Sfruttamento di risorse rinnovabili

Come utilizzare la dinamica di crescita naturale
senza provocare danni all'ecosistema

Sfruttamento di risorse rinnovabili

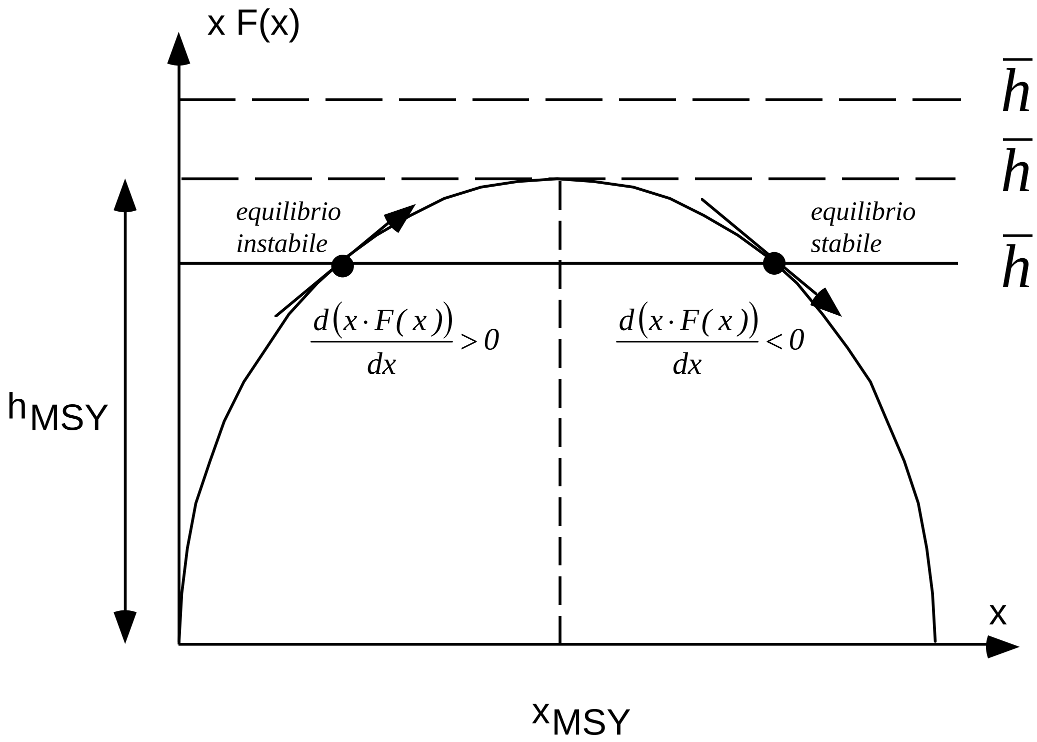
- Strategie per prelevare parte della popolazione, compatibilmente con la sua dinamica di sviluppo, in modo da non pregiudicarne lo sviluppo di lungo termine
- Si suppone che la popolazione si sviluppi con una funzione di crescita *F(x)* "density-dependent", come nei modelli già visti (es. logistico)
- Anche il prelievo *h(t)* può essere "density-dependent" oppure no
- In genere si trascura la mortalità naturale della popolazione

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{x \cdot F(x)}_{crescita} - \underbrace{h(t)}_{prelievo}$$

- **STABILITA'** = determinare una politica di prelievo che non porta la popolazione all'estinzione

Prelievo costante

- In questo caso h = *costante*, indipendentemente dalla popolazione e dal tempo
- Problemi
  - Ricerca dell'equilibrio $x^*F(x^*) = \bar{h}$
  - L'equilibrio è ammissibile? $(x^* > 0)$
  - L'equilibrio è stabile?



$\bar{h} > h_{MSY}$ Sfruttamento non sostenibile

$\bar{h} = h_{MSY}$ Sfruttamento appena sostenibile

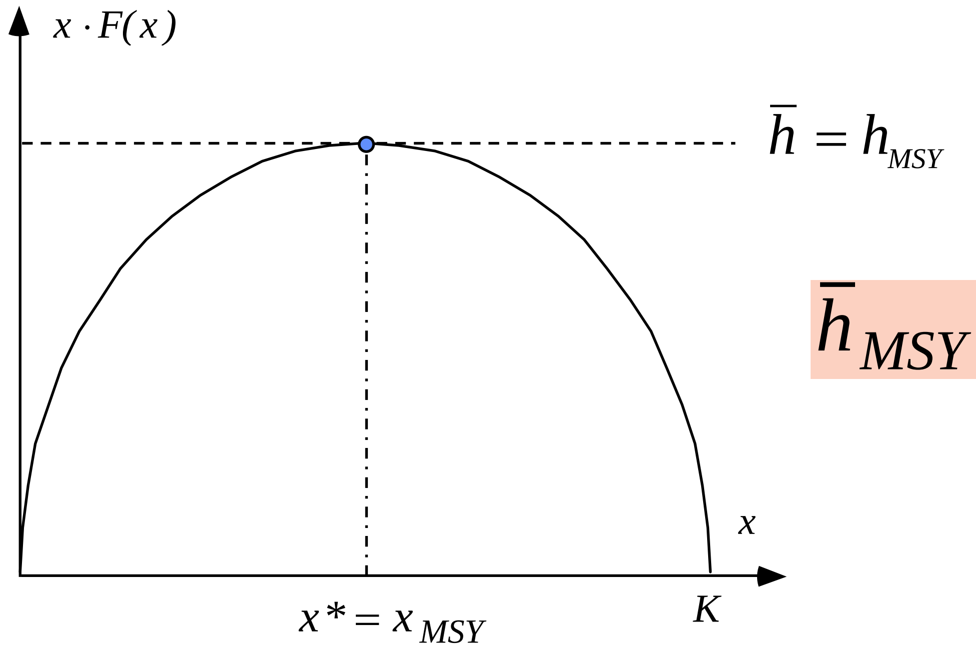
$\bar{h} < h_{MSY}$ Sfruttamento sostenibile

Nel caso sostenibile si hanno due soluzioni. Solamente quella per $x > x_{MSY}$ è stabile (sostenibile)

MSY = Maximum Sustanaible Yield

Maximum Sustainable Yield

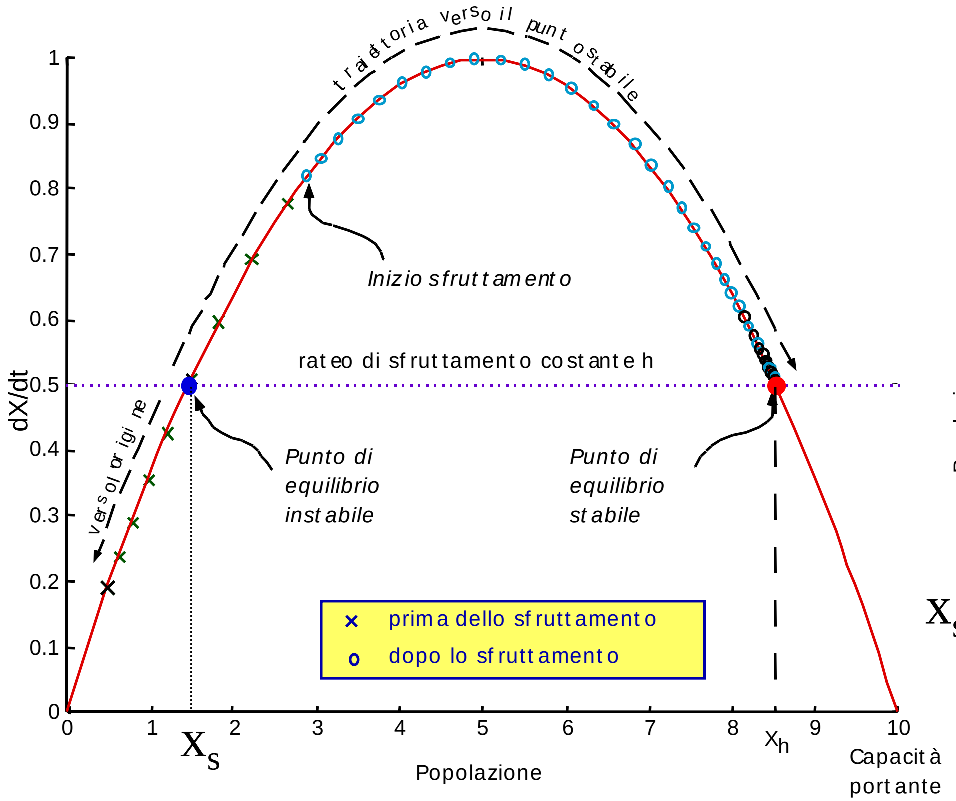
- Il *massimo raccolto sostenibile* (MSY) si ottiene prelevando con un rateo pari al massimo di crescita
- Si determina azzerando la derivata della dinamica totale della popolazione
- Esso corrisponde alla popolazione di massima crescita x*
- Si tratta di un limite teorico, in quanto produce un equilibrio *metastabile*

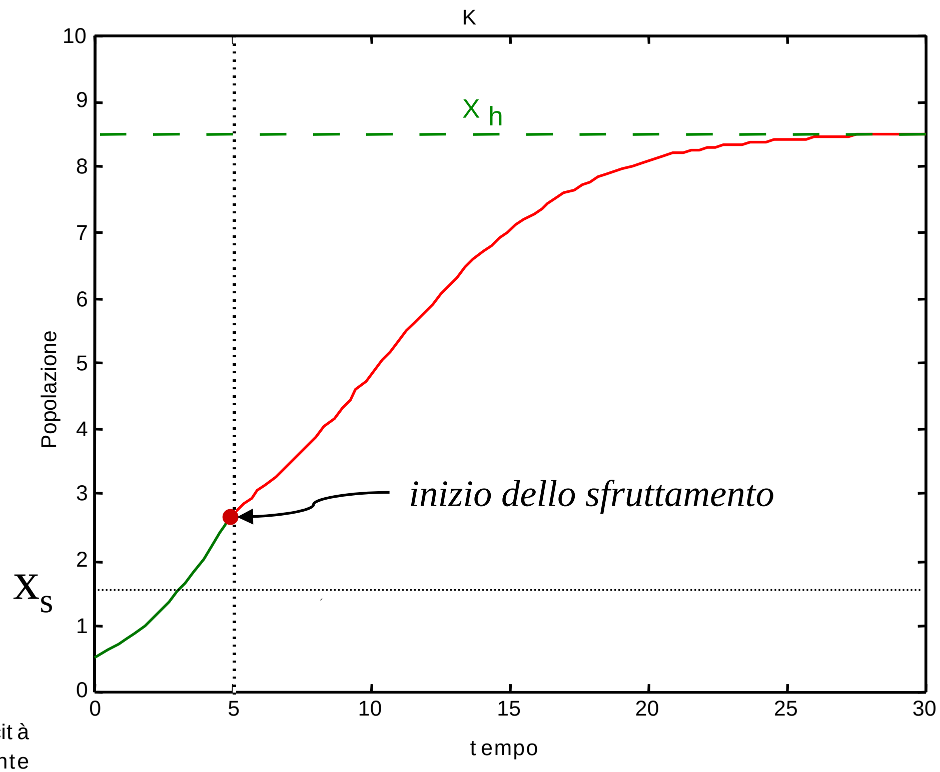


$$\bar{h}_{MSY} = x^* \cdot F(x^*)$$

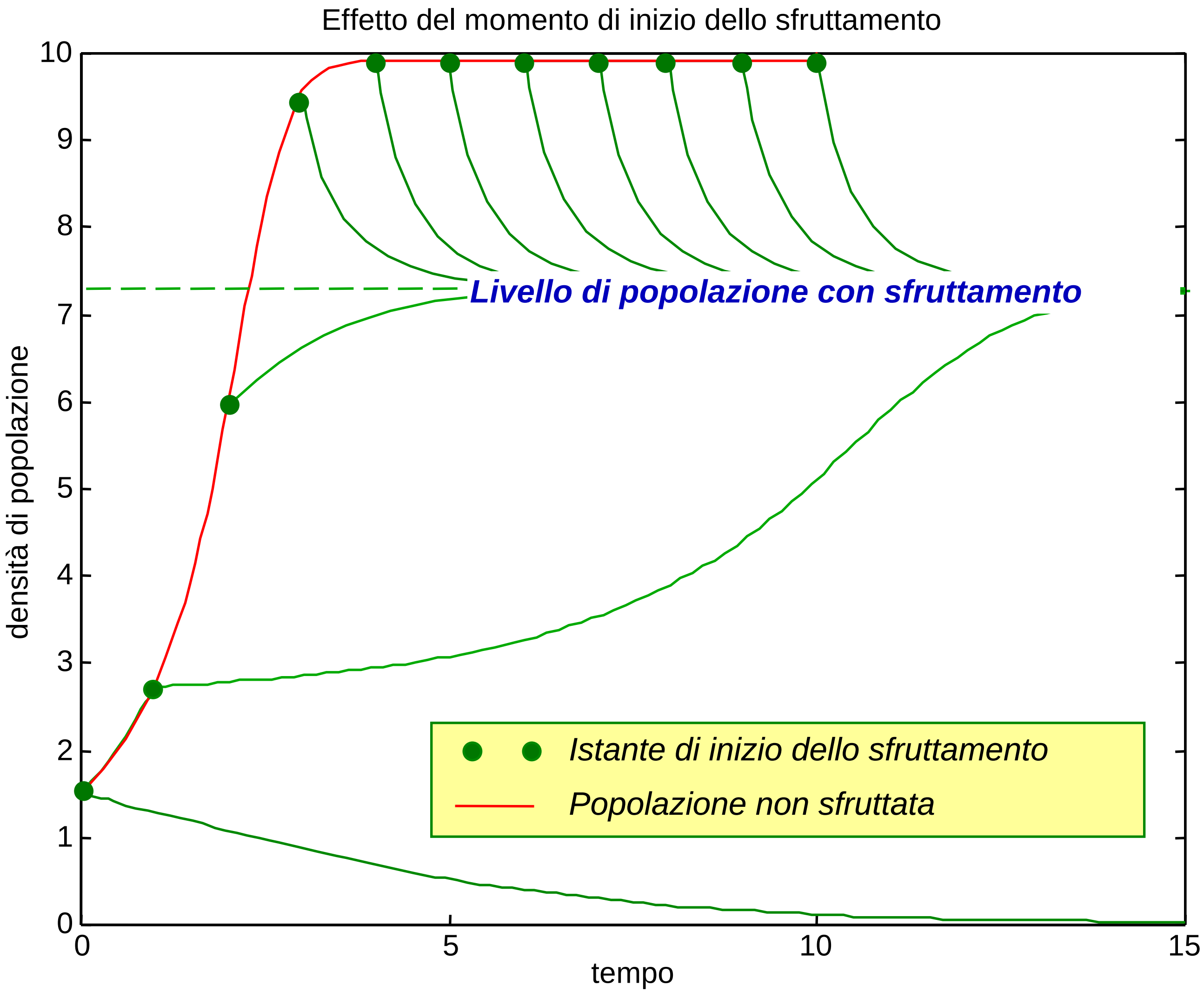
Sfruttamento costante

Il punto di equilibrio a cui tende la popolazione dipende dalla densità al momento dell'inizio del prelievo: se si inizia lo sfruttamento quando x(t) è inferiore al valore di equilibrio instabile x_s, la popolazione si estingue





Sviluppo con sfruttamento



Sfruttamento costante nel caso logistico

- Si assume una *crescita logistica* come dinamica di sviluppo

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \cdot \left[1 - \frac{x}{K}\right] - \bar{h}$$

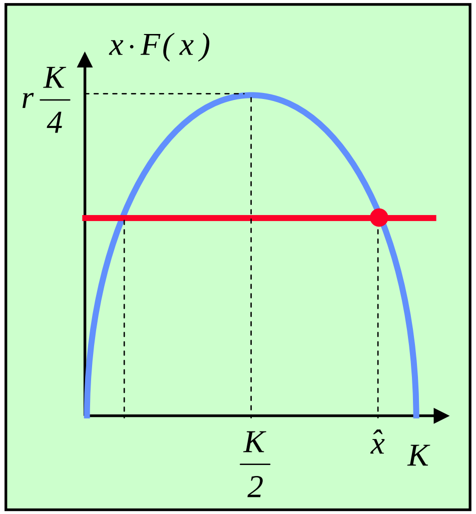
- Il massimo raccolto sostenibile (MSY) si ha per

$$x^* = x_{MSY} = \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{h}_{MSY} = rx^*\left[1 - \frac{x^*}{K}\right] = r\frac{K}{2}\left[1 - \frac{K}{2K}\right] = r\frac{K}{4}$$

- Sfruttamento ammissibile per $h < h_{MSY}$

$$0 = rx\left[1 - \frac{x}{K}\right] - h \quad \Rightarrow \quad x^2 - Kx + \frac{Kh}{r} = 0$$

$$\hat{x} = \frac{K + \sqrt{K^2 - 4\frac{Kh}{r}}}{2} > \frac{K}{2} \quad per\, x > \frac{K}{2} \Rightarrow h < h_{MSY}$$

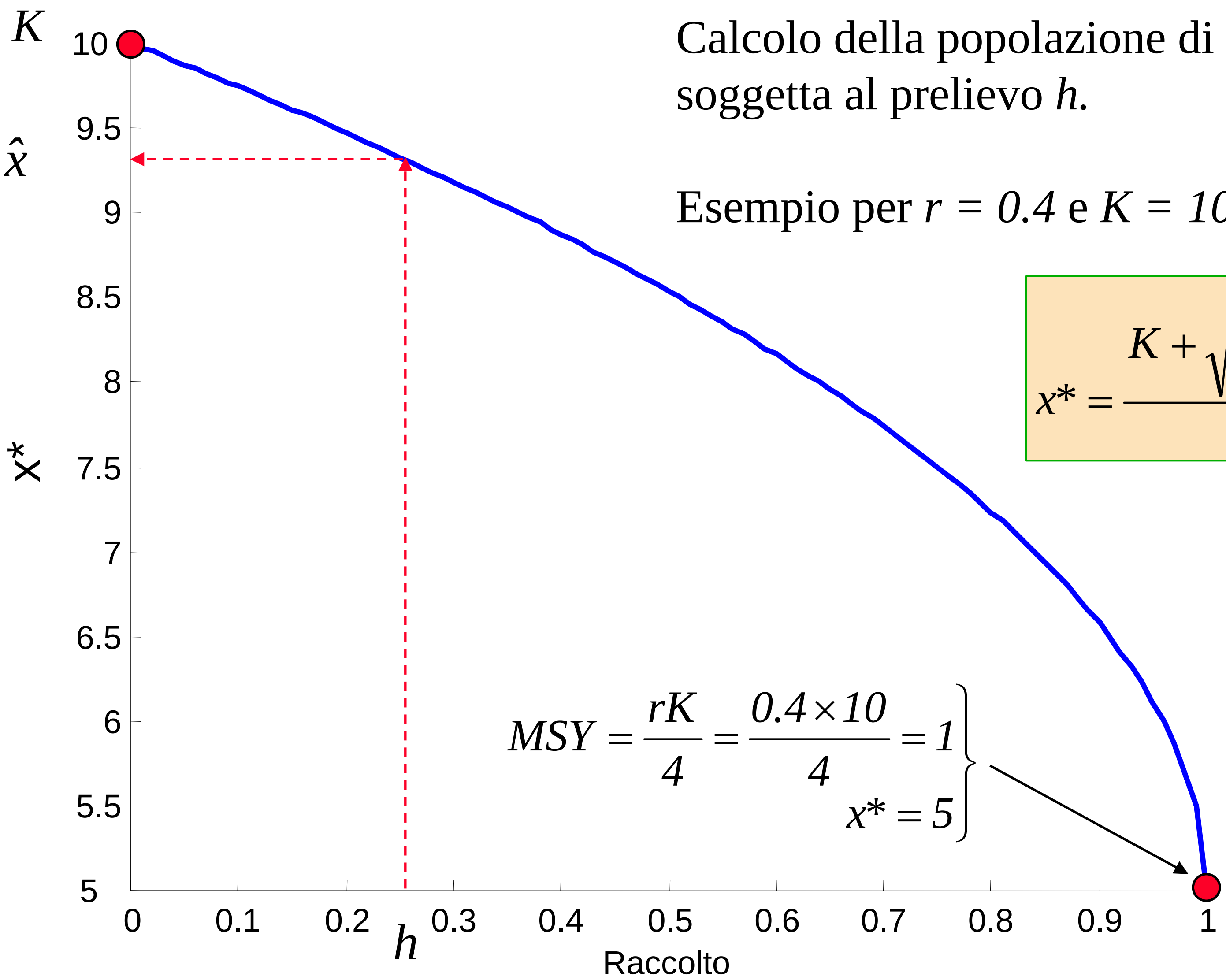


Equilibrio a sfruttamento costante

Calcolo della popolazione di equilibrio x* soggetta al prelievo *h*.

Esempio per $r = 0.4$ e $K = 10$

$$x^* = \frac{K + \sqrt{K^2 - 4\frac{Kh}{r}}}{2}$$



$$\left.\begin{aligned} MSY = \frac{rK}{4} = \frac{0.4 \times 10}{4} = 1 \\ x^* = 5 \end{aligned}\right\}$$

Sfruttamento costante sostenibile

- Se lo sfruttamento è inferiore a h_{MSY}, si hanno due equilibri, separati da x_{MSY}

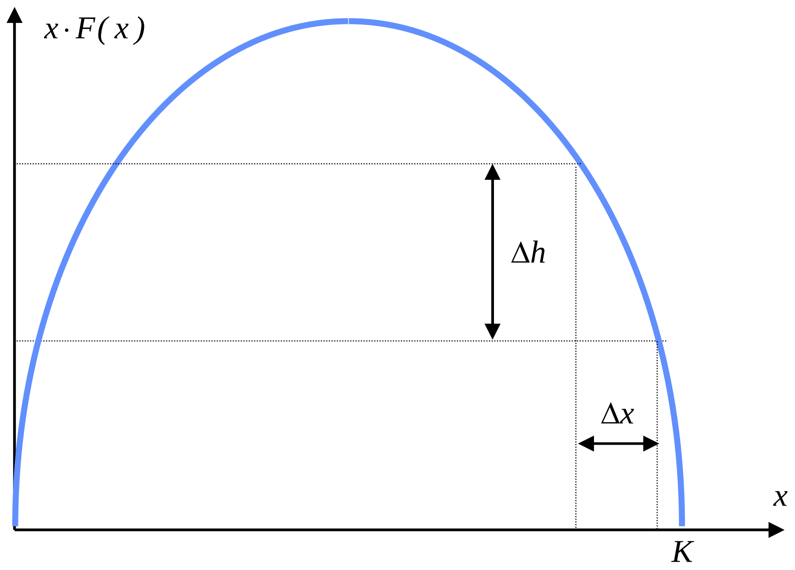
$$x_1 < x_{MSY} < x_2$$

- L'equilibrio instabile (x_1) è un *repulsore* e respinge le traiettorie
  - verso l'origine (estinzione) se all'inizio dello sfruttamento la popolazione si trovava ad un livello inferiore di x_1
  - verso l'equilibrio stabile (x_2) se all'inizio dello sfruttamento la popolazione si trovava ad un livello superiore di x_1
- L'equilibrio stabile (x_2) è un *attrattore* per tutte le traiettorie originate da popolazioni iniziali superiori a x_1

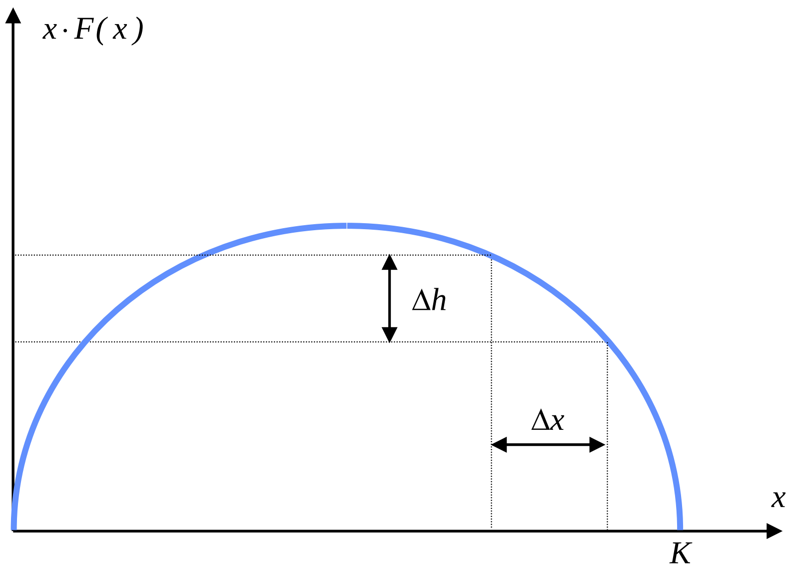
$$h < h_{MSY} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 < x_{MSY} & \textit{Instabile, respinge tutte le traiettorie} \\ x_2 > x_{MSY} & \textit{Stabile, attira le traiettorie per } \forall x_o > x_1 \end{cases}$$

Sfruttamento costante e strategie bionomiche

- Risorsa a strategia r
  - Alto rateo di crescita
  - L’incremento di raccolto Δh produce una variazione modesta di popolazione, perché il rimpiazzo degli individui prelevati è veloce
  - L’allontanamento dalla capacità portante può essere compensato entro ampi limiti



- Risorsa a strategia K
  - Basso rateo di crescita
  - L’incremento di raccolto Δh produce una variazione notevole di popolazione, perché il rimpiazzo degli individui prelevati è lento
  - L’allontanamento dalla capacità portante può essere compensato solo se è limitato.

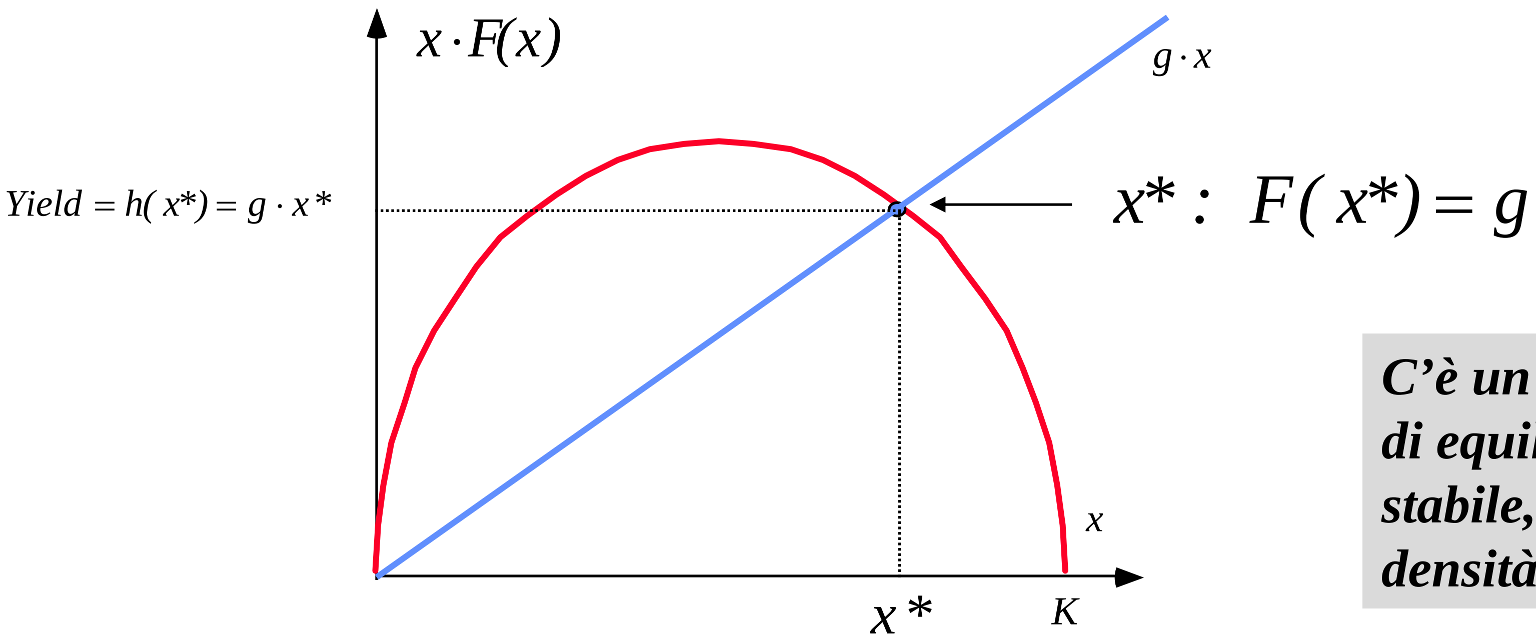


Sfruttamento proporzionale

- Lo sfruttamento è proporzionale alla densità di popolazione attuale

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{r \cdot x \cdot \left[1 - \frac{x}{K}\right]}_{\text{crescita logistica}} - \underbrace{g \cdot x}_{\text{sfruttamento proporzionale}}$$

Problema: *è necessario conoscere la consistenza della popolazione ad ogni istante t*



C'è un solo punto di equilibrio ed è stabile, per qualsiasi densità di popolazione

Stabilità dell'equilibrio nel prelievo proporzionale

- Cerchiamo il punto di equilibrio

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot F(x) - g \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x^*) = g \quad \Rightarrow \quad x^* = F^{-1}(g)$$

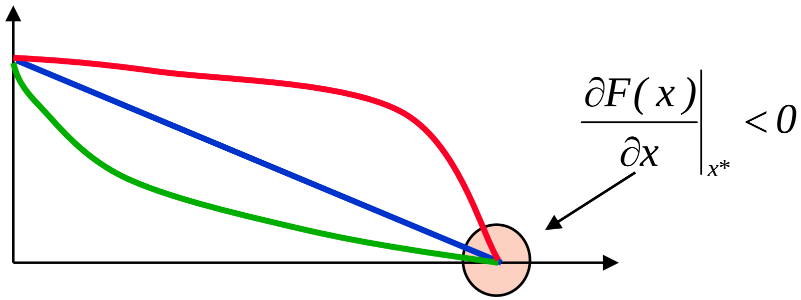
- Per la stabilità, al punto di equilibrio la derivata totale del rateo della popolazione dovrà essere negativo

$F(x^*) - g = 0$

$$\frac{\partial \left(x \cdot F(x) - g \cdot x \right)}{\partial x} = F(x^*) + x^* \cdot \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x^*} - g < 0$$

- Dato che è sicuramente x* > 0, dovrà essere

$$\boxed{\left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x^*} < 0}$$



- Ma questa era una delle condizioni necessarie perché *F(x)* sia una funzione di crescita, perciò è sicuramente verificata $\Rightarrow$ ***il prelievo proporzionale è sempre stabile per funzioni di crescita ammissibili <u>(non depensate)</u>***

Sfruttamento proporzionale della Logistica

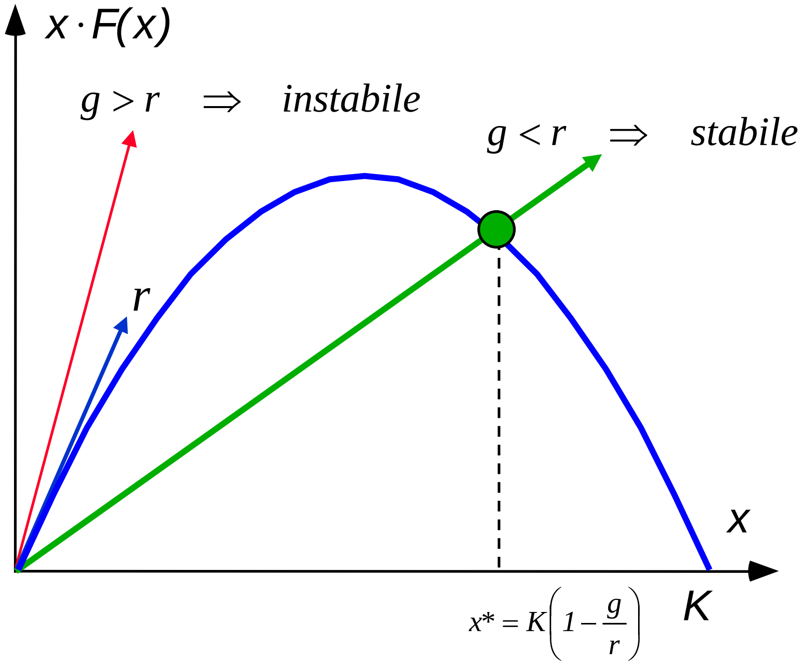
☞ Punto di equilibrio $$r\left(1-\frac{x}{K}\right)=g \quad \Rightarrow \quad x^*=K\left(1-\frac{g}{r}\right)$$

☞ Condizione di stabilità $$\frac{dF}{dx}<0 \quad \Rightarrow \quad r>g$$ infatti

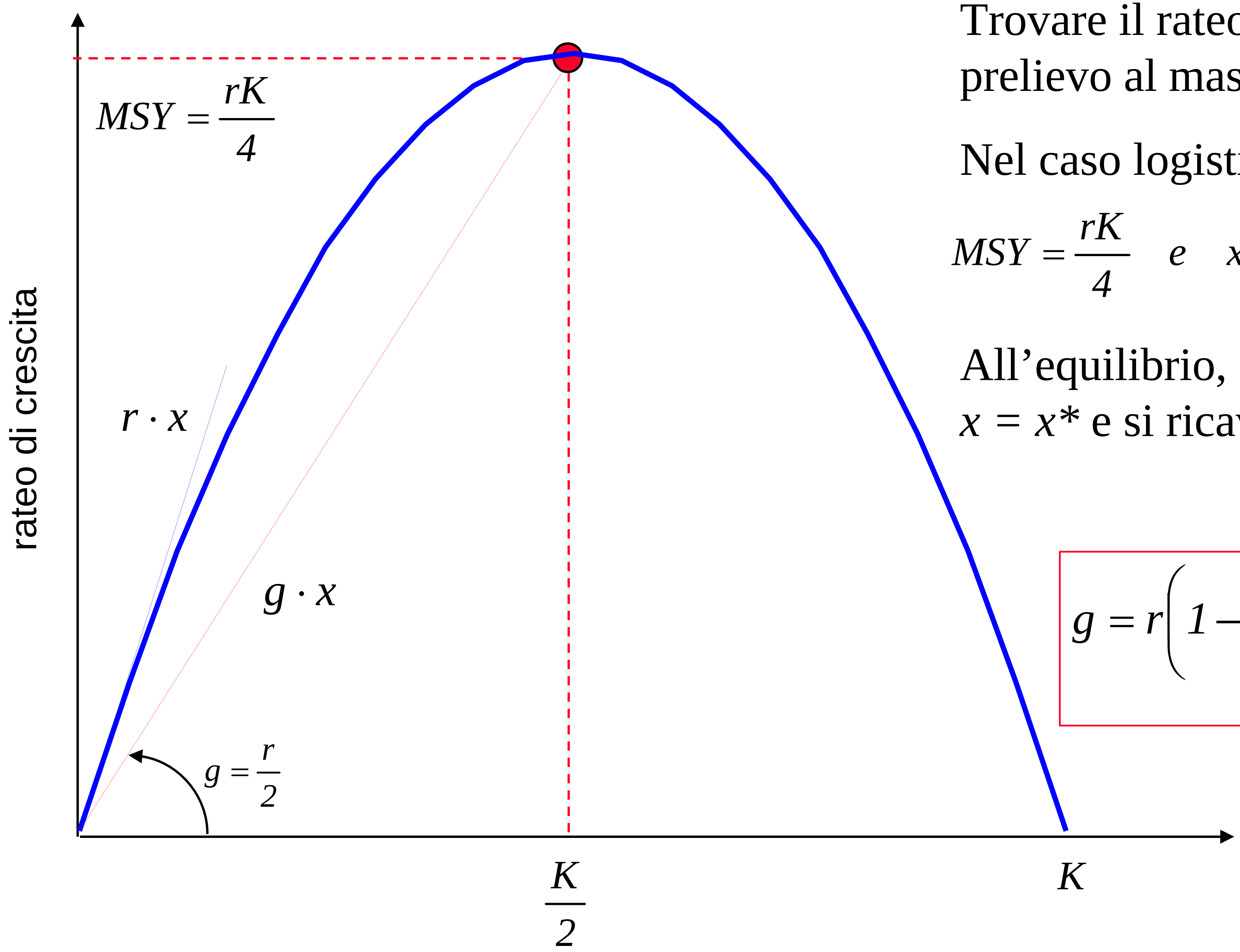
$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x^*}=\frac{\partial}{\partial x}\left[rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-gx\right]\Bigg|_{x^*}=r\left(1-\frac{2x^*}{K}\right)-g$$

$$=r\left(1-\frac{2K\left(1-\frac{g}{r}\right)}{K}\right)-g=r\left(1-2\left(1-\frac{g}{r}\right)\right)-g$$

$$=r-2r+2g-g\;=-r+g<0\;\Rightarrow\; r>g$$



Sfruttamento al massimo livello (MSY) logistico



Trovare il rateo g_{MSY} che realizza il prelievo al massimo livello di crescita

Nel caso logistico si sa che

$$MSY = \frac{rK}{4} \quad e \quad x^* = \frac{K}{2}$$

All'equilibrio, si sostituisce $x = x^*$ e si ricava g_{MSY}

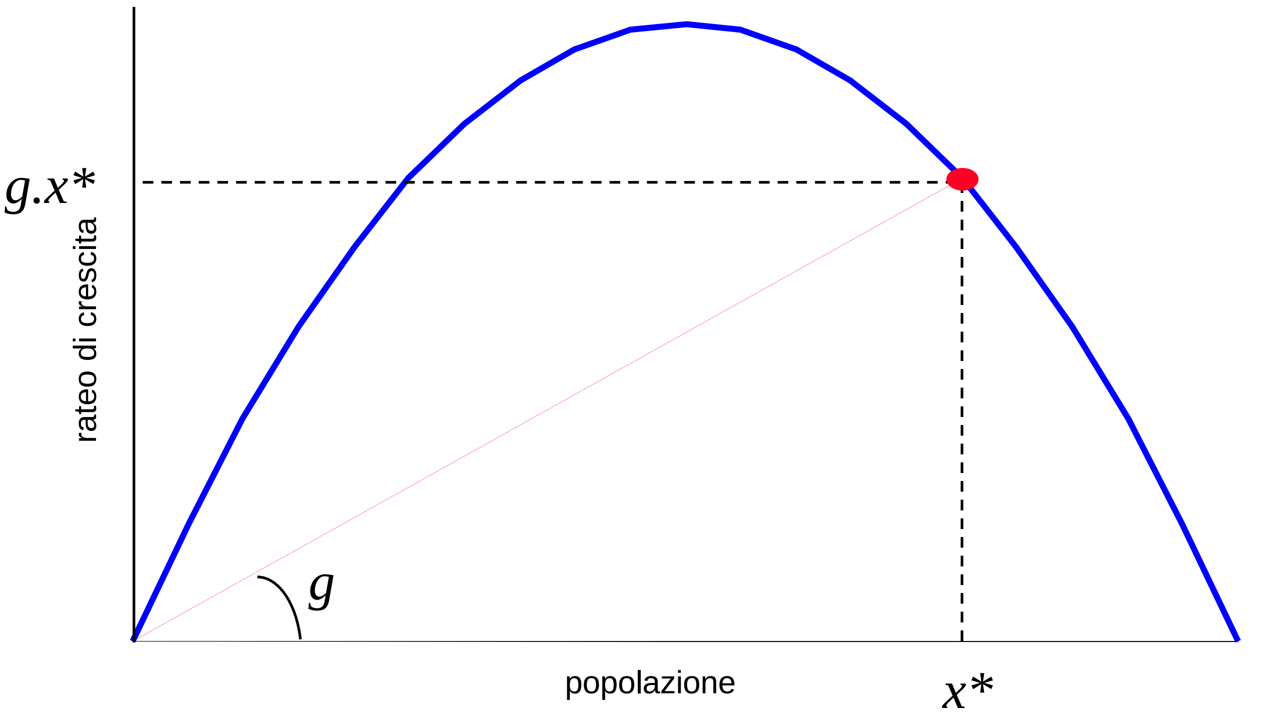
$$\boxed{g = r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right)_{x^* = \frac{K}{2}} \Rightarrow g_{MSY} = \frac{r}{2}}$$

Sfruttamento ad un generico livello

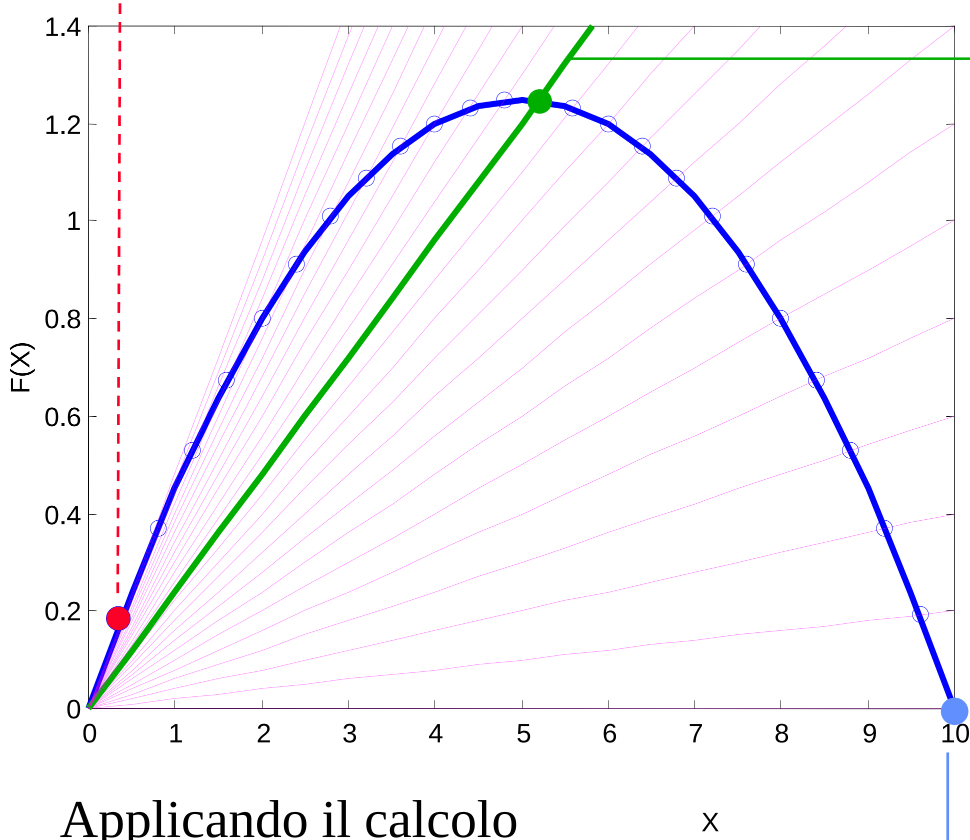
- Fissato il livello di prelievo g si ricava la popolazione stazionaria per quel prelievo

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right)=gx \quad \Rightarrow x^*=K\left(1-\frac{g}{r}\right)$$

- Il raccolto ottenuto con questo valore di *g* è dato da *x*.g*

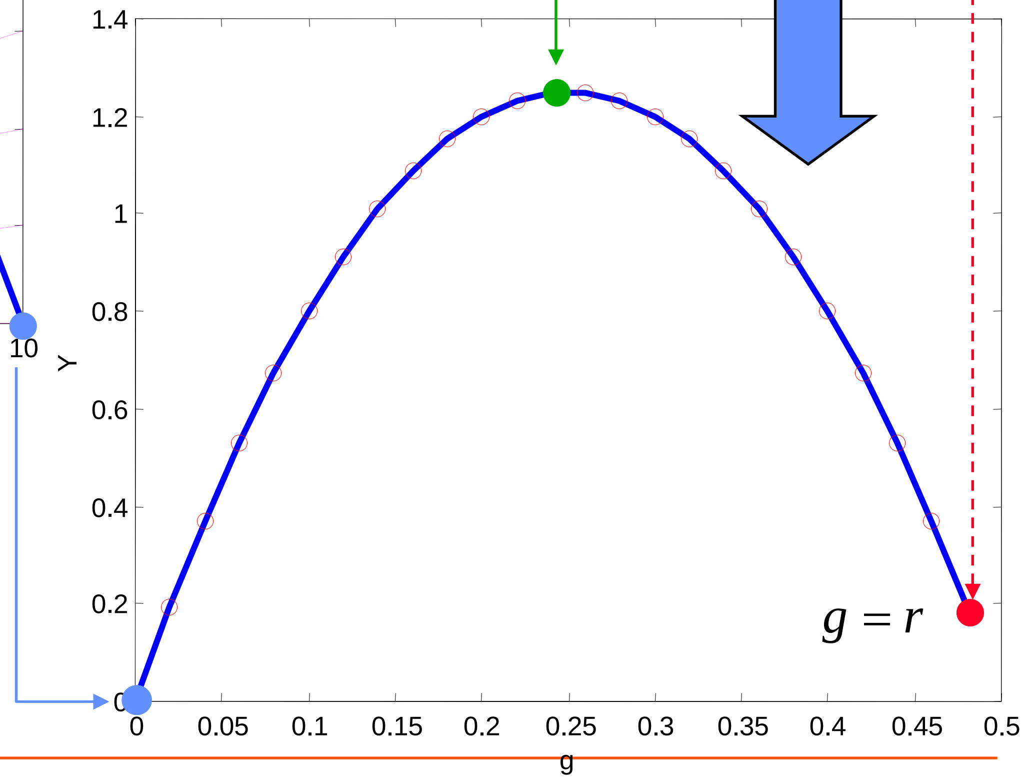


Equilibri dello sfruttamento proporzionale



Questo rateo di prelievo fornisce il massimo raccolto $g_{MSY} = r/2$

I ratei superiori a g_{MSY} forniscono un raccolto minore

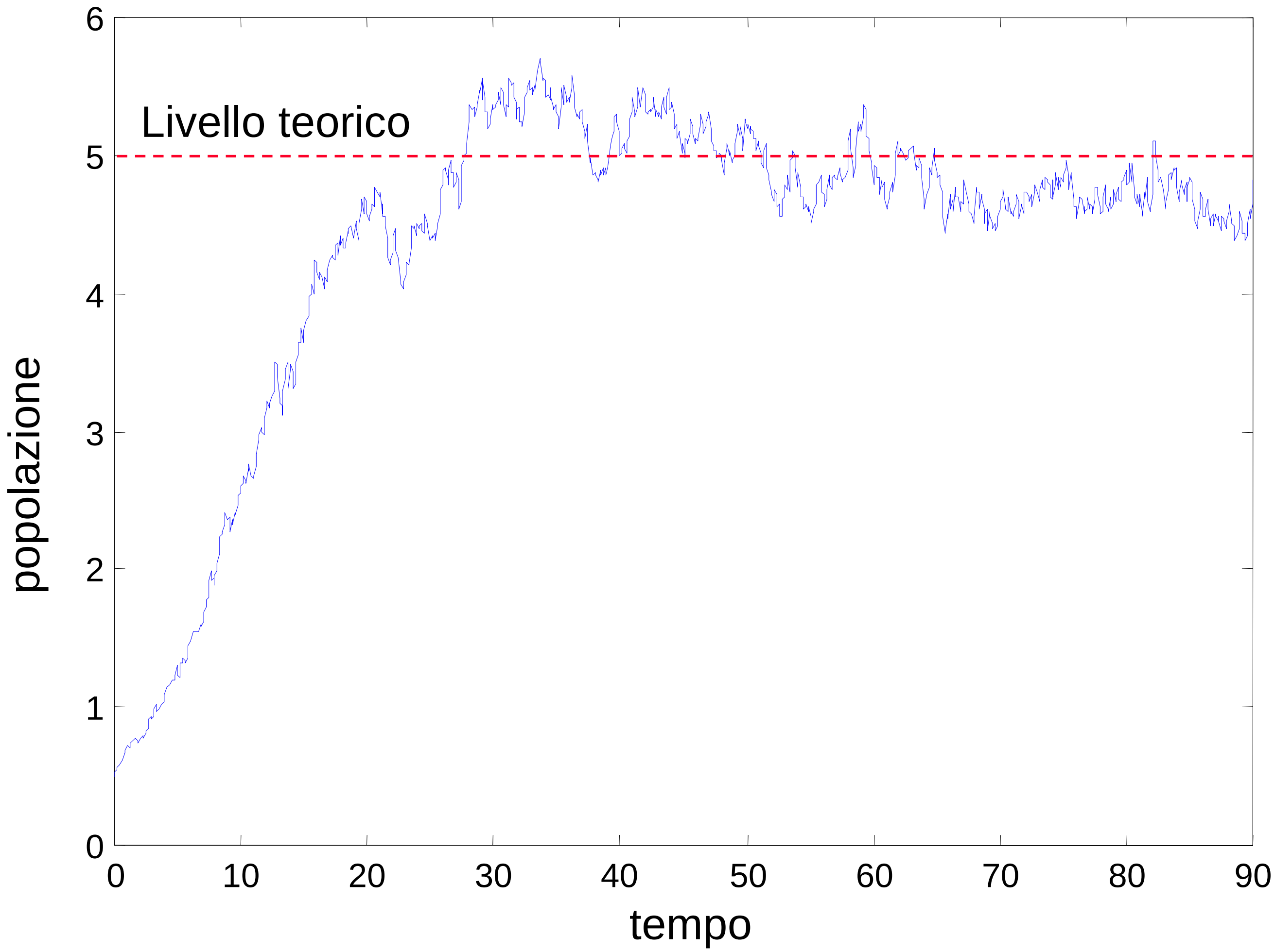


Applicando il calcolo precedente a tutti i valori di g ammissibili $g \in (0,r)$ si ottiene la curva dei ricavi

$$g = 0 \Rightarrow x^* = K$$

$$g = r$$

Robustezza del prelievo proporzionale



Il prelievo proporzionale, finché soddisfa alla condizione di stabilità ($g < r$), è ***robusto*** nei confronti della variabilità demografica.

Nota: il prelievo costante non lo è!

In questa simulazione la variabilità demografica su r ha varianza pari a r/4.

Sfruttamento al massimo livello (Richards)

- ***Preliminare: ricavare i punti estremi della funzione di Richards***
- Si trova il rateo di prelievo massimo MSY, azzerando la derivata della funzione di crescita

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r}{n}x\left(1-\frac{x^n}{K^n}\right)\right)=\frac{r}{n}\left(1-(n+1)\frac{x^n}{K^n}\right)=0$$

- da cui si ricava x_{MSY}

$$x_{MSY}=\frac{K}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

- ed il rateo massimo di crescita MSY, ottenuto sostituendo x_{MSY} nel rateo

$$MSY=\frac{rK}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}$$

Sfruttamento al massimo livello (Richards)

- Si considera ora la funzione completa (crescita - prelievo)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{r}{n} x \left(1 - \frac{x^n}{K^n} \right) - g \cdot x = 0$$

- All'equilibrio si sostituisce ad *x* il valore

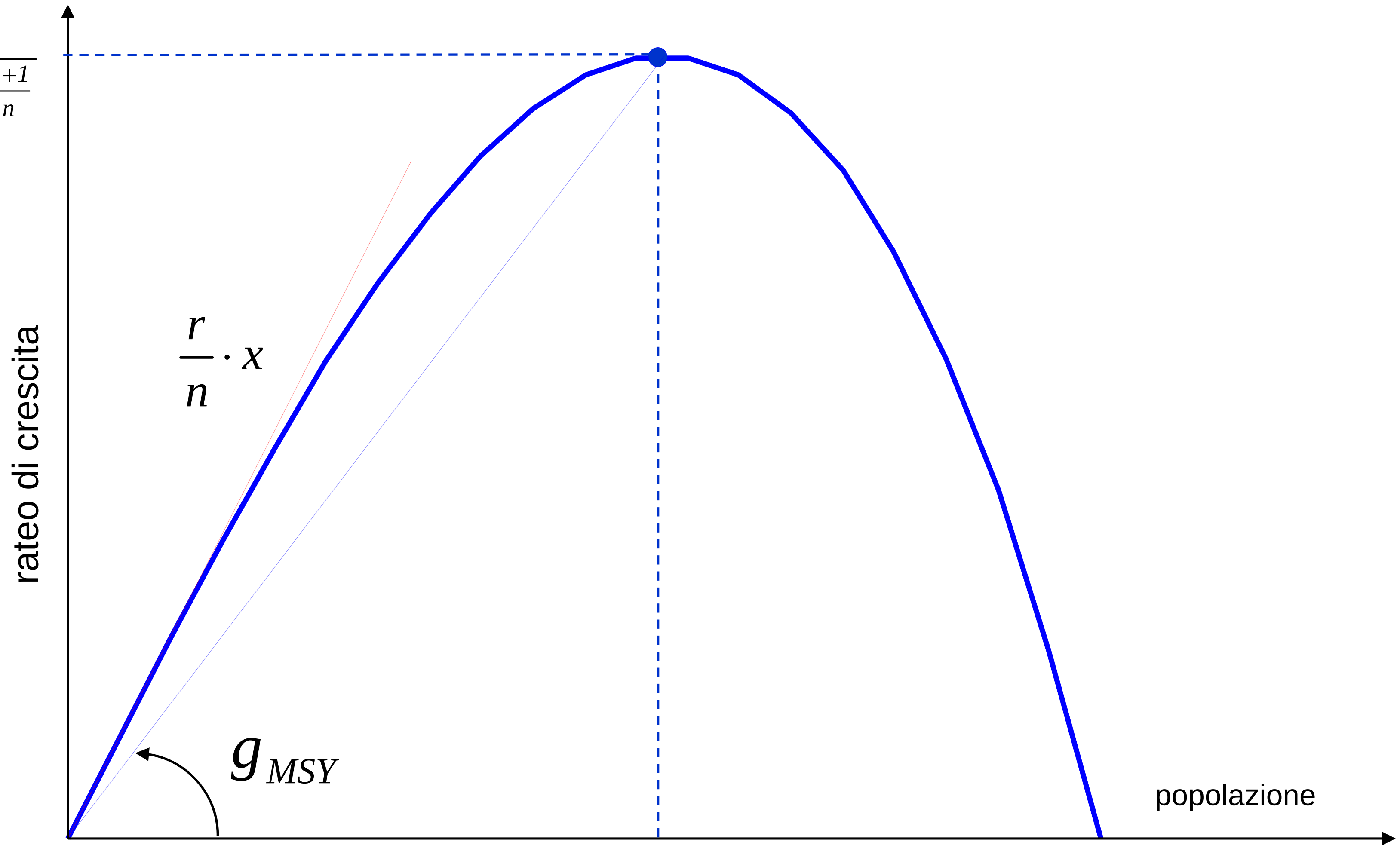
$$x_{MSY} = \frac{K}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

- ottenendo il rateo massimo g_{MSY}

$$\boxed{g_{MSY} = \frac{r}{n} \left(1 - \frac{x_{MSY}^n}{K^n} \right)}$$

Sfruttamento al massimo livello (Richards)

$$MSY = \frac{rK}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}$$



$$x_{MSY} = \frac{K}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

Altre possibilità: prelievo proporzionale a $\sqrt{x}$

- Supponiamo un prelievo proporzionale alla radice quadrata della popolazione

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot F(x) - g\sqrt{x}$$

- Nel caso logistico questo implica che all'equilibrio si ha:

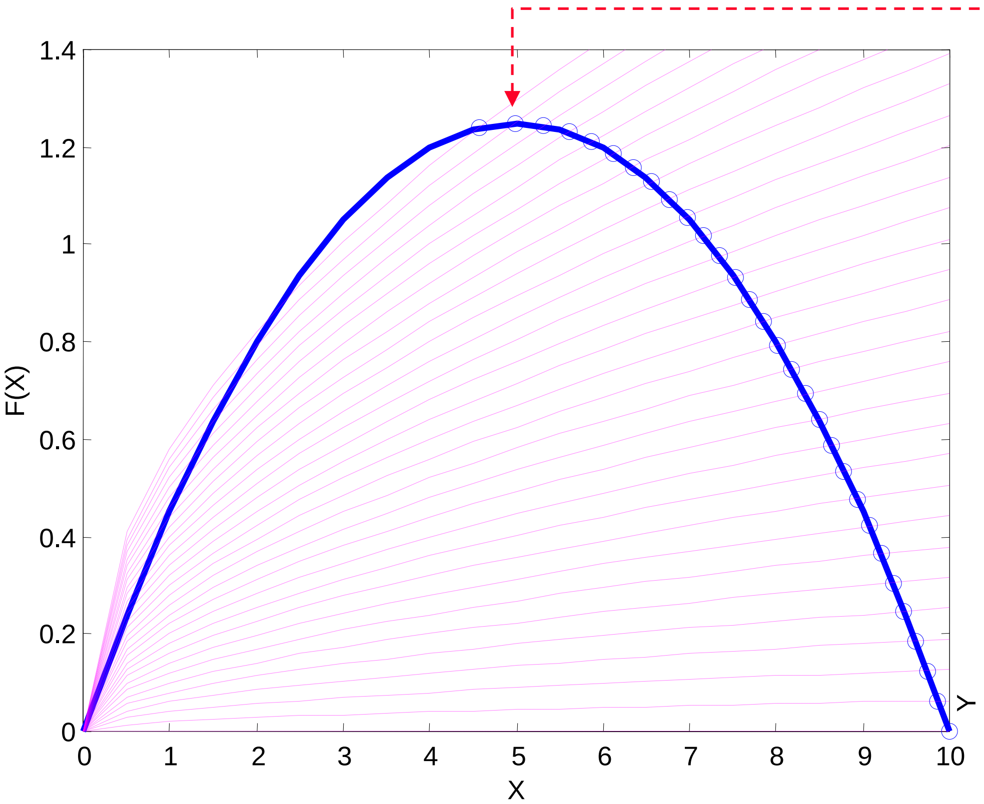
$$\frac{dx}{dt} = x \cdot r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - g\sqrt{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot r^2 \left(1 - \frac{x}{k}\right)^2 = g \cdot x$$

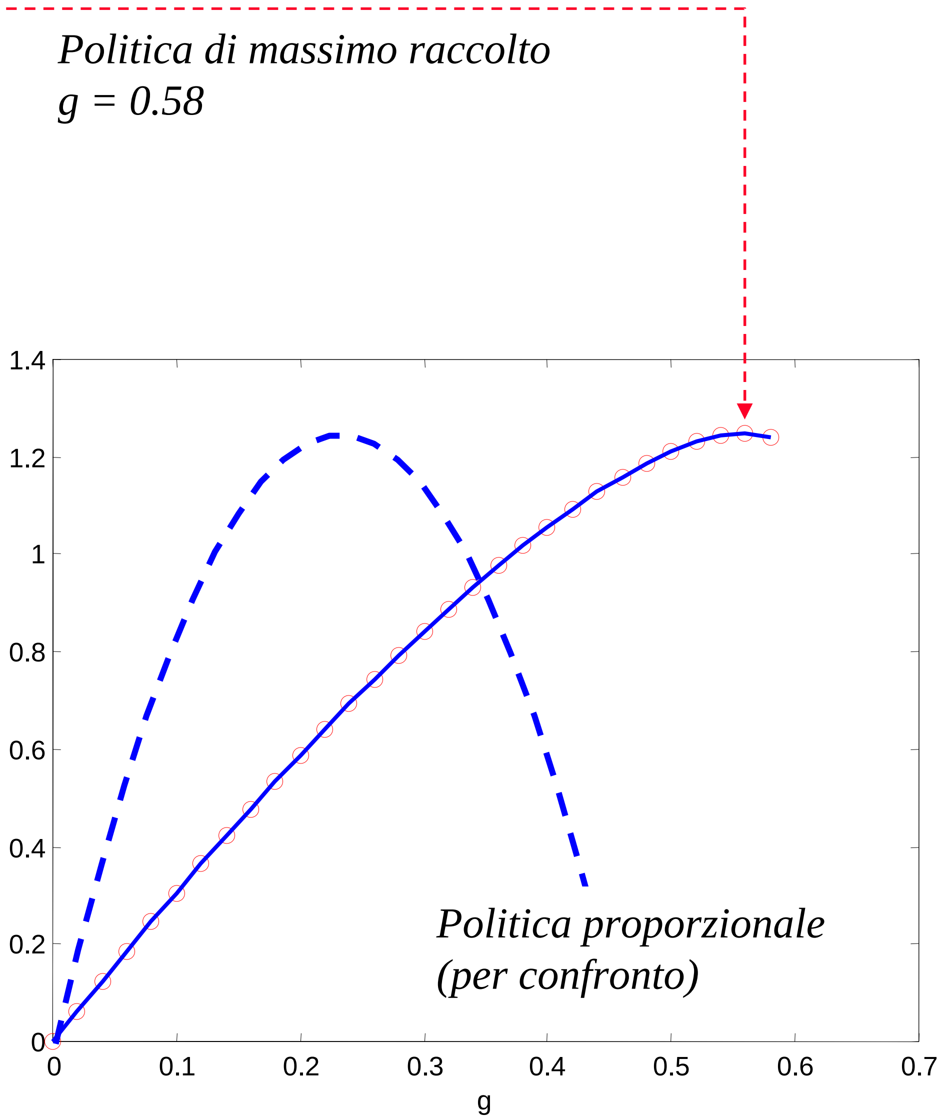
- L'equilibrio è soluzione dell'equazione di terzo grado

$$\boxed{x^3 \frac{r^2}{K^2} - 2x^2 \frac{r^2}{K} - x r^2 - g^2 = 0}$$

- Che ha tre radici reali, di cui una non valida (x > K). Le altre due radici sono compatibili con la dinamica di prelievo.

Prelievo proporzionale a $\sqrt{x}$



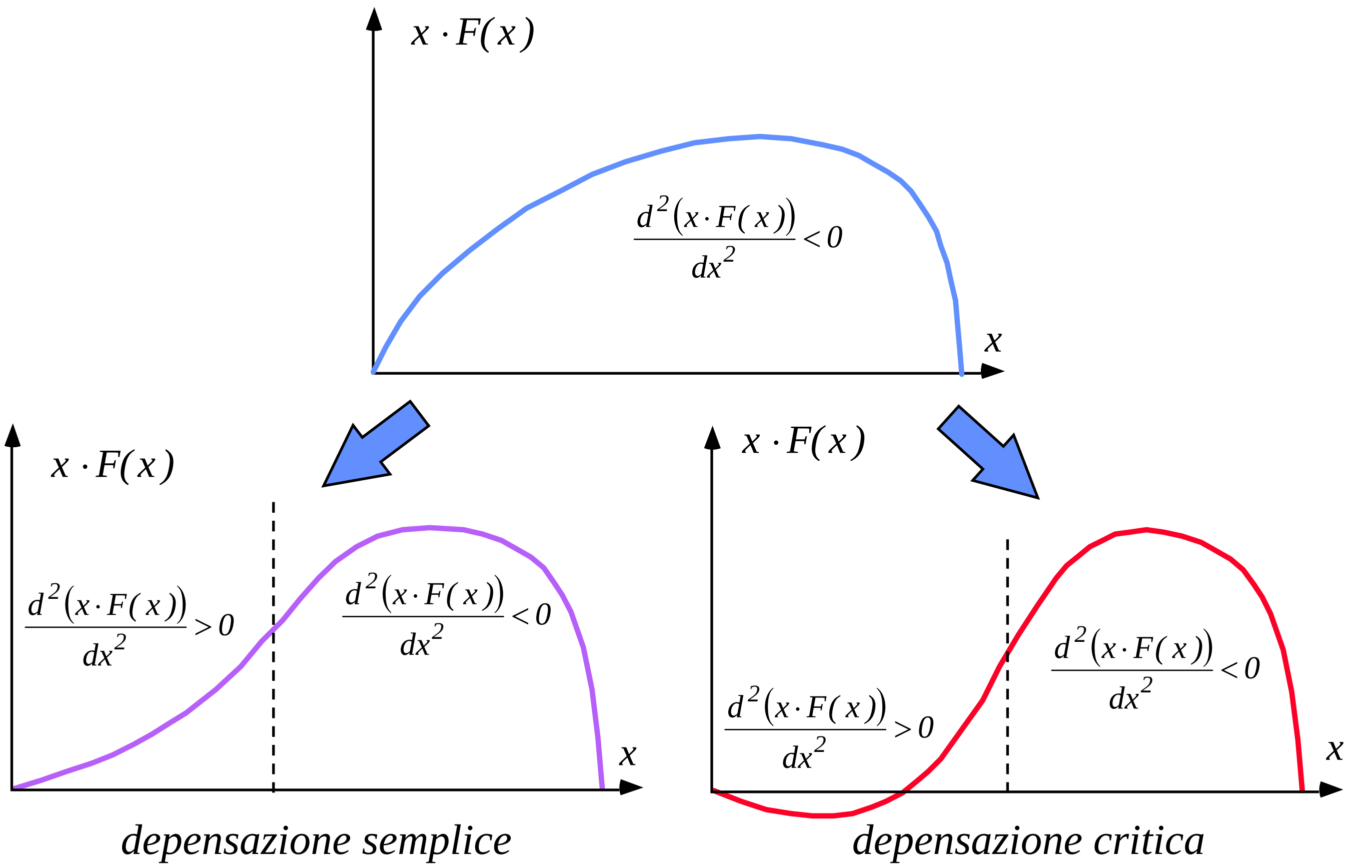


Il raccolto (Y) è minore a parità di sforzo (g) rispetto alla politica proporzionale

Sfruttamento di popolazioni depensate

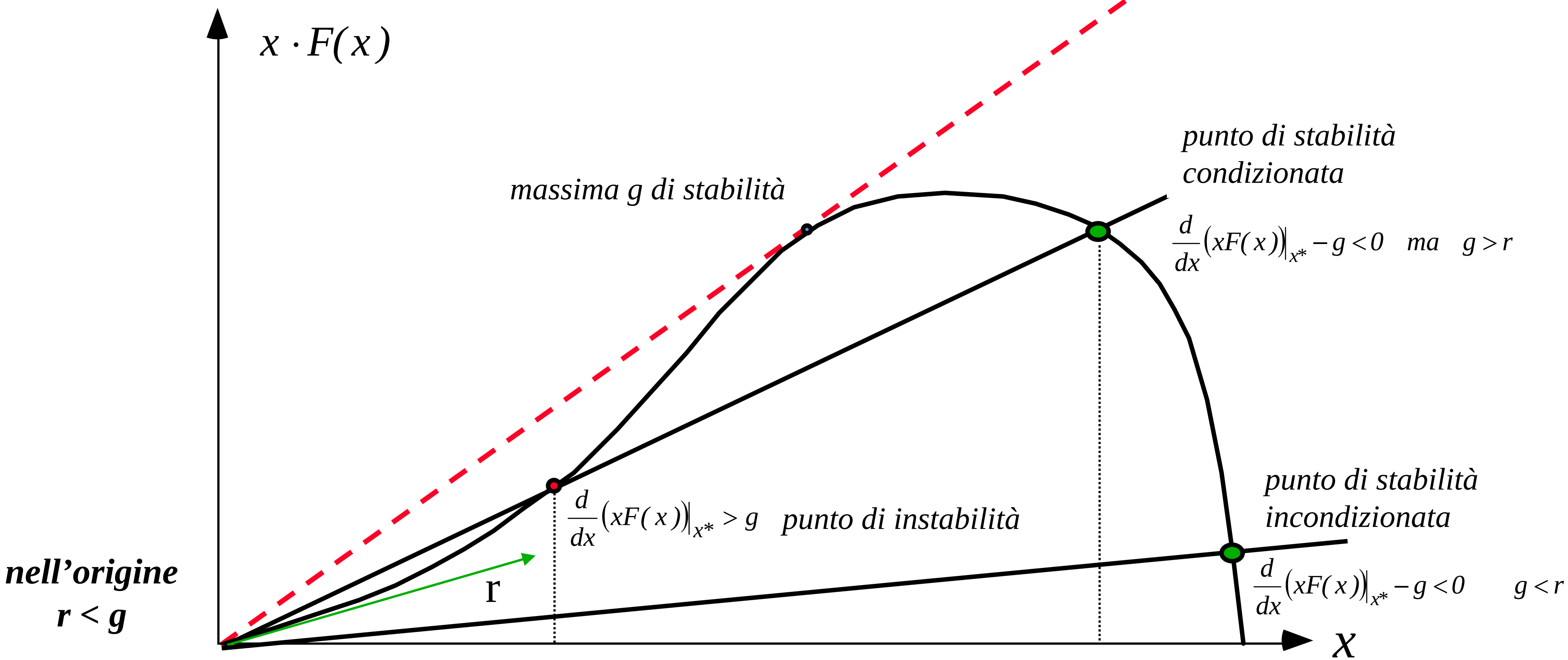
☞ ***Depensazione:*** rateo di crescita basso o negativo per basse densità di popolazione

- ***Depensazione semplice:*** flesso nel tratto ascendente della funzione di crescita
- ***Depensazione critica:*** derivata nulla o negativa della funzione di crescita per x = 0



Stabilità del prelievo con depensazione

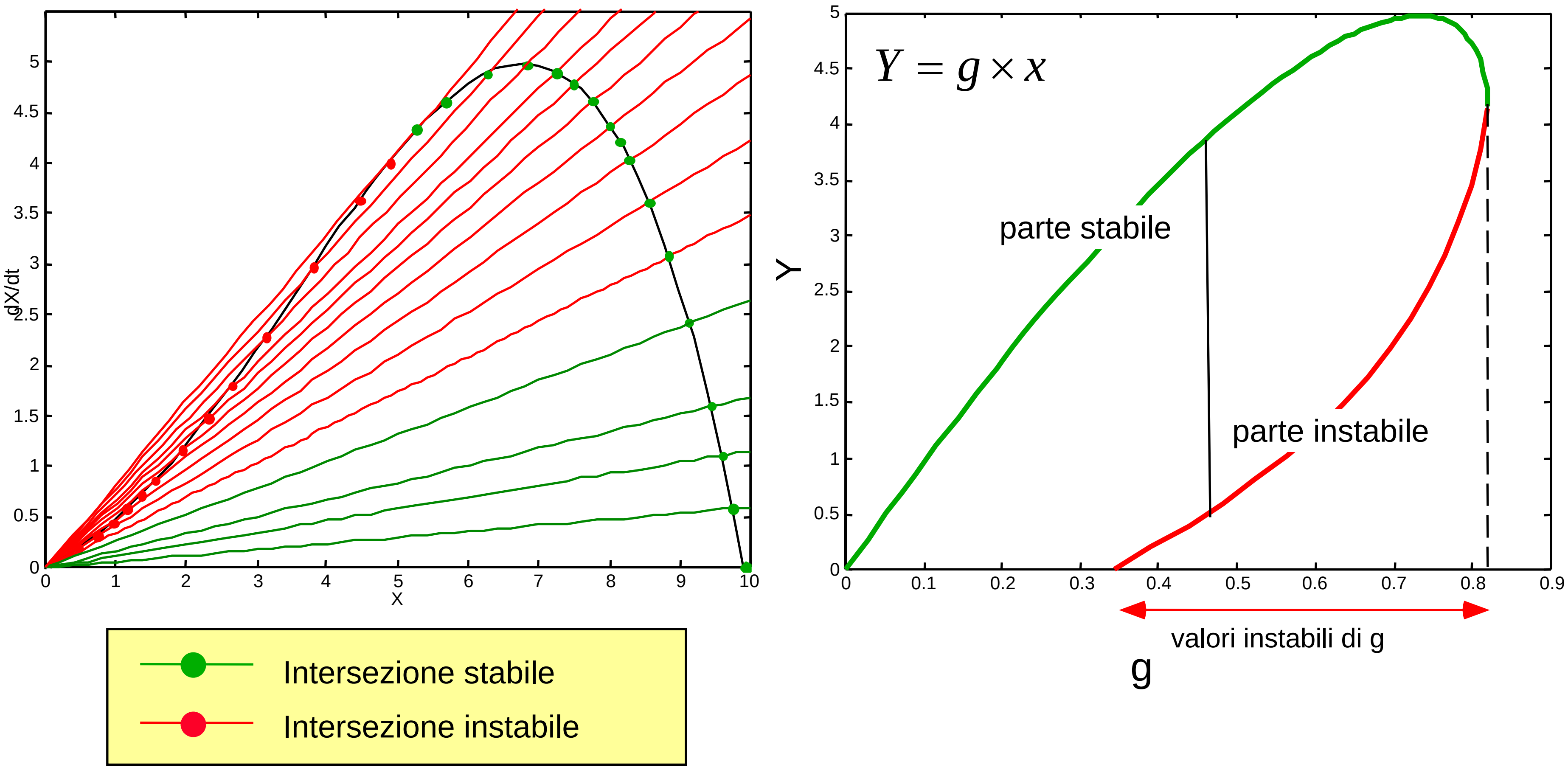
- Nel caso di popolazioni depensate il vincolo $g < r$ è violato, provocando l'instabilità dell'equilibrio
- Al punto instabile è $\dfrac{df}{dx} > 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(xF(x)\right)\Big|_{x^*} > g$



Sfruttamento con depensazione

Punti di equilibrio dello sfruttamento

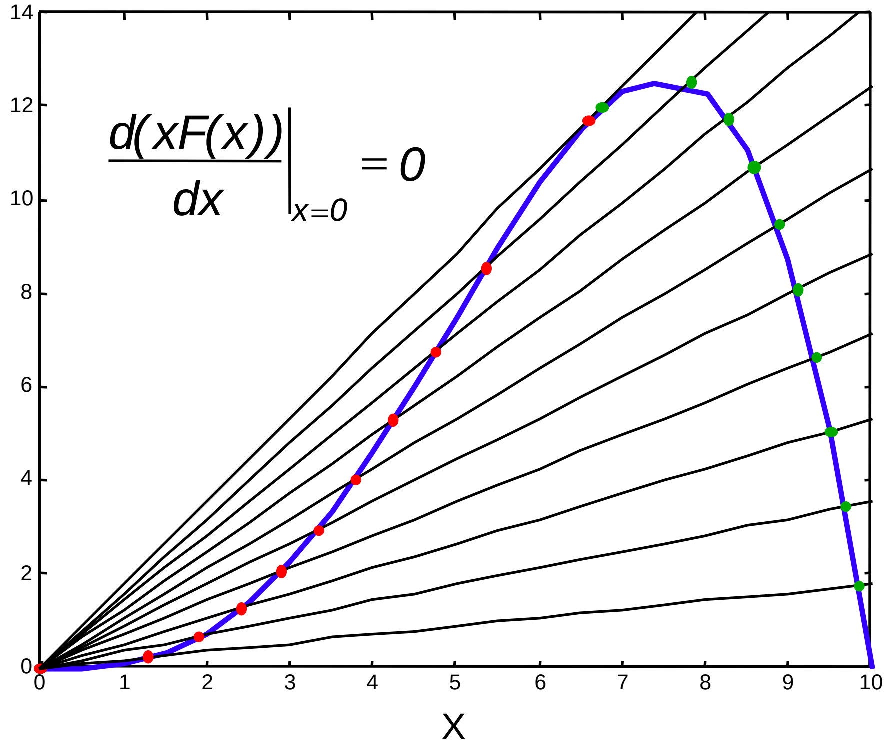
Curva di sfruttamento



Sfruttamento con depensazione critica

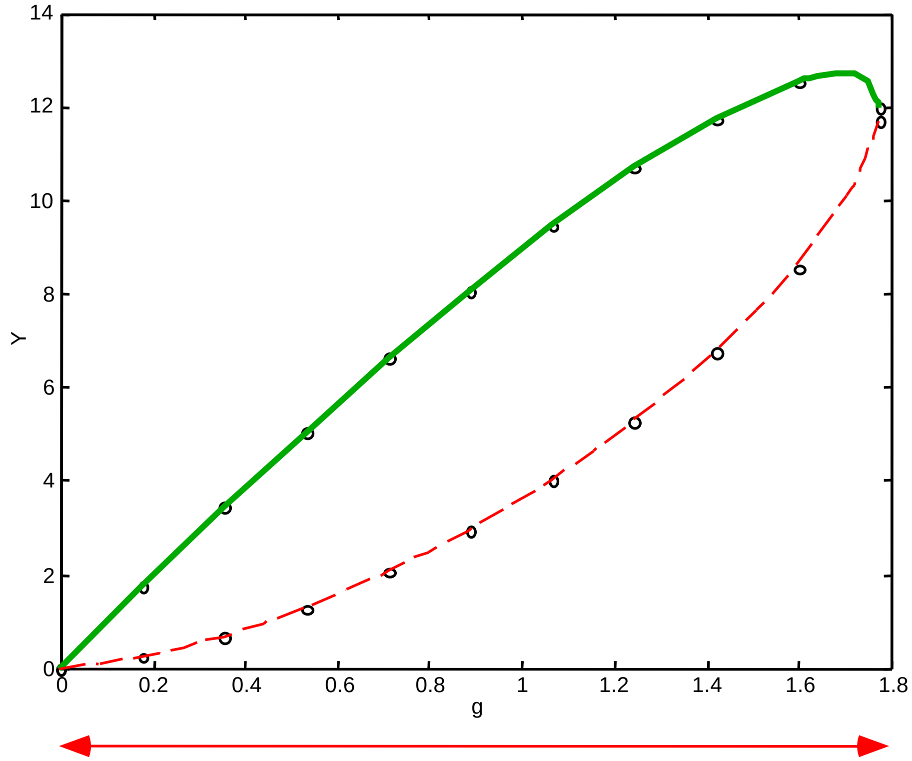
$$\left.\frac{d\left(x \cdot F(x)\right)}{dx}\right|_{x=0} \leq 0$$

Punti di equilibrio dello sfruttamento



● Equilibrio instabile ● Equilibrio stabile

Curva di sfruttamento



Ogni valore di g è potenzialmente instabile

Bibliografia

- Clark. C.W., *Mathematical Bioeconomics: the optimal management of renewable resources*, Wiley, 1990.
- Starfield, A.M. and Bleloch A.L., *Building Models for Conservation and Wildlife Management*, MacMillan, 1986.
- Grant W.E., *System Analysis and Simulation in Wildlife and Fisheries Sciences*, Wiley, 1986.
- Saila S.B., Recksiek C.W., Prager M.H., *Basic Fishery Science Program*, Elsevier, 1988.
- Jacobs O.R.L., Ballance D.J., Horwood J.W. "Fishery management as a a problem in feedback control", *Automatica*, **27** (4): 627 - 639 (1991).
- Nguyen Phong Chau, "Destabilising effect of periodic harvest on population dynamics", *Ecological Modelling*, **127**: 1–9 (2000).