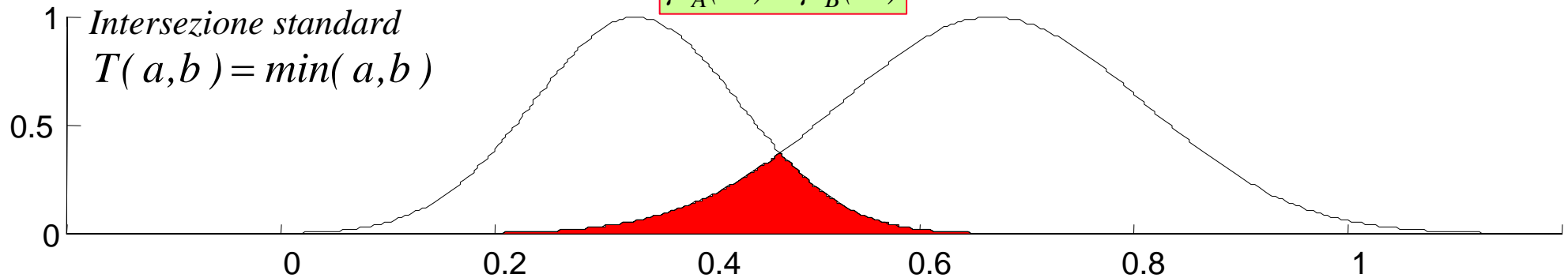
⇒ Associatività $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$

Possibili t -norme

| | | |
|---|------------------------------------|-------------------------------|
| { | <i>Intersezione standard</i> | $T(a,b) = \min(a,b)$ |
| | <i>Prodotto algebrico</i> | $T(a,b) = a \times b$ |
| | <i>Intersezione di Lukasiewicz</i> | $T(a,b) = \max(0, a + b - 1)$ |

Esempi di T-norme

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$



Operatori fuzzy: S-norme triangolari come connettivi OR

$$S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

☞ L'operatore $S(.,.)$ ha le seguenti proprietà

⇒ Limitatezza $S(1,1) = 1; S(a,0) = S(0,a) = a$ *Prevale il più grande*

⇒ Monotonicità $b \leq c \Rightarrow S(a,b) \leq S(a,c)$

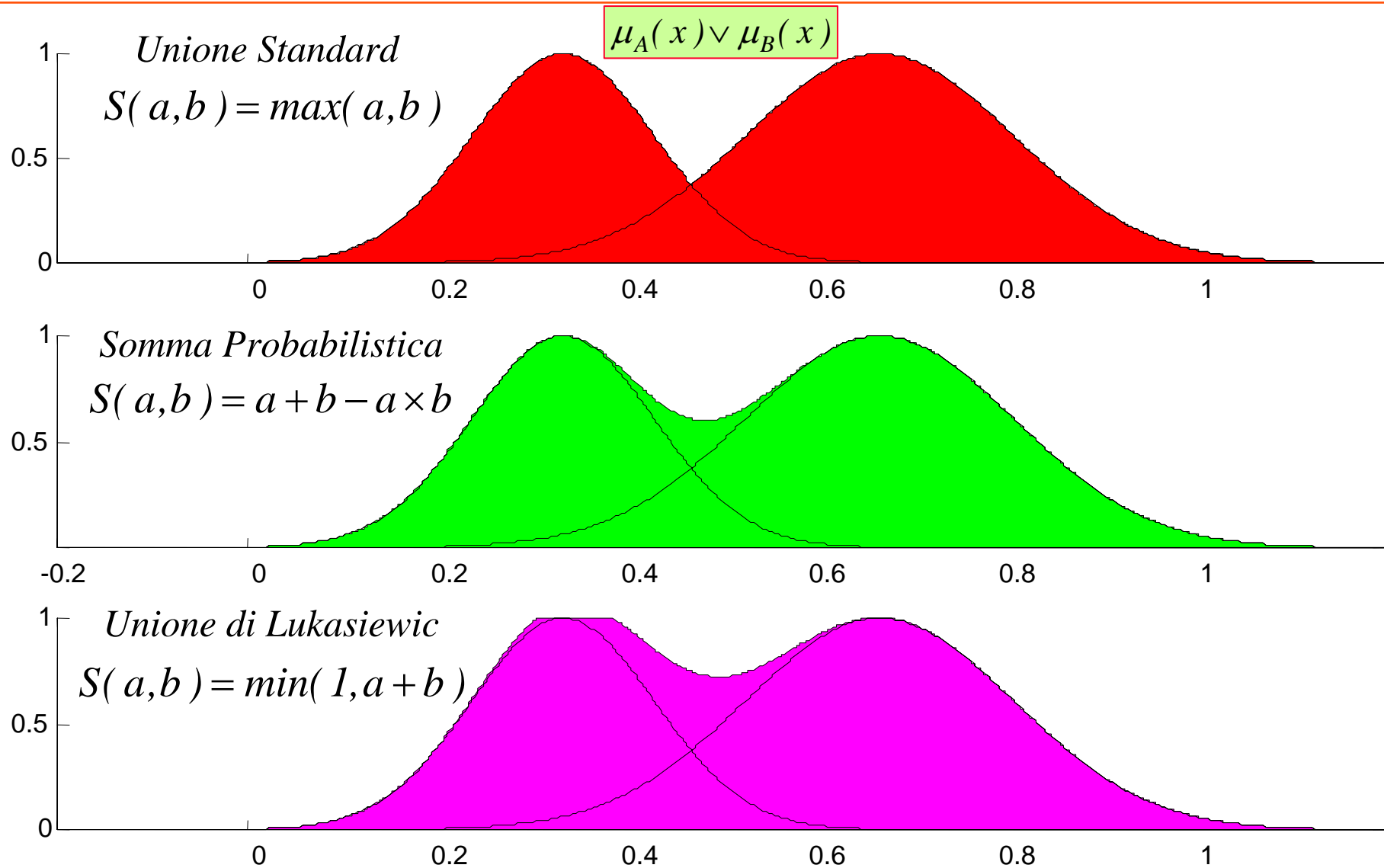
⇒ Commutatività $S(a,b) = S(b,a)$

⇒ Associatività $S(a, S(b,c)) = S(S(a,b), c)$

Possibili s-norme

| | | |
|---|------------------------------|-------------------------------|
| { | <i>Unione Standard</i> | $S(a,b) = \max(a,b)$ |
| | <i>Somma Probabilistica</i> | $S(a,b) = a + b - a \times b$ |
| | <i>Unione di Lukasiewicz</i> | $S(a,b) = \min(1, a + b)$ |

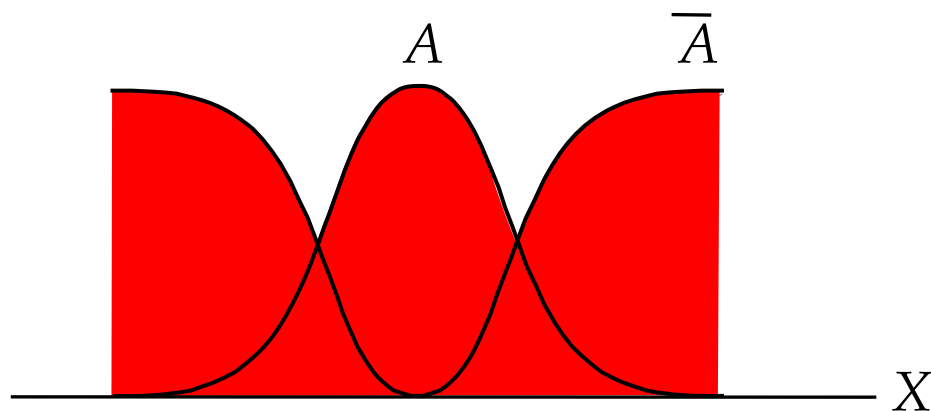
Esempi di S-norme



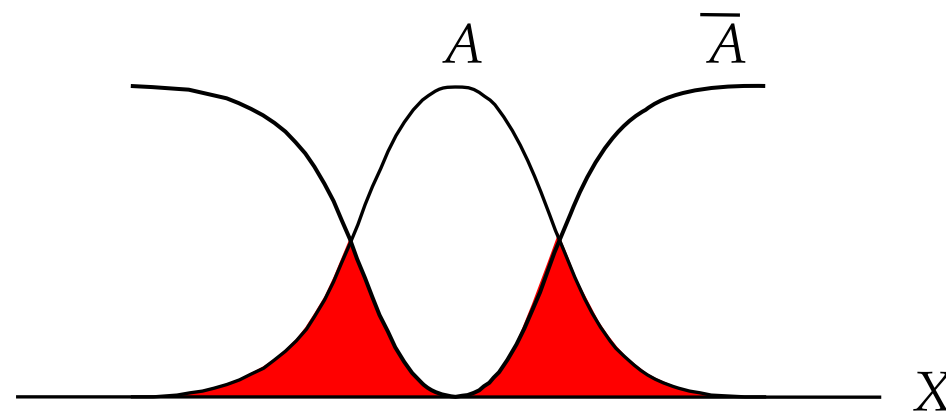
Diversamente dagli insiemi *crisp*.....

Per i fuzzy sets non vale il principio
del medio escluso

| crisp sets | Fuzzy sets |
|---|---|
| $A \cup \bar{A} = X \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$ | $A \cup \bar{A} \neq X \quad A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ |



$$X \neq A \vee \bar{A} : \max\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \mid x \in X\}$$



$$\emptyset \neq A \wedge \bar{A} : \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \mid x \in X\}$$

Implicazione Fuzzy

- La logica fuzzy è **deduttiva**, nel senso che condiziona la verità del *conseguente* a quella dell'*antecedente*

IF x *is* A *THEN* y *is* B
antecedente *conseguente*

- La notazione x *is* A va intesa come il grado di appartenenza di x al fuzzy set A , ovvero operativamente

$$x \text{ is } A \rightarrow \mu_A(x)$$

- Analogamente per il conseguente y *is* B va intesa come il grado di appartenenza del conseguente y al fuzzy set B

$$y \text{ is } B \rightarrow \mu_B(y)$$

- Il problema nuovo rispetto alle precedenti operazioni è che in generale A e B sono definiti su due supporti diversi X e Y !!!
- Perciò va definito un nuovo operatore: **l'Implicazione fuzzy** che condiziona il grado di verità del conseguente con quello dell'*antecedente*

Implicazione fuzzy

☞ L'implicazione

$$R : IF \ x \text{ is } A \ THEN \ y \text{ is } B$$

☞ Opera sul prodotto cartesiano fra gli spazi di ingresso (X) e uscita (Y)

$$R : X \times Y \rightarrow [0,1]$$

☞ Il grado di appartenenza del conseguente è dato dall'operatore di implicazione (THEN), che si realizza con una *t*-norma

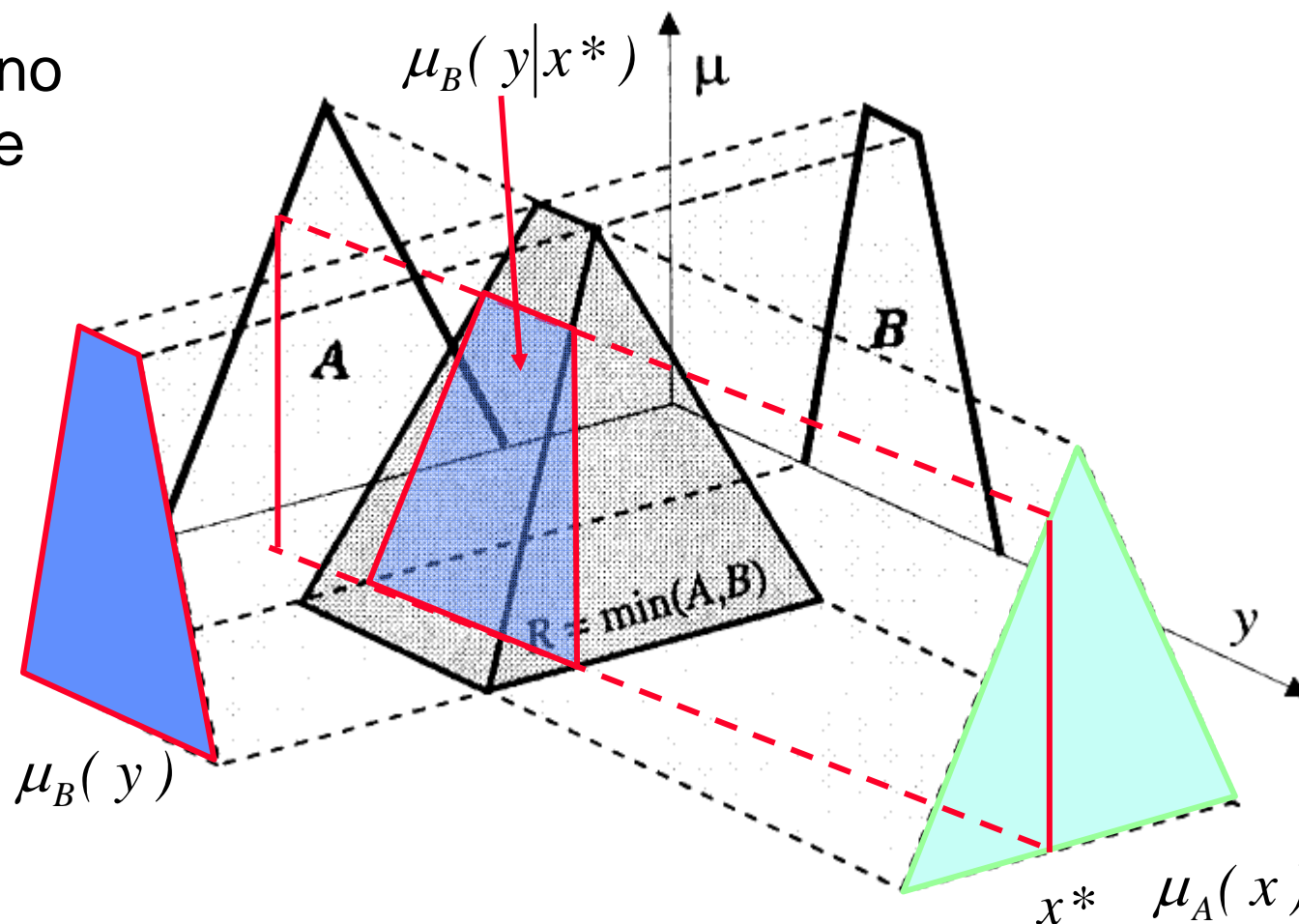
☞ Possibili operatori di implicazione *t*-norme

$$R : \begin{cases} \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)) & \text{Lukasiewicz } z \\ \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{Kleene} \\ \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{Mamdani} \\ \mu_A(x) \times \mu_B(y) & \text{Prodotto} \end{cases}$$

Superficie di implicazione fuzzy

L'implicazione fuzzy opera sul prodotto cartesiano dei due supporti e produce una **superficie** di inferenza che rappresenta la relazione fra ingresso (antecedente) e uscita (conseguente)

$$R(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$



Implicazione Fuzzy

R : IF x is A THEN y is B

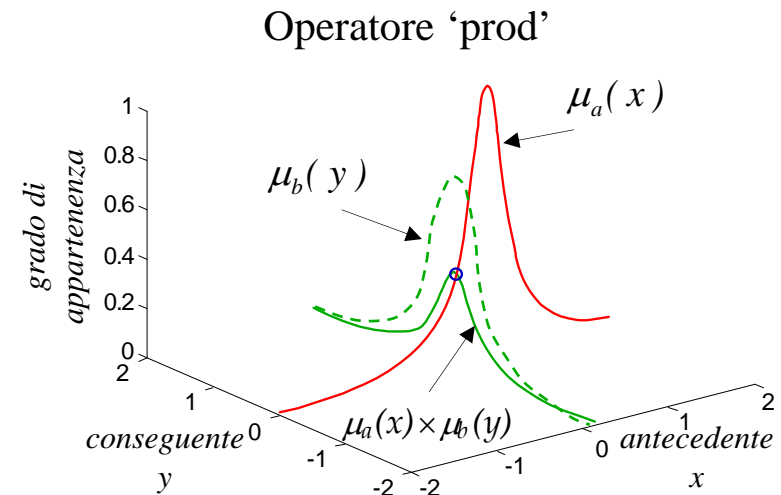
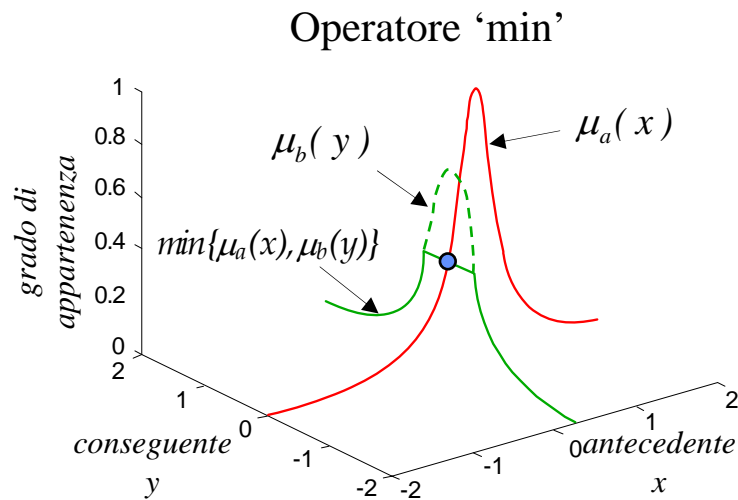
$$S : A \times B \rightarrow \mu_s(x, y) = \mu_a(x) \wedge \mu_b(y) = \begin{cases} \min\{\mu_a(x), \mu_b(y)\} & x \in X \\ \mu_a(x) \times \mu_b(y) & y \in Y \end{cases}$$

Prodotto Cartesiano
dei due insiemi fuzzy

Connettivo
di implicazione

Possibili
operatori

L'antecedente condiziona il grado di appartenenza del conseguente



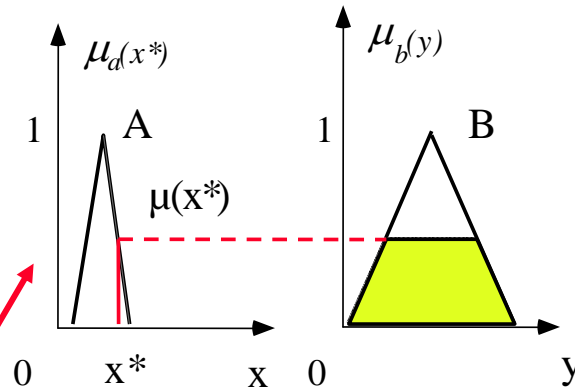
Implicazione con un solo antecedente

IF x is A THEN y is B

$$\mu_b(y) == \mu_a(x^*) \wedge \mu_b(y)$$

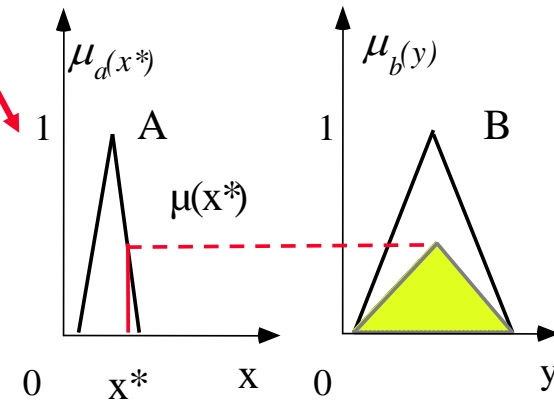
Composizione
'min'

$$x \text{ is } A \Rightarrow \mu_a(x)$$



$$\mu_b(y) = \min(\mu_a(x^*), \mu_b(y))$$

Composizione
'prod'

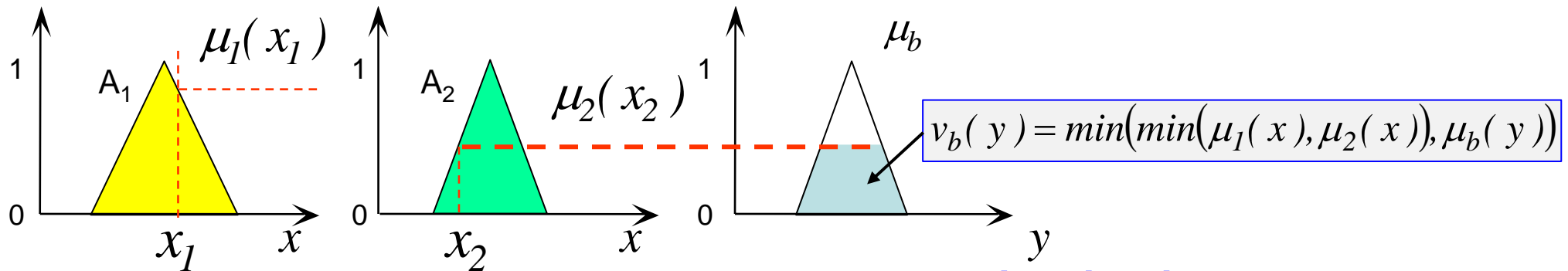


$$\mu_b(y) = \mu_a(x^*) \times \mu_b(y)$$

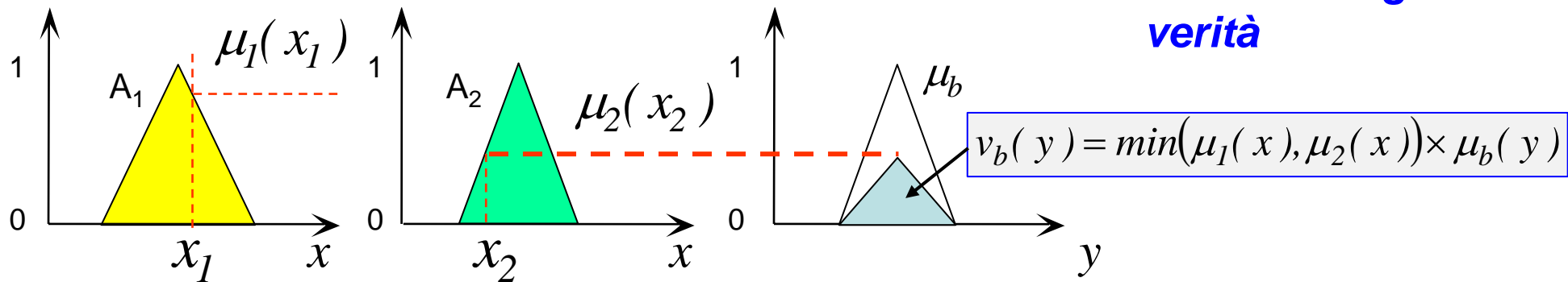
Implicazione con più antecedenti

IF $(x_1 \text{ is } A_1)$ *AND* $(x_2 \text{ is } A_2)$ *THEN* $y \text{ is } B$

$$\mu_b(y) = (\mu_1(x^*) \wedge \mu_2(x^*)) \wedge \mu_b(y)$$



**Nell'implicazione prevale
l'antecedente con minore grado di
verità**



Algoritmo inferenziale fuzzy

- ☞ In genere una sola regola fuzzy non è sufficiente per definire l'intero concetto che vogliamo esprimere
- ☞ Si usano allora più regole, connesse fra di loro con il predicato ELSE
- ☞ Esempio: si considerino due regole

$R_1 : IF (x_1 \text{ is } A_{11}) AND (x_2 \text{ is } A_{21}) THEN y \text{ is } B_1$
 $ELSE$
 $R_2 : IF (x_1 \text{ is } A_{12}) AND (x_2 \text{ is } A_{21}) THEN y \text{ is } B_2$

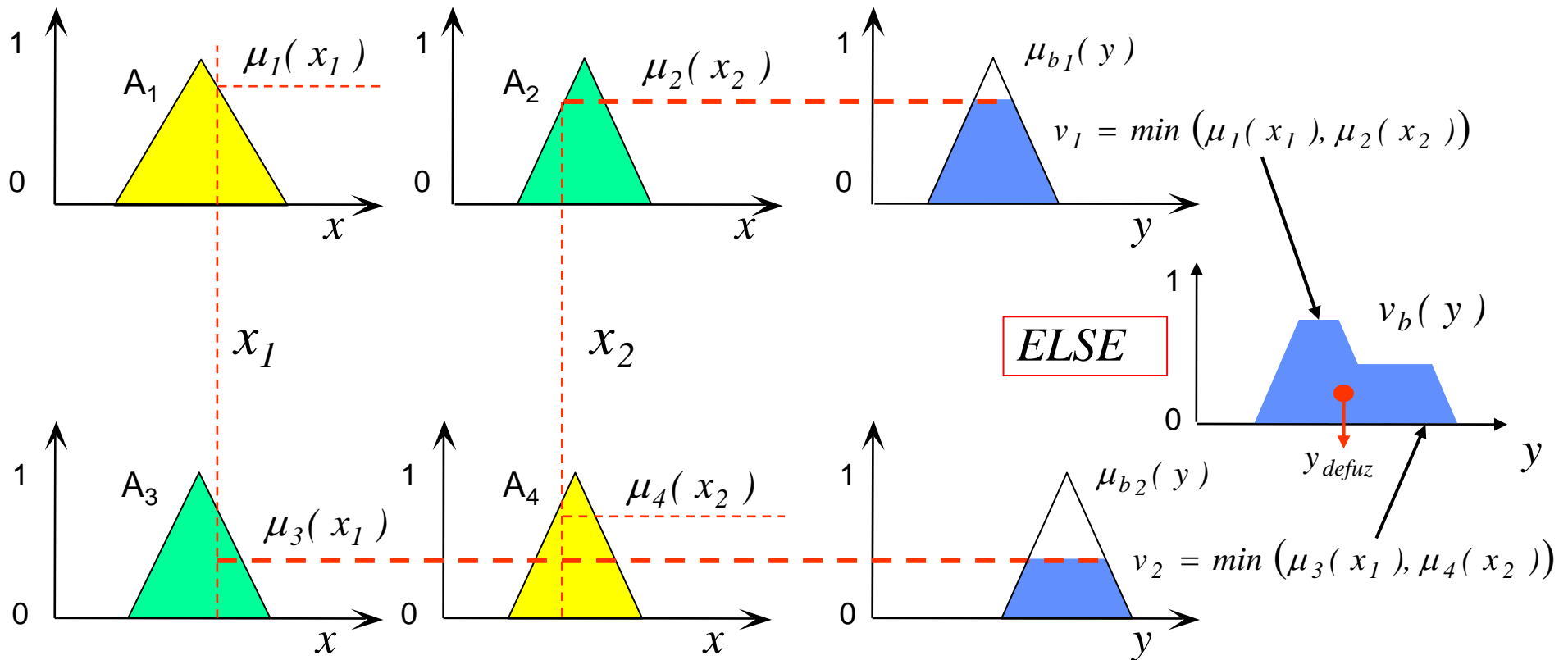
In questo caso si considera l'alternativa fra le somiglianze di x_1 a A_{11} o A_{12} e di x_2 a A_{21} o A_{22} . Ciascun antecedente mappa il conseguente in B_1 o B_2 in funzione del proprio grado di verità

- ☞ Tale connettivo rappresenta il grado di alternativa delle singole regole e viene perciò realizzato con un operatore s -norma (\vee)

Composizione di due regole

Prima regola

IF $x_1 \in A_1$ **AND** $x_2 \in A_2$ **THEN** $y \in B_1$

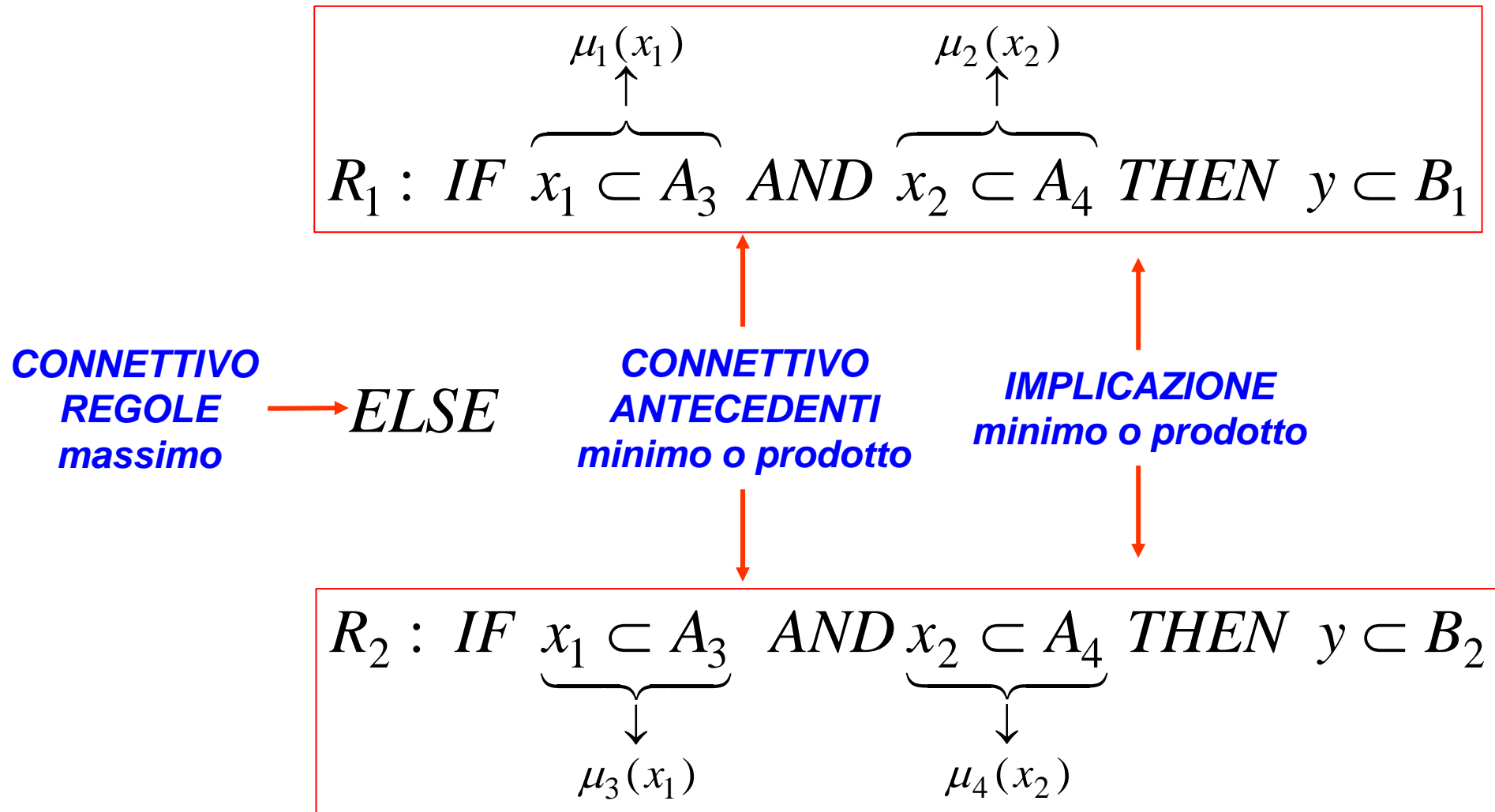


ELSE

Seconda regola

IF $x_1 \in A_3$ **AND** $x_2 \in A_4$ **THEN** $y \in B_2$

Connettivi usati nell'inferenza Fuzzy



Inferenza generalizzata ad m regole

n antecedenti

m regole

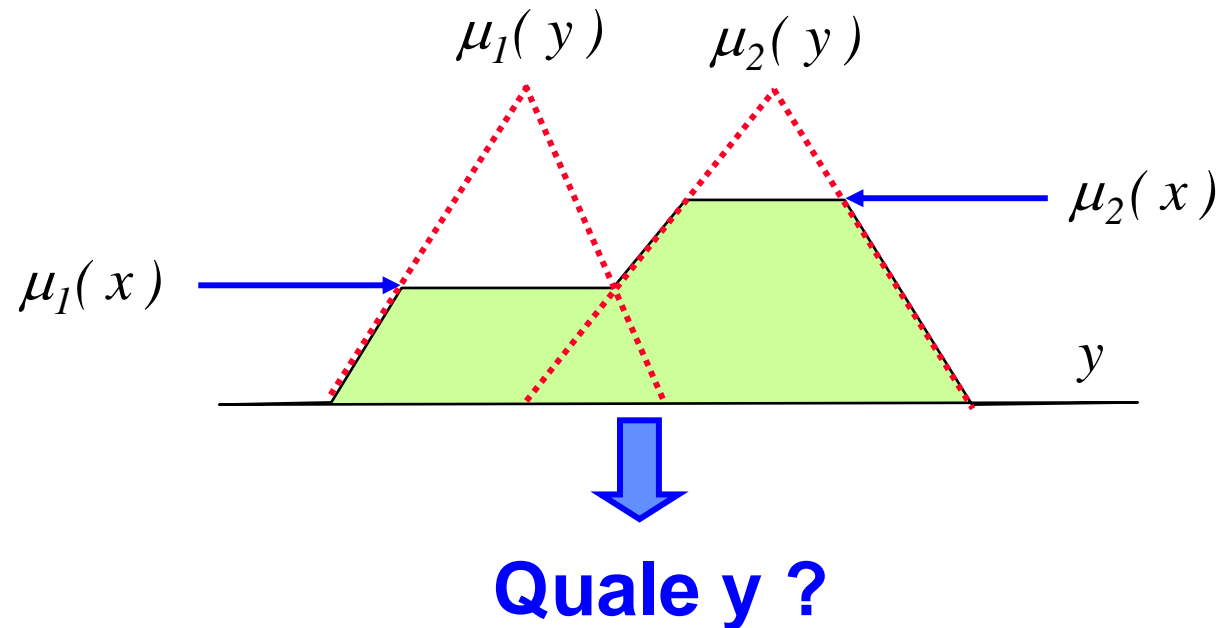
R_1 : IF (x_1 is $A_{1,1}$) AND AND (x_n is $A_{1,n}$) THEN (y is B_1)
ELSE
.....
 R_m : IF (x_1 is $A_{m,1}$) AND AND (x_n is $A_{m,n}$) THEN (y is B_m)

$$A_{j,i} \rightarrow \mu_{j,i}(x) \quad B_j \rightarrow \mu_{b_j}(y)$$

$$\mu_b(y) = \bigcup_{j=1}^m \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^n \mu_{j,i}(x^*) \right) \wedge \mu_{b_j}(y) \right\}$$

Ritorno al mondo reale: la defuzzificazione

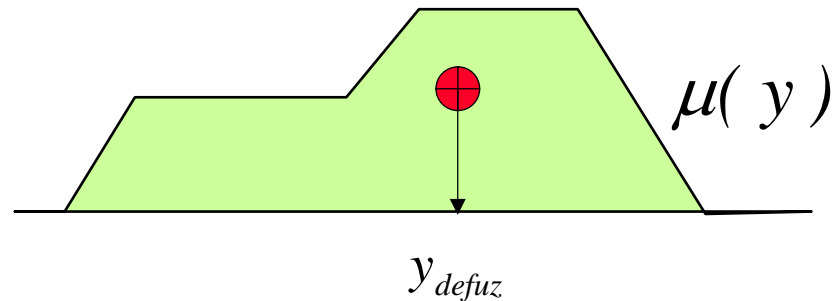
- Il risultato dell'inferenza fuzzy è un fuzzy set ottenuto per unione (S-norma) dei risultati delle singole inferenze



- Il Fuzzy Set colorato in verde rappresenta l'uscita dell'inferenza in termini fuzzy, ma come far corrispondere a questo un *singolo valore crisp di y* rappresentativo dell'inferenza?

Defuzzificazione

- 👉 Il metodo più affidabile è il *centro di gravità*.
- 👉 Si calcola y_{defuz} come l'ascissa del baricentro della figura geometrica che rappresenta il fuzzy set di uscita



$$y_{defuz} = \frac{\int y \cdot \mu(y) dy}{\int \mu(y) dy}$$

Aspetti numerici

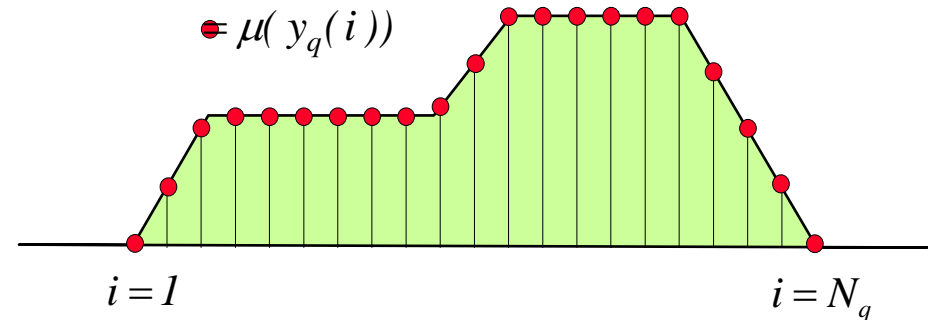
- ☞ Si divide il supporto y in un numero sufficiente di intervalli

$$\{y_q(i) / i = 1, \dots, N_q\}$$

- ☞ Si calcola la funzione di appartenenza nei punti y_q

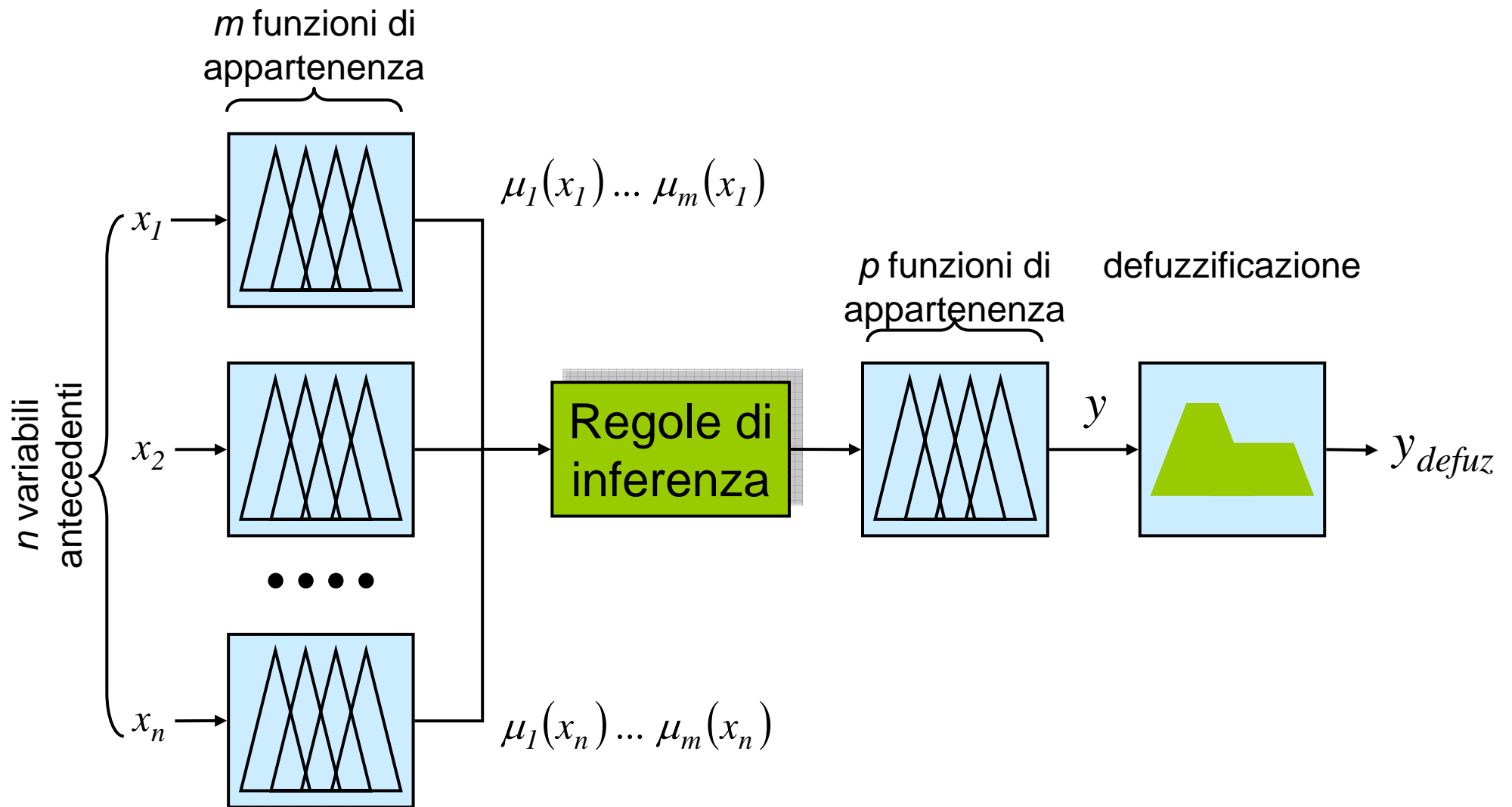
$$\{\mu(y_q(i)) / i = 1, \dots, N_q\}$$

- ☞ L'integrale viene approssimato da una sommatoria estesa ai punti della discretizzazione



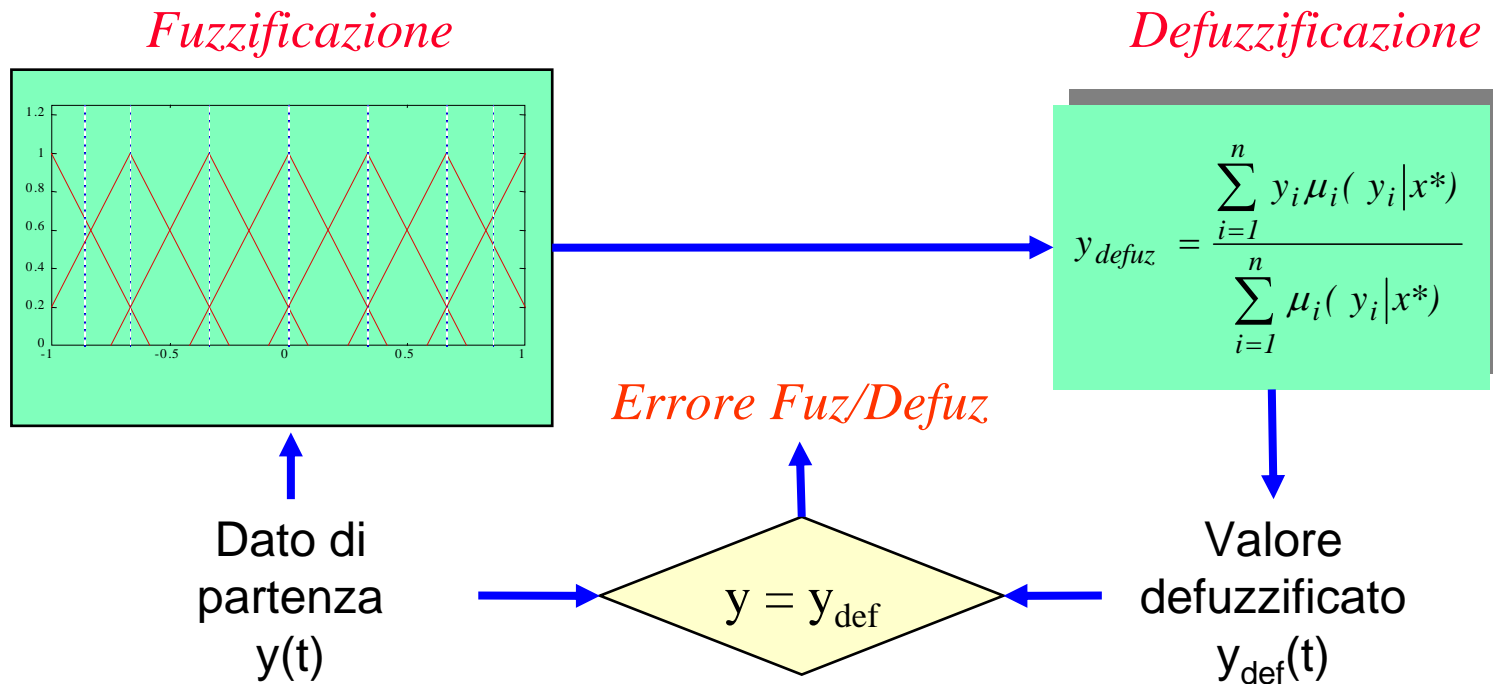
$$y_{defuz} = \frac{\sum_{i=1}^{N_q} y_q(i) \cdot \mu(y_q(i))}{\sum_{i=1}^{N_q} \mu(y_q(i))}$$

Schema riassuntivo dell'inferenza Fuzzy



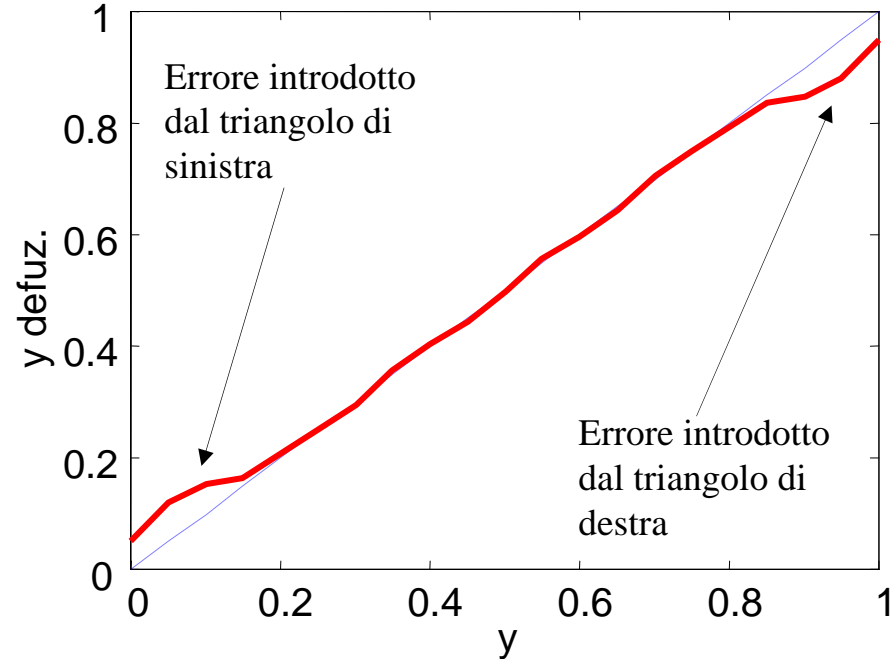
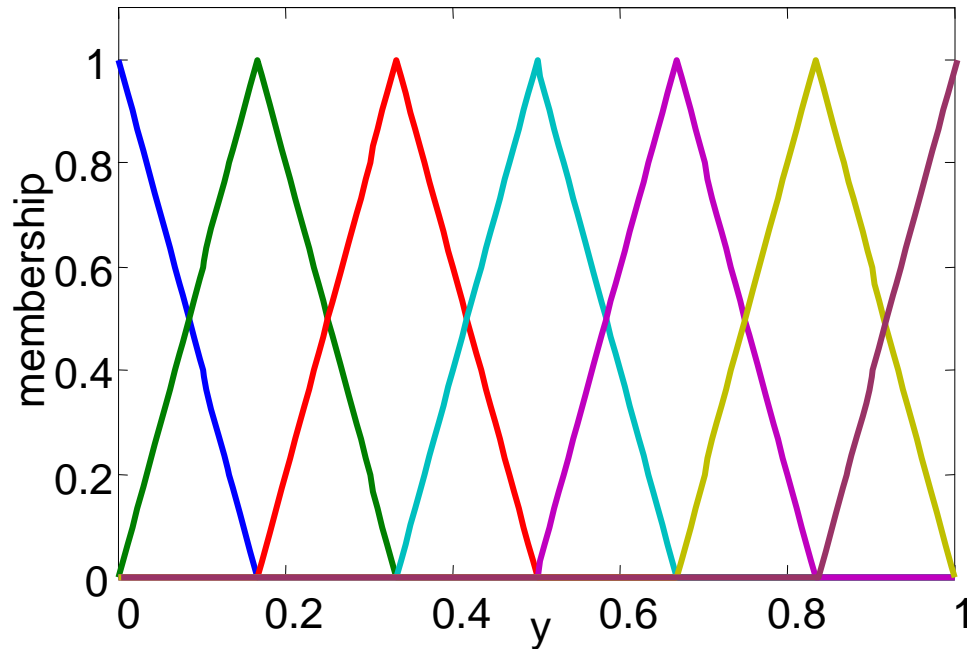
Errore di Fuzzificazione/Defuzzificazione

- Il processo di fuzzificazione e successiva defuzzificazione è complessivamente nonlineare e perciò introduce degli errori nelle variabili
- Per valutarli si effettua le due operazioni in sequenza e si compara il risultato al valore di partenza



Errori di Fuz/Defuz

$R_i : \text{if } x \text{ is } A_i \text{ then } y = A_i$



L'errore di defuzzificazione è dovuto all'asimmetria dei rappresentatori estremi (triangoli rettangoli) che differiscono dai rappresentatori centrali (triangoli isosceli) anche nel caso ottimale di sovrapposizione al 50%


$$y_{defuz} = \frac{\sum_{i=1}^{N_q} y_q(i) \cdot \mu(y_q(i))}{\sum_{i=1}^{N_q} \mu(y_q(i))}$$

Inferenza Fuzzy alla Sugeno

- Il costrutto logico è lo stesso, con antecedenti fuzzy e le medesime regole di composizione, ma il conseguente è un singolo valore deterministico (*singleton*)

IF x_1 *is* A_1 *AND* x_2 *is* A_2 *THEN* $y = k$

*Valore assunto dall'uscita in funzione
del grado di verità dell'antecedente*



- Viene eliminato il problema della defuzzificazione: basterà effettuare la media dei vari singleton pesata con i gradi di verità degli antecedenti;
- E' immediata l'estensione a conseguenti più complessi, come funzioni lineari o più in generali a funzione a base radiale (approssimatori universali)

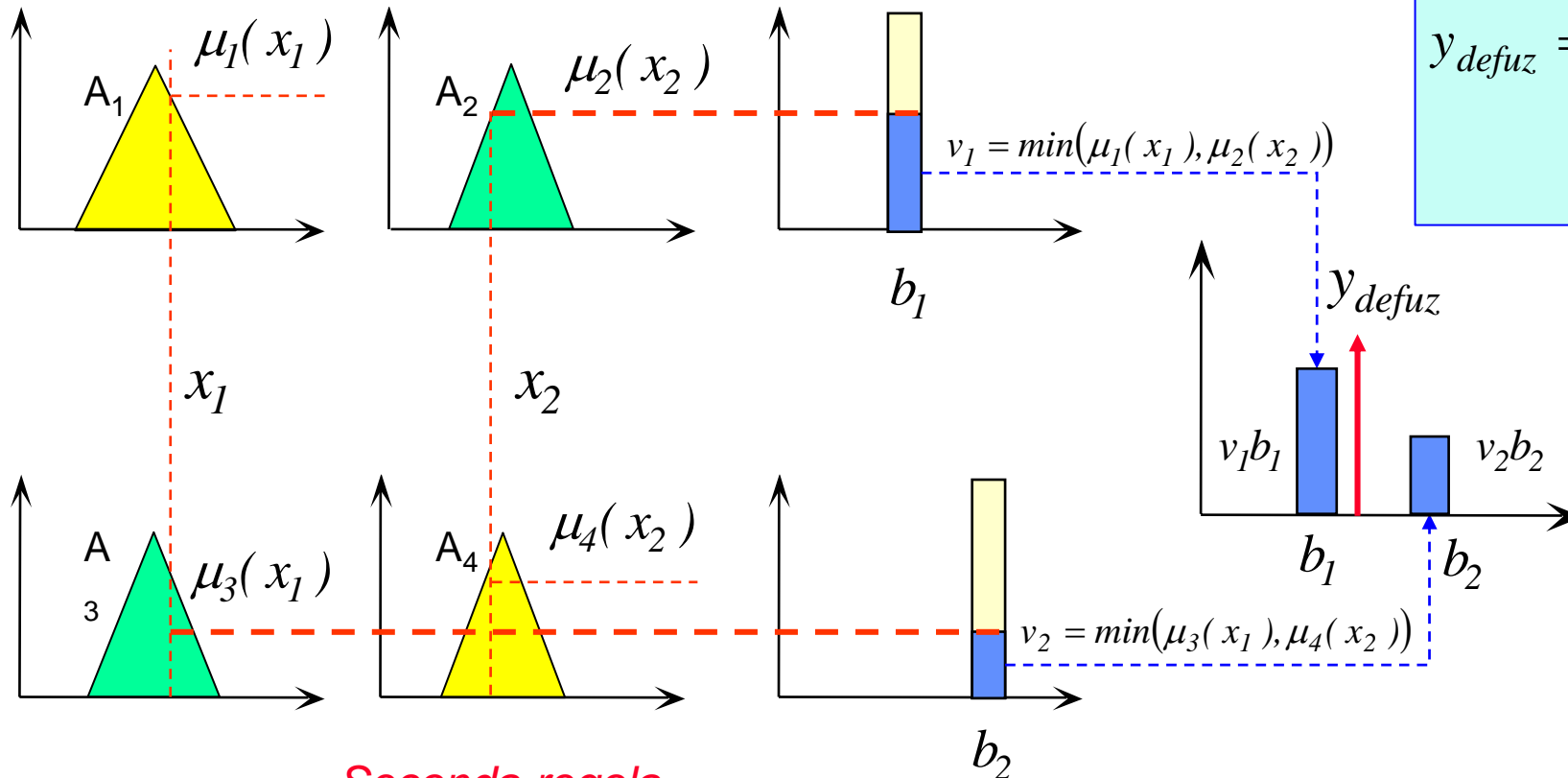
IF x_1 *is* A_1 *AND* x_2 *is* A_2 *THEN* $y = f(x_1, x_2)$

- Si apre così la strada ad un ricongiungimento fra la teoria dei sistemi "classica" ed il mondo fuzzy.

Implicazione alla Sugeno

Prima regola

IF $x_1 \in A_1$ AND $x_2 \in A_2$ THEN $y = b_1$



$$y_{defuz} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i b_i}{\sum_{i=1}^N v_i}$$

Seconda regola

IF $x_1 \in A_3$ AND $x_2 \in A_4$ THEN $y = b_2$

Essential bibliography

- 👉 Yager R.R. e Filev D.P. (1994) *Essentials of Fuzzy Modelling and Control*, Wiley.
- 👉 Babuska R. (1998) *Fuzzy Modelling for Control*, Kluwer.
- 👉 Wang, L. X. (1994) *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, PTR Prentice Hall.