
ANALISI DI SISTEMI NON LINEARI

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = g(x, u)$$

Nonlineare è ogni sistema la cui dinamica non è lineare

Analisi di sistemi nonlineari

Linearizzazione

- ⇒ Approssimazione locale (intorno ai punti di equilibrio) con un sistema lineare

Analisi dell'equilibrio e delle traiettorie

- ⇒ Diversamente dai sistemi lineari, il sistema nonlineare può avere più equilibri non banali ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)

Stabilità

- ⇒ Analisi locale della stabilità del sistema linearizzato
- ⇒ Analisi globale con il Teorema di Lyapunov

Biforcazioni

- ⇒ Comportamenti “strani” che non hanno equivalente nel campo lineare

La matrice Jacobiana

- ☞ Intorno al punto di equilibrio il sistema è approssimabile con uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \tilde{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \tilde{\mathbf{u}} + o(\tilde{\mathbf{x}}^2)$$

- ☞ La Matrice Jacobiana \mathbf{J} è la matrice delle derivate prime delle funzioni f_1, \dots, f_n rispetto alle variabili di stato x_1, \dots, x_n .
- ☞ Analogamente si definisce la matrice delle derivate rispetto agli m ingressi u

$$\mathbf{J} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})}$$

Linearizzazione di sistemi tempo-discreti

👉 Approssimazione “locale” di un sistema non-lineare

➡ Nota: ha senso solo intorno a un punto di equilibrio

👉 Procedura in due fasi:

1) Ricerca di un punto di equilibrio

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) \rightarrow (\bar{x}, \bar{u}) : \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$$

2) Approssimazione lineare intorno a questo punto per “piccoli”

incrementi $\tilde{x} = x - \bar{x}$, $\tilde{u} = u - \bar{u} \rightarrow x_t = \bar{x} + \tilde{x}_t$ $x_{t+1} = \bar{x} + \tilde{x}_{t+1}$

$$x_{t+1} = \bar{x} + \tilde{x}_{t+1} = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \tilde{x}_t + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \tilde{u}_t$$

$$\tilde{x}_{t+1} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \tilde{x}_t + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \tilde{u}_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \quad \text{Matrice Jacobiana del sistema}$$

Linearizzazione di sistemi tempo-continui

☞ Stesso criterio e limitazioni del caso t-d

☞ Stessa procedura in due fasi:

1) Ricerca di un punto di equilibrio

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) = 0 \rightarrow (\bar{x}, \bar{u})$$

2) Approssimazione lineare intorno a questo punto per “piccoli” incrementi $\tilde{x} = x - \bar{x}$, $\tilde{u} = u - \bar{u}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} \\ f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \tilde{x} + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \tilde{u} \end{array} \right\} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \tilde{x} + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \tilde{u}$$

Note: A red arrow points from the '0' in the function expansion to the $f(\bar{x}, \bar{u})$ term.

Stabilità del sistema linearizzato

Si possono usare i criteri basati sugli autovalori definiti per i sistemi lineari, applicati alla matrice Jacobiana \mathbf{J}

Sistemi tempo-discreti

$|\lambda_i| < 1$ *risposta asintoticamente stabile $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$*
 $|\lambda_i| > 1$ *risposta instabile $\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty$*

Per $|\lambda|=1$ la dinamica dipende invece dai termini di ordine superiore al primo dello sviluppo di Taylor e non può essere studiata per mezzo del sistema linearizzato.

Sistemi tempo-continui

sistema
 $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ *esponenzialmente stabile $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$*
sistema
 $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ *esponenzialmente instabile $\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty$*

Per $\text{Re}(\lambda)=0$ la dinamica dipende invece dai termini di ordine superiore al primo dello sviluppo di Taylor e non può essere studiata per mezzo del sistema linearizzato.

Implicazioni della linearizzazione sulla stabilità

☞ $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}})$ asintoticamente stabile (a.s.) significa che $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}})$ ha tutti gli autovalori strettamente stabili ($\text{Re}(\lambda_i) < 0$ o $\lambda_i < 1 \ \forall i$).

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}}) \text{ a.s.} \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} \text{ a.s.}$$

☞ $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}})$ asintoticamente instabile (a.i.) significa che $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}})$ ha almeno un autovalore strettamente instabile ($\forall i$ tale che $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ o $\lambda_i > 1$).

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}}) \text{ a.i.} \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} \text{ a.i.}$$

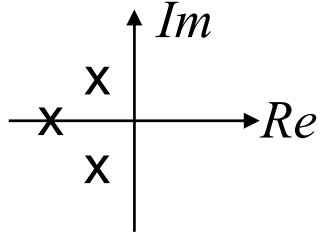
☞ Se $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}})$ è semplicemente stabile o debolmente instabile ($\text{Re}(\lambda_i) = 0$ o $\lambda_i = 1$) non si può dedurre nulla a proposito della stabilità di $\bar{\mathbf{x}}$

⇒ Esempio: sistemi quadratici o cubici

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^2 \quad \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^3$$

Esempi

Autovalori di $J(\bar{x})$

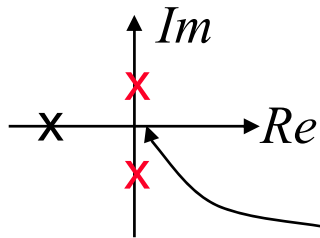


$$\dot{\tilde{x}} = J(\bar{x}) \cdot \tilde{x}$$

Asintoticamente stabile

\bar{x}

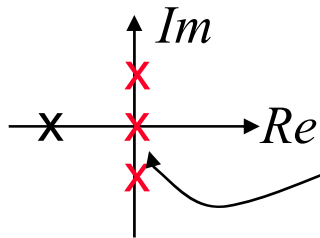
Asintoticamente stabile



Autovalori semplici

Semplicemente stabile

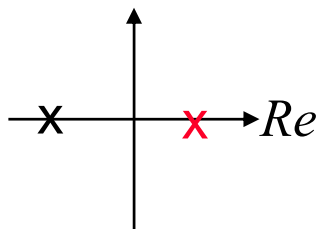
?



Almeno un autovalore multiplo

Debolmente instabile

?



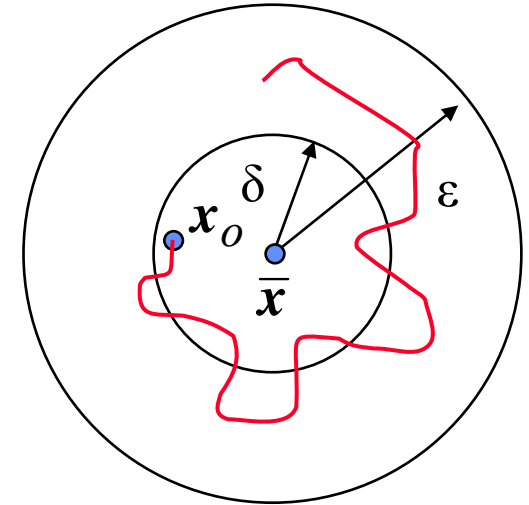
Fortemente instabile

Asintoticamente instabile

Stabilità locale

➡ Un equilibrio \bar{x} è stabile (localmente) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\|x_o - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \forall x_o, t \geq 0$

➡ Qualunque piccola perturbazione dello stato non porta il sistema lontano dall'equilibrio

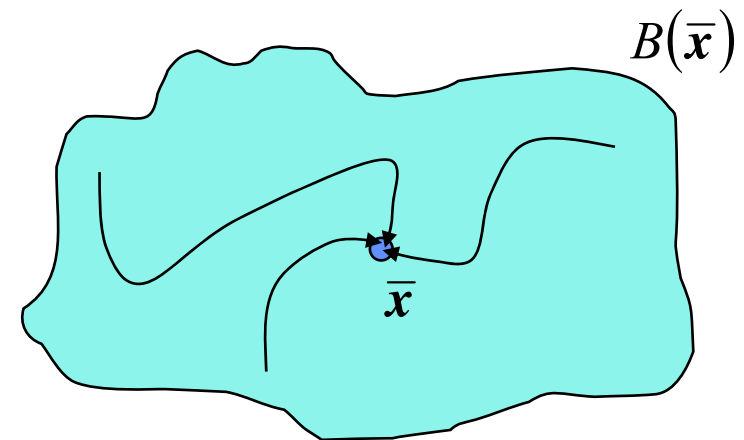


➡ Un equilibrio si dice *asintoticamente* stabile se $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \quad \forall x_o$

➡ Qualunque piccola perturbazione dello stato viene asintoticamente riassorbita

➡ Dato un equilibrio stabile, si definisce bacino di attrazione l'insieme

$$B(\bar{x}) : \{x_o : x(t) \rightarrow \bar{x}\}$$



Altri tipi di equilibrio

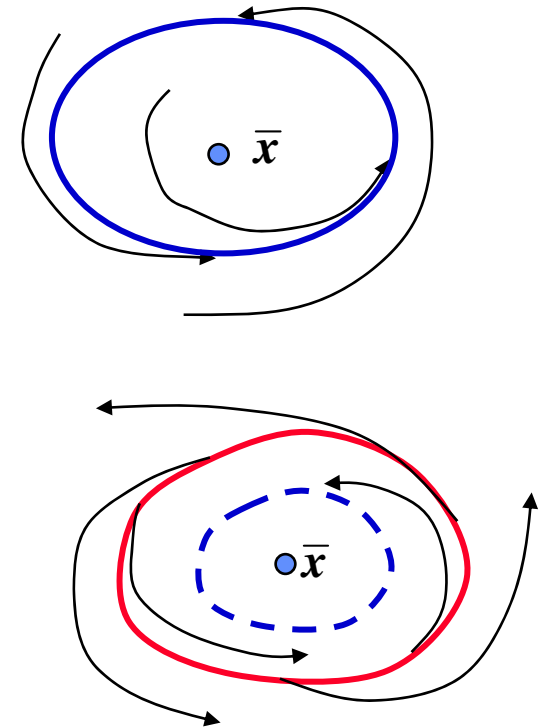
☞ Diversamente dai sistemi lineari, i sistemi nonlineari possono avere ulteriori equilibri, non stazionari, nella forma di **Cicli Limite**

⇒ Nel caso lineare l'unico esempio di ciclo limite è l'oscillatore armonico (autovalori sull'asse immaginario)

☞ Il **Ciclo Limite** associato al punto di equilibrio \bar{x} è un'orbita chiusa che viene ripercorsa infinite volte

☞ A sua volta il Ciclo Limite associato a \bar{x} è detto

- ⇒ Stabile se attira su di sé tutte le orbite vicine
- ⇒ Instabile se le respinge
- ⇒ Nota: dato che il CL instabile respinge anche le orbite all'interno, esso deve contenere un altro CL stabile o un punto stabile
- ⇒ I CL sono i tipici equilibri dei casi a cui lo Jacobiano non dà risposta

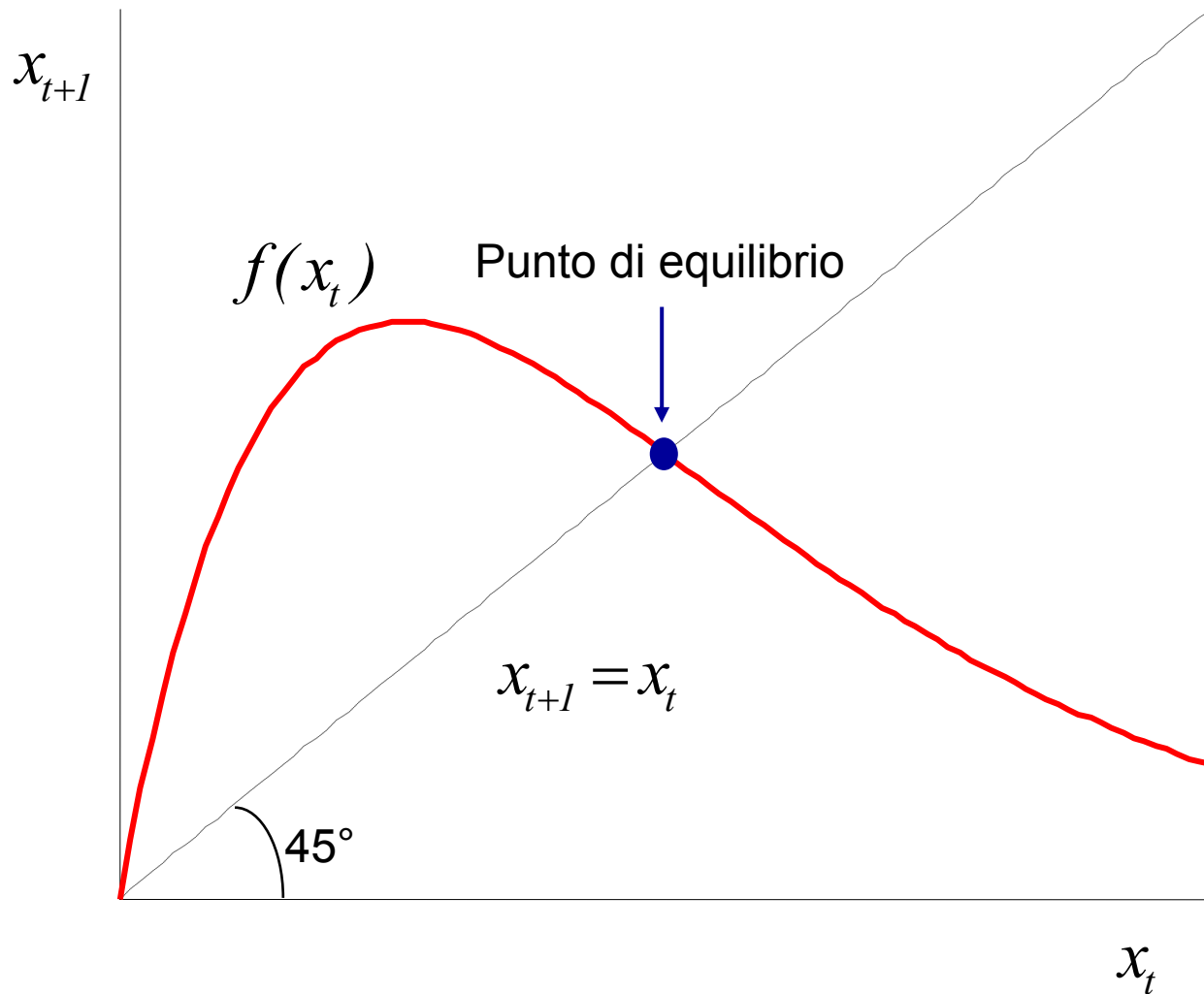


Equilibrio e Stabilità

- ☞ Un sistema nonlineare può avere più punti stazionari, non necessariamente tutti con lo stesso tipo di equilibrio
- ☞ La *Stabilità* è la più importante proprietà di un sistema dinamico
- ☞ *Stabilità* implica che una volta raggiunto l'equilibrio il sistema vi rimane indefinitamente, ma *equilibrio non implica stabilità*
- ☞ Data la struttura del sistema è possibile prevedere se esso può avere uno o più equilibri e quali di questi siano stabili?
- ☞ Per definizione, l'equilibrio soddisfa il seguente sistema di equazioni indefinitamente

$$t-d \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t) \\ \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t \end{cases} \quad t-c \quad 0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$$

Analisi grafica della stabilità tempo-discreta



Nel caso scalare (una sola equazione), il punto di equilibrio si trova nell'incontro delle due funzioni.

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) \\ x_{t+1} = x_t \end{cases}$$

Ma....

equilibrio \Rightarrow stabilità?

No!

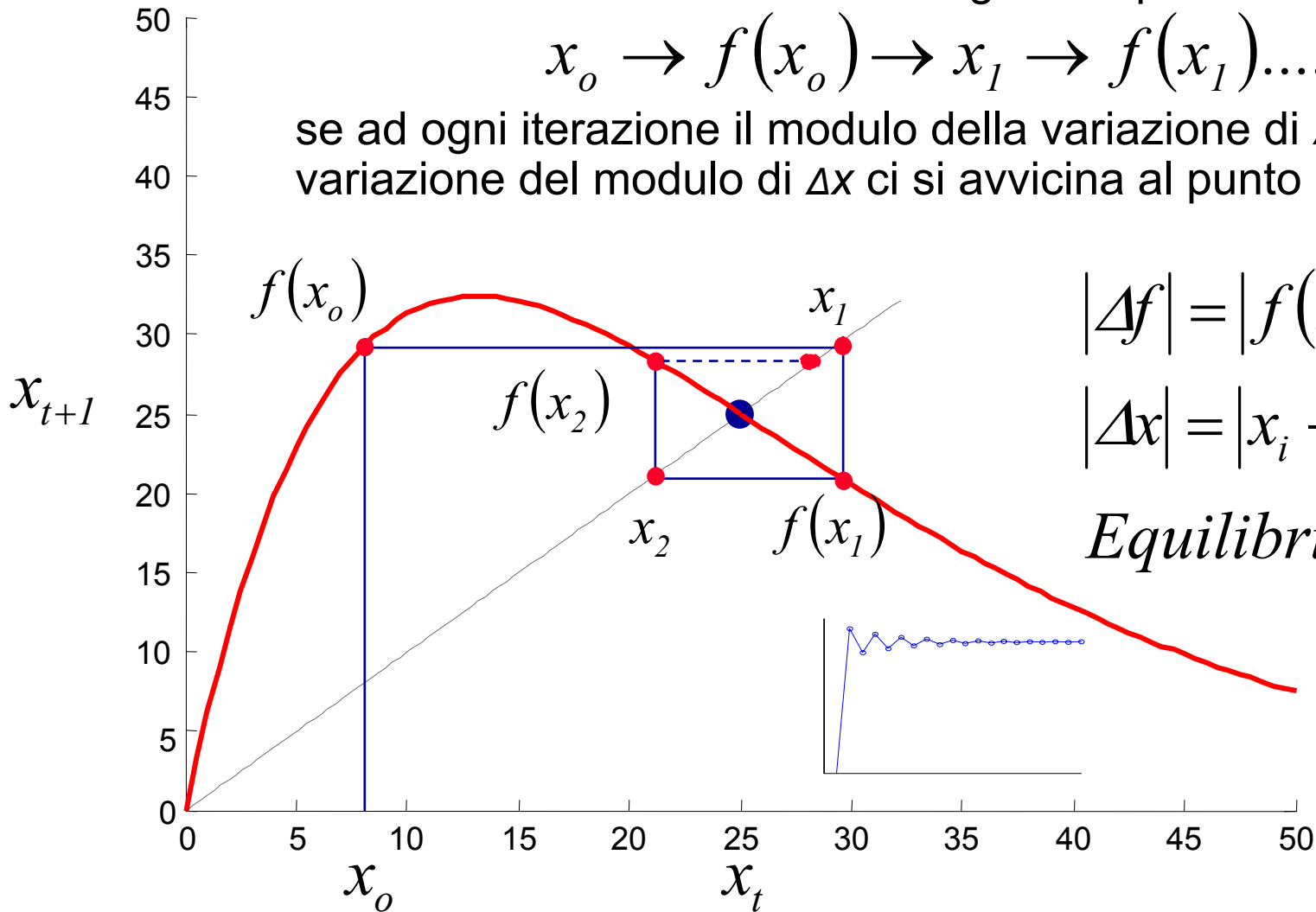
Il fatto che tale punto esista non implica necessariamente che esso sia stabile

Analisi delle iterazioni

Lo schema delle iterazioni si svolge con questa sequenza

$$x_0 \rightarrow f(x_0) \rightarrow x_1 \rightarrow f(x_1) \dots$$

se ad ogni iterazione il modulo della variazione di Δf è minore della variazione del modulo di Δx ci si avvicina al punto di equilibrio



$$|\Delta f| = |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$|\Delta x| = |x_i - x_{i-1}|$$

$$\text{Equilibrio} \Leftrightarrow |\Delta f| < |\Delta x|$$

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| < 1$$

Risultato

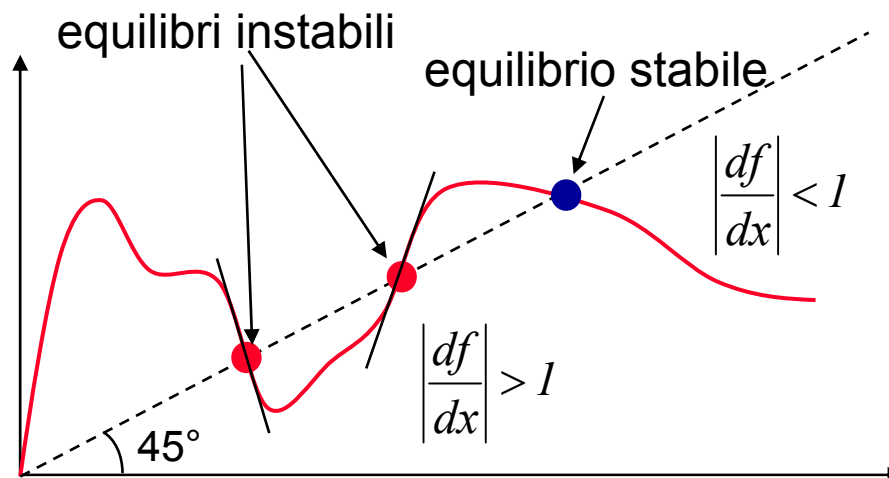
☞ Se dagli incrementi Δ si passa al limite per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| = \left| \frac{df}{dx} \right| < 1$$

☞ **Risultato:** *Il punto di equilibrio è stabile se la derivata della funzione $f(x)$ nel punto di equilibrio è minore di 1 in modulo*

☞ La stabilità riguarda solo il punto in esame

☞ Ad esempio il sistema può avere più equilibri, ma non tutti stabili



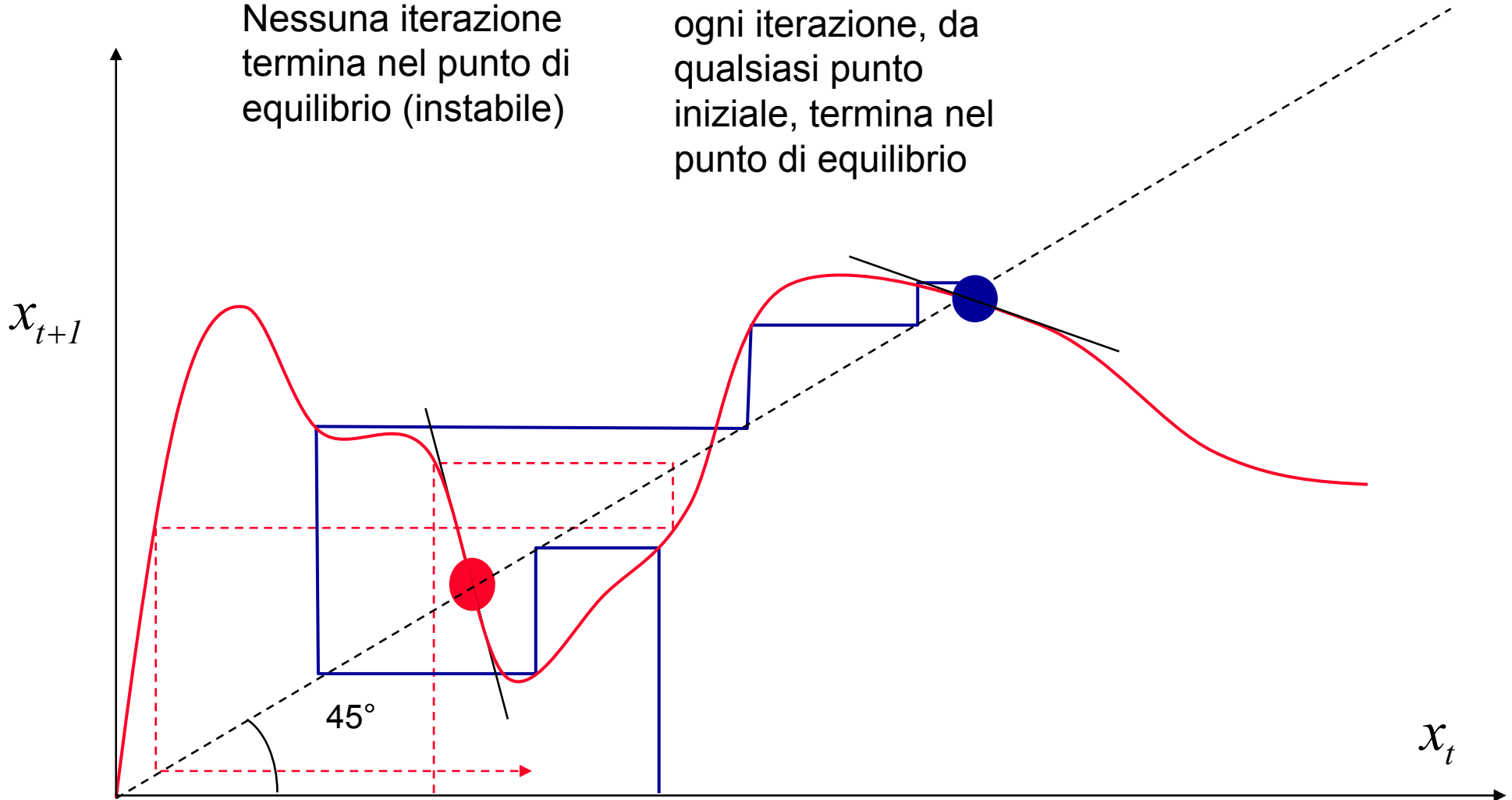
Conferma mediante iterazioni

Equilibrio instabile: ●

Nessuna iterazione
termina nel punto di
equilibrio (instabile)

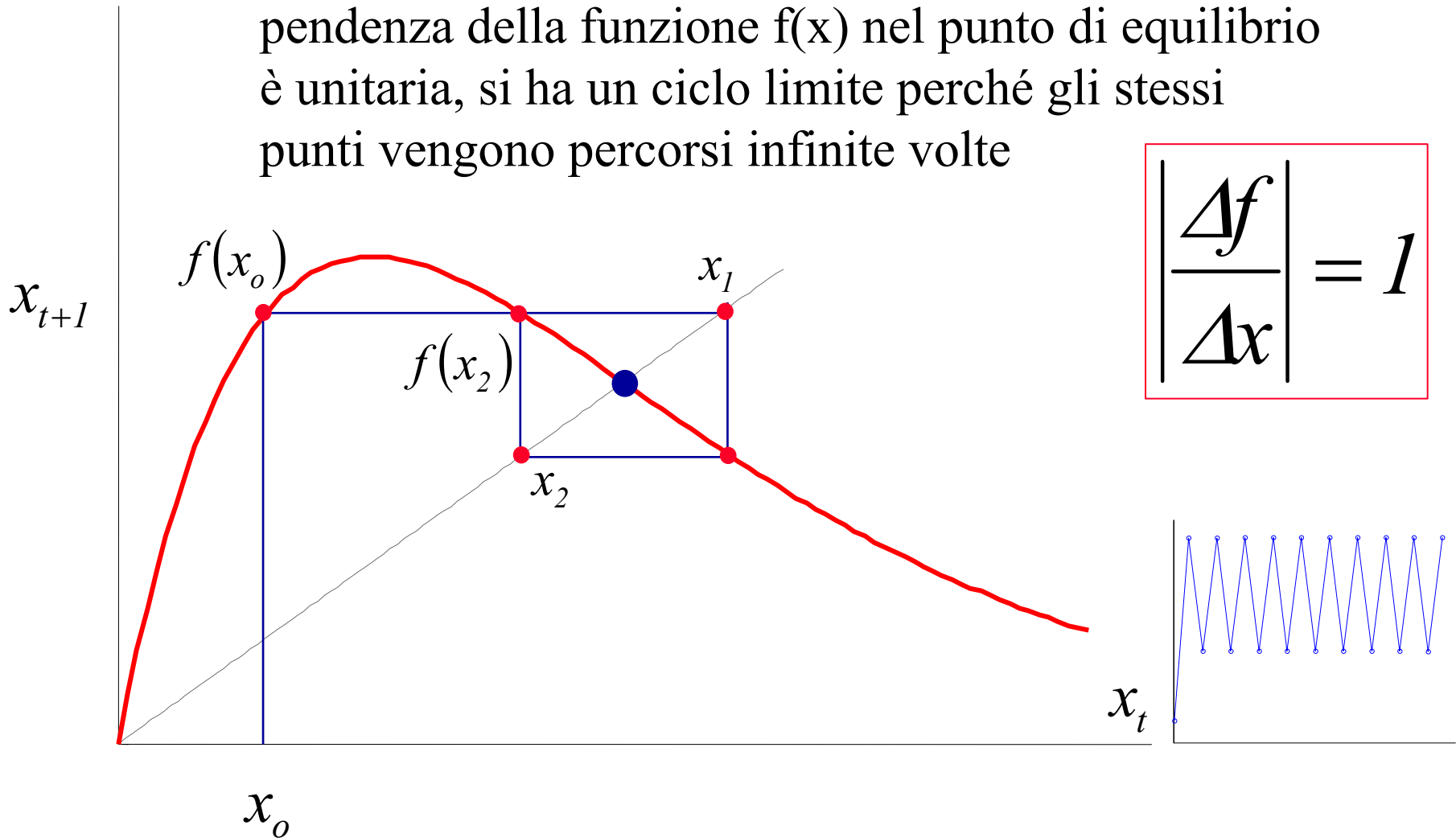
Equilibrio stabile: ●

ogni iterazione, da
qualsiasi punto
iniziale, termina nel
punto di equilibrio

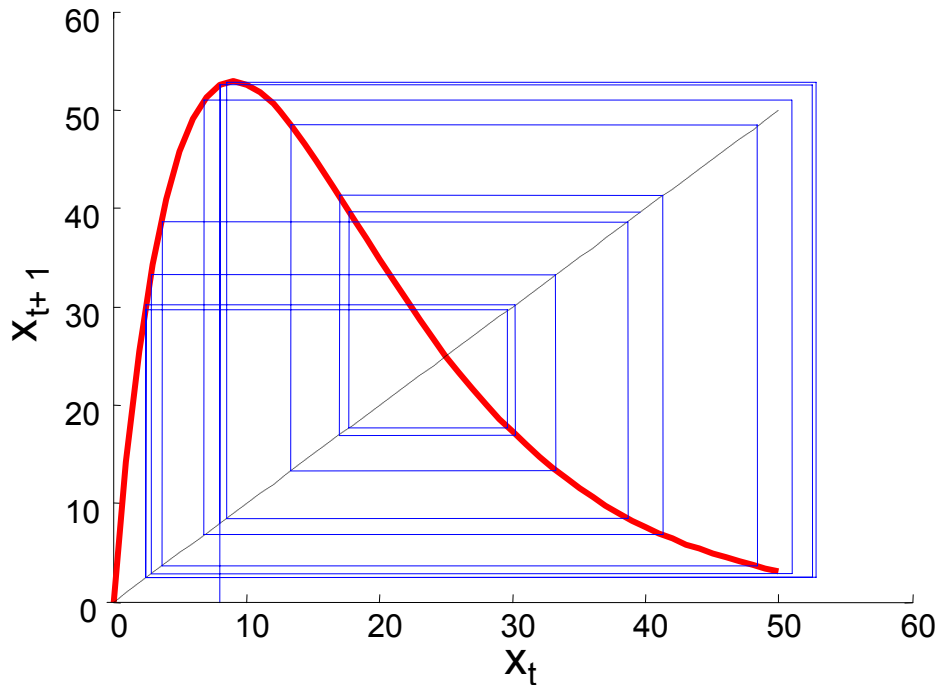


Visualizzazione grafica del ciclo limite

Nel caso tempo-discreto, nel caso in cui la pendenza della funzione $f(x)$ nel punto di equilibrio è unitaria, si ha un ciclo limite perché gli stessi punti vengono percorsi infinite volte



Oltre il ciclo limite: il Caos



Modello di Rickert

$$\left(1 - \frac{x_t}{K}\right)$$

$$x_{t+1} = x_t \times R_{max}$$

risposta
monotona

oscillazione

ciclo
limite

caos

$$R_{max} = 18$$

Caos: all'aumentare di R_{max} la popolazione oscilla fra valori sempre diversi, senza raggiungere mai un punto di equilibrio.

Il **Caos** è un comportamento deterministico: partendo dalle stesse condizioni iniziali si ripercorre la stessa traiettoria.

Anche esso corrisponde ad un punto di equilibrio non risolvibile con l'analisi linearizzata.

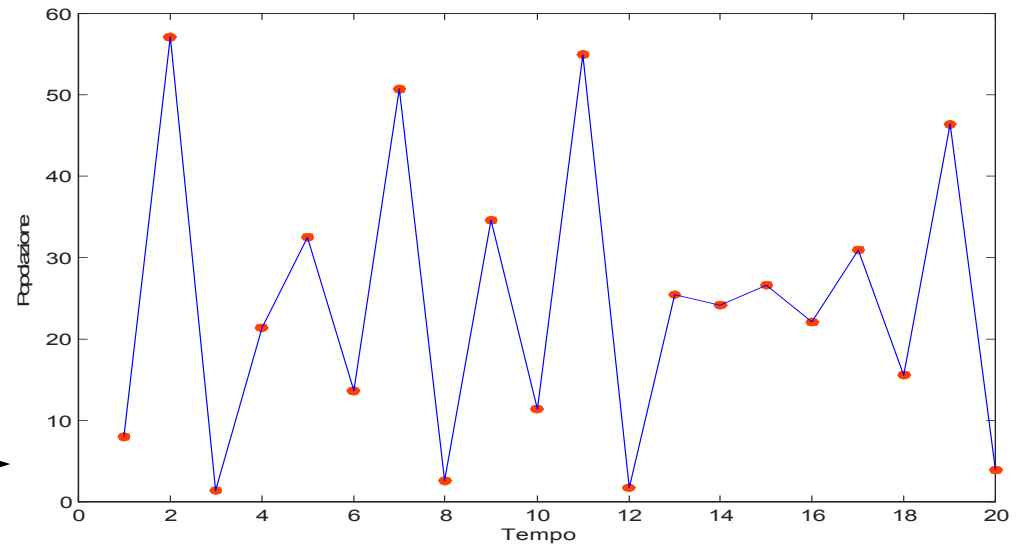
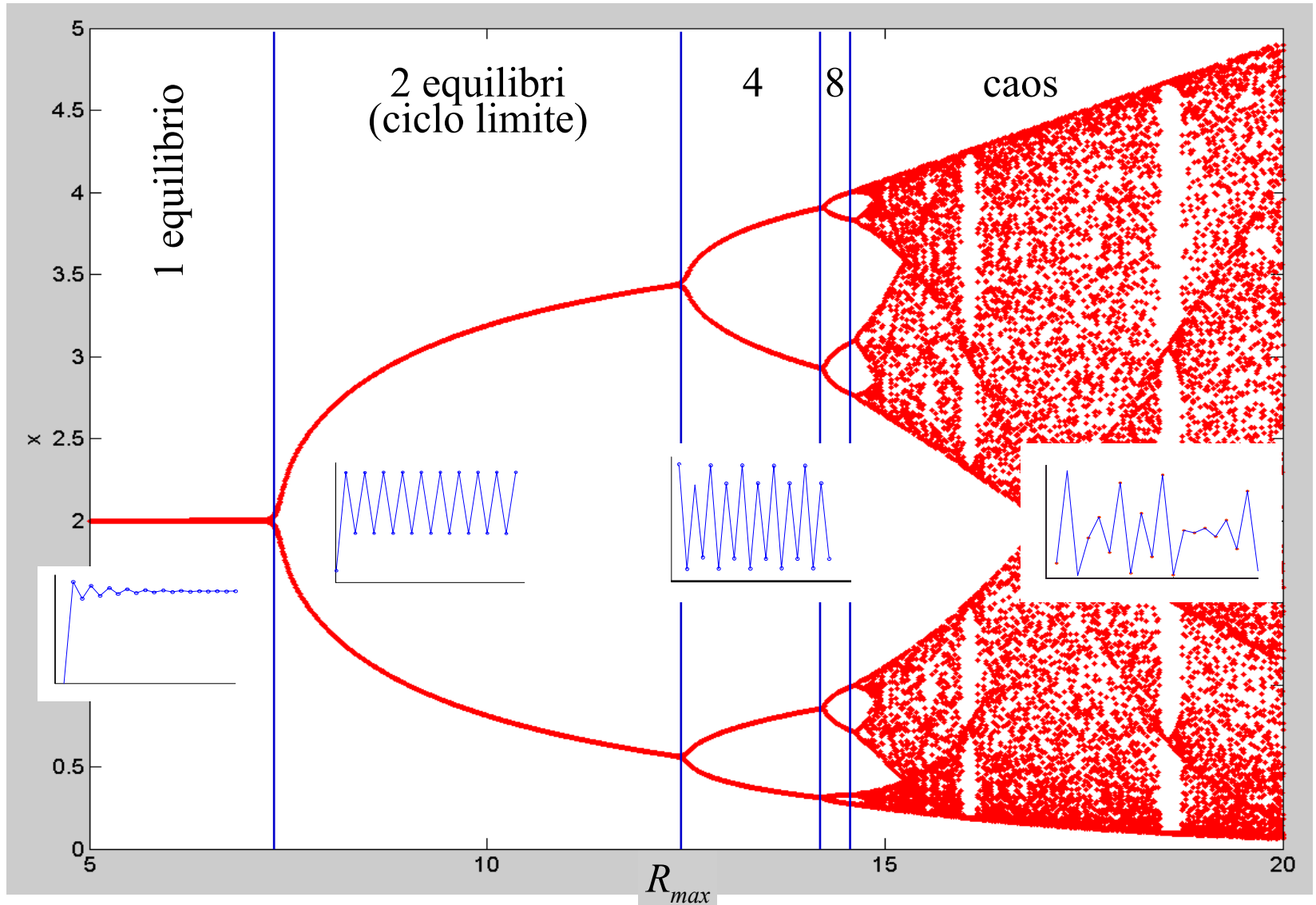


Diagramma delle biforcazioni del modello di Rickert

All'aumentare del fattore di crescita R_{max} si passa da un solo equilibrio a due (oscillazioni). Aumentando ancora, gli equilibri raddoppiano fino a divenire una moltitudine disordinata (caos)



Analisi grafica della stabilità tempo continua

☞ La stabilità è definita nei punti di equilibrio $x_o: f(x_o)=0$

⇒ Punti in cui la funzione $f(x)$ incontra l'asse x

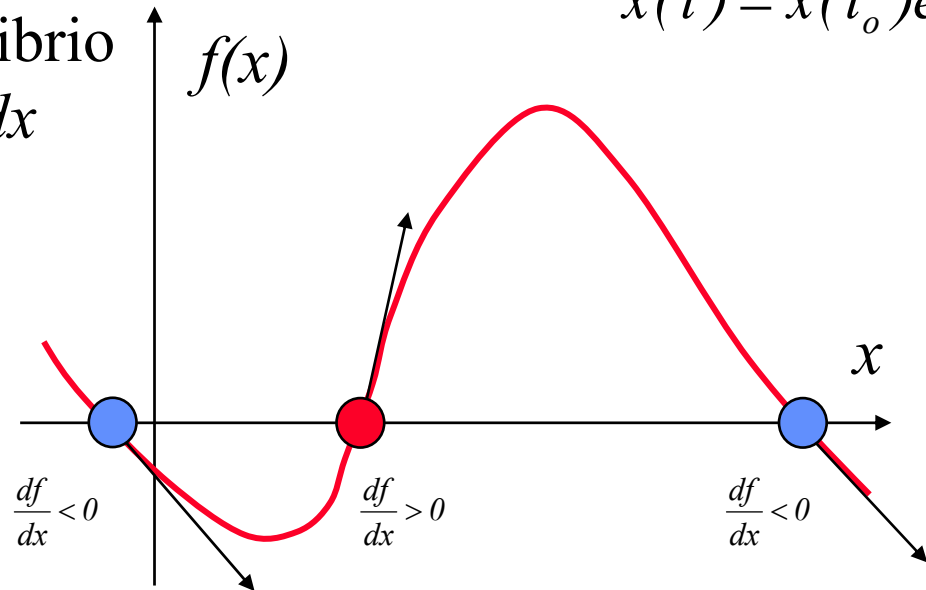
☞ Linearizzando il sistema intorno ad un punto di equilibrio

$$\tilde{x} = x - x_o \rightarrow \frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} \approx \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_o} \tilde{x} \longrightarrow \dot{\tilde{x}} \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_o} \tilde{x}$$
$$\downarrow$$
$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_o) e^{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot t}$$

☞ La stabilità nei punti di equilibrio dipende dalla derivata $df(x)/dx$

⇒ Se la derivata è positiva, lo stato del sistema aumenta (sistema instabile)

⇒ Se è negativa tende a zero (sistema stabile)

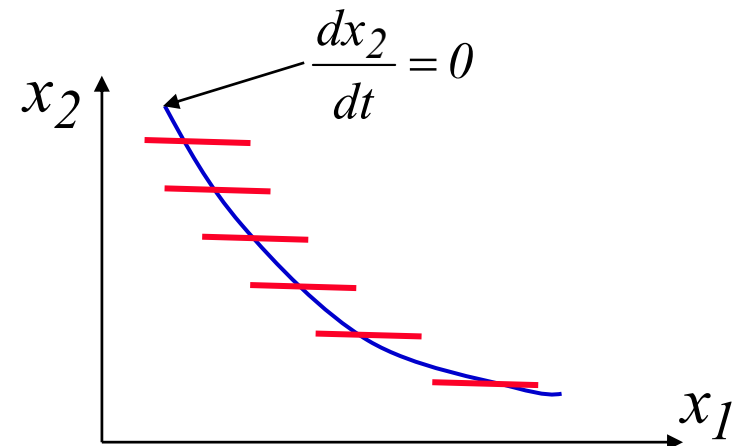
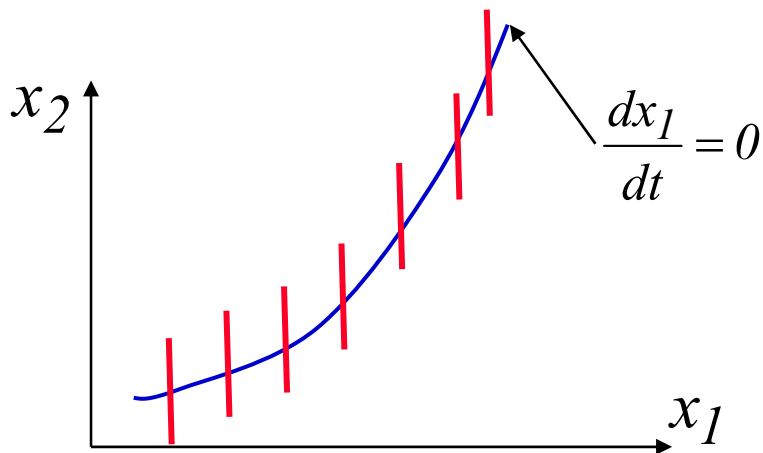
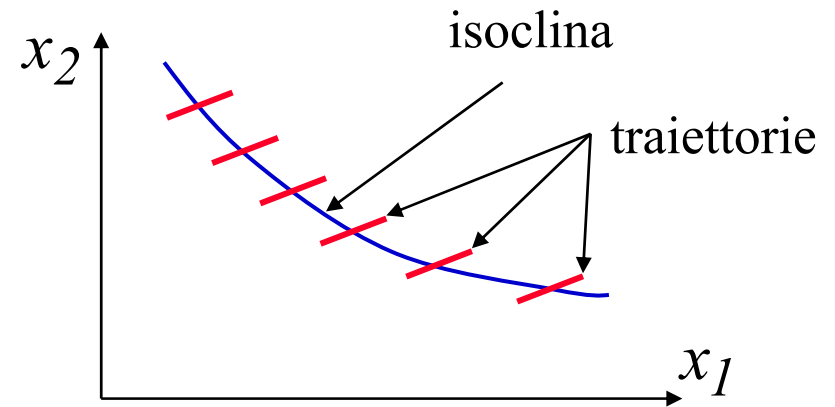


Isocline

☞ Per definizione, sono curve intersecate dalle traiettorie a **pendenza costante**

☞ Sono particolarmente importanti quelle a pendenza orizzontale o verticale

$$\text{pendenza} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} \Rightarrow \begin{cases} \leftrightarrow & \frac{dx_2}{dt} = 0 \\ \updownarrow & \frac{dx_1}{dt} = 0 \end{cases}$$



Analisi delle traiettorie con le isocline

👉 Utile particolarmente per sistemi a due componenti $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

⇒ Sono rappresentabili nel piano cartesiano

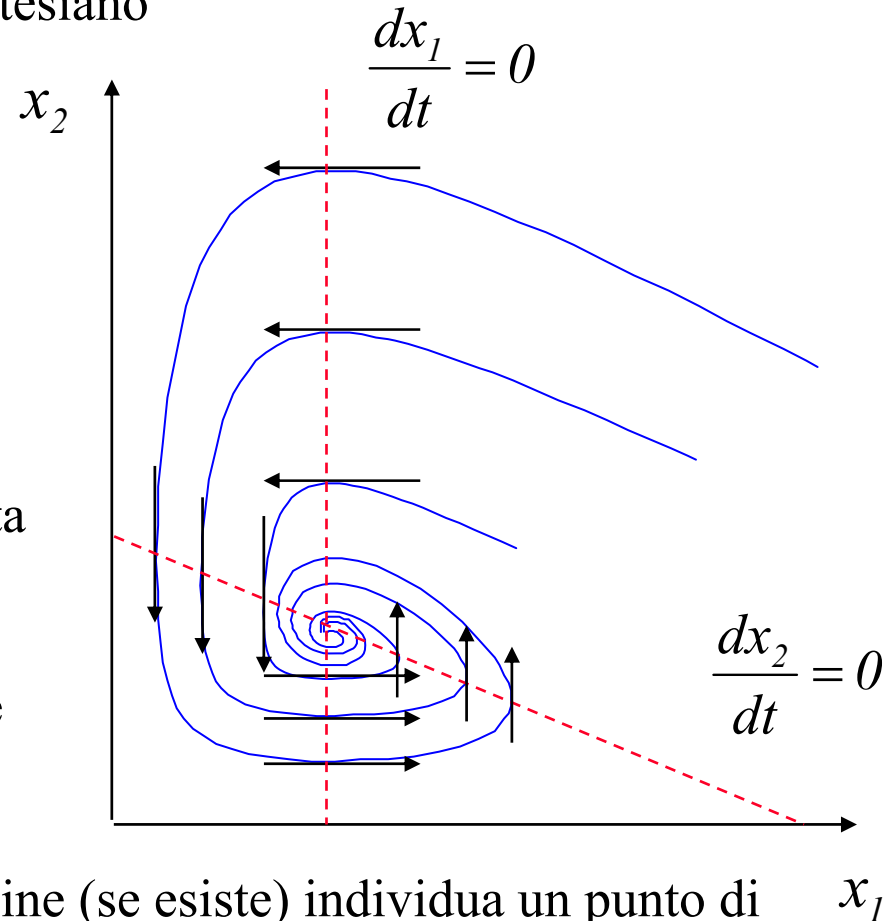
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

⇒ Si possono definire dei luoghi che vengono attraversati dalle traiettorie con pendenza predefinita

⇒ Tali luoghi sono detti isocline

⇒ Sono particolarmente significative le isocline di equilibrio, dove $f_1(x_1, x_2) = 0$ $f_2(x_1, x_2) = 0$

⇒ Il punto di incontro di queste isocline (se esiste) individua un punto di equilibrio



Stabilità in grande: il Teorema di Lyapunov (1892)

- ☞ L'analisi di stabilità basata sulla linearizzazione ha validità *locale*
- ☞ E' necessario disporre di un criterio più generale in grado di stabilire il bacino di attrazione dell'equilibrio

☞ Definizione di una funzione di *Lyapunov* $V(\cdot)$:

Dato un sistema autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

Se:

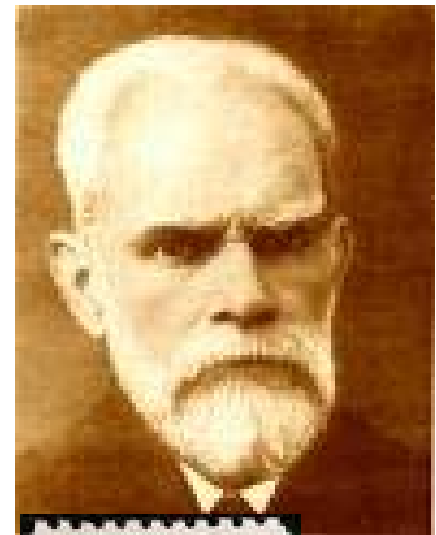
1. $V(\cdot)$ è definita positiva in $\bar{\mathbf{x}}$ i.e. $V(\bar{\mathbf{x}}) > 0$

2. $V(\cdot)$ è regolare (continua con derivate continue)

3. $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} < \mathbf{0}$ e in $\bar{\mathbf{x}}$ $\dot{V} = 0$

⇒ $V(\cdot)$ è una *funzione di Lyapunov*

⇒ $\bar{\mathbf{x}}$ è *asintoticamente stabile* (stabile se $\dot{V} \leq 0$)

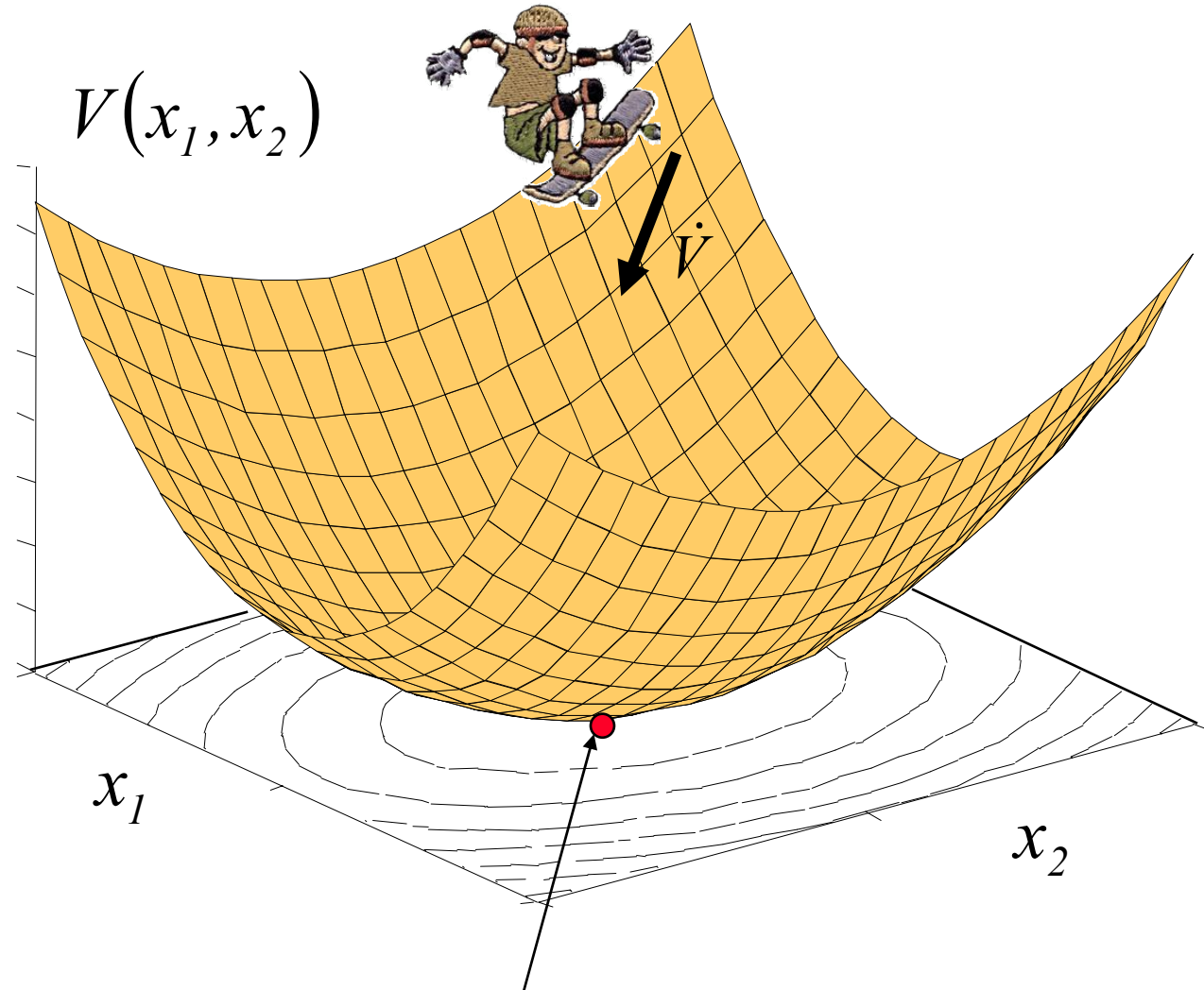


Teorema di Lyapunov come funzione energia

Il concetto della funzione di Lyapunov è trovare una funzione positiva decrescente verso l'equilibrio

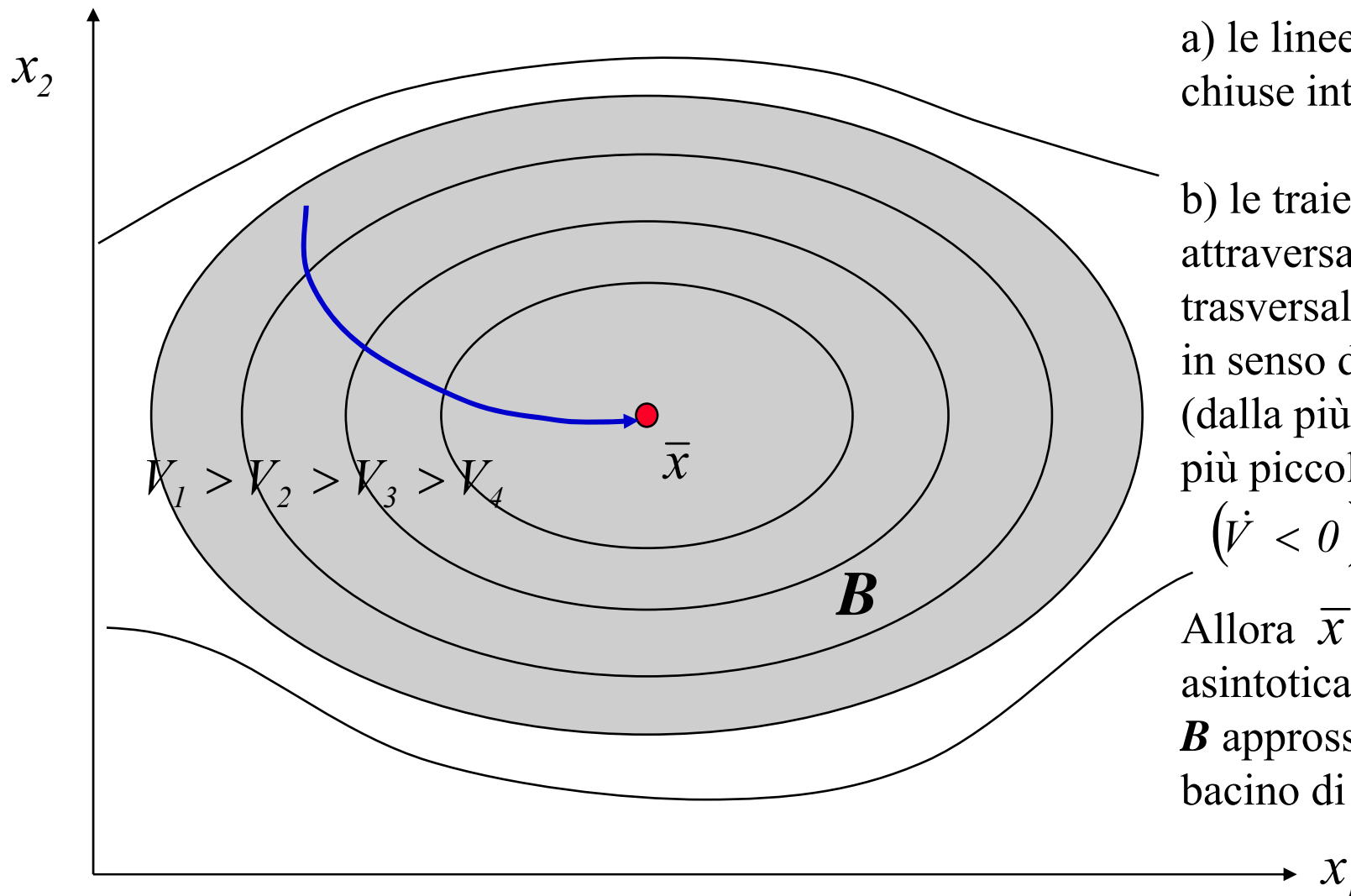
Se il sistema è stabile, ogni traiettoria percorre la superficie V passando da livelli sempre più bassi fino a raggiungere l'equilibrio

Se il sistema è “dissipativo” consuma energia fino a fermarsi nel punto di equilibrio.



Minimo globale di energia = punto di stabilità

Curve di livello e funzione di Lyapunov



Se

a) le linee di livello sono chiuse intorno a \bar{x}

b) le traiettorie attraversano trasversalmente le curve in senso decrescente (dalla più grande alla più piccola)

$$(\dot{V} < 0)$$

Allora \bar{x} è asintoticamente stabile e B approssima il suo bacino di attrazione

Tipiche funzioni di Lyapunov

Forme quadratiche dello stato

$$V(x) = \sum x_i^2$$

$$V(x) = \sum_j \sum_i a_{ij} x_i x_j$$

Per il Teorema di Sylvester

la 2^a forma è definita positiva se tutti i minori principali sono positivi

$$[a_{11}] > 0 \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad \text{etc.....}$$

La maggiore difficoltà è trovare una Funzione di Lyapunov

per la quale si possa dimostrare che $V > 0$ & $dV/dt < 0$

Teorema di Lyapunov nel caso lineare

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x \quad \longrightarrow \quad V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad \text{con } \mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad \mathbf{P} > \mathbf{0}$$

$$\frac{dV}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \right) \mathbf{x}$$

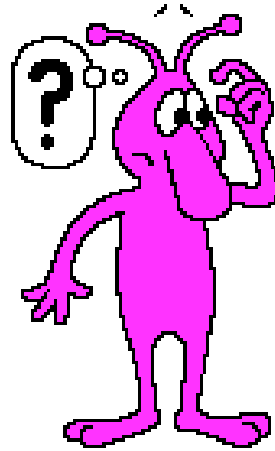
dovendo essere $\frac{dV}{dt} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad \text{con } \mathbf{Q} > \mathbf{0}$

Il sistema sarà stabile sse è possibile trovare una soluzione $\mathbf{P} > \mathbf{0}$
alla seguente equazione (di Lyapunov)

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) = \textit{positiva definita}$$

nota: spesso si sceglie \mathbf{Q} pari alla matrice identità \mathbf{I}

Come scegliere una funzione di Lyapunov?



$$\left\{ \begin{array}{l} V(\mathbf{x}) > 0 \\ \frac{dV}{dx} < 0 \end{array} \right.$$

Possibili scelte:

- Funzioni quadratiche delle variabili di stato
- Funzioni della derivata (Teor. di Krasovskii)
- Soluzioni “ad hoc” per casi specifici, es.
Sistemi preda-predatore (Lotka – Volterra)

Teorema di Krasovskii

Condizione sufficiente per sistemi nonlineari

Condizione necessaria e sufficiente per sistemi lineari

Funzione di Lyapunov = norma euclidea della derivata

$$V = \left| \frac{dx}{dt} \right|_2 = f^T(x) \cdot f(x)$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = F(x) \cdot \dot{x} \quad \text{con} \quad F(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] = \text{Jacobiano}$$

$$\dot{V} = \dot{f}^T \times f + f^T \times \dot{f} = f^T \times F^T \times f + f^T \times F \times f$$

$$\dot{V} < 0 \Leftrightarrow F^T + F < 0$$

se inoltre è

$$f^T(x) \cdot f(x) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty$$

L'equilibrio è asintoticamente stabile in grande

Teorema di Krasovskii

La stabilità è ricondotta alla matrice

$$\mathbf{F}^T + \mathbf{F} < \mathbf{0} \quad \text{con} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

Perciò per la stabilità sarà sufficiente che la matrice

$$\mathbf{F}^T + \mathbf{F}$$

abbia autovalori con parte reale negativa

$$Sp(\mathbf{F}^T + \mathbf{F}) = \{\lambda_i \mid i = 1, \dots, n\} \implies Re(\lambda_i) < 0$$

Esempio

Dato il sistema
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$
 con equilibrio $x_1 = x_2 = 0$

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} \Rightarrow F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$F^T + F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} tr < 0 \\ det > 0 \end{matrix} \quad \forall x$$

Il punto di equilibrio è stabile

Inoltre, dato che

$$f^T(x) \cdot f(x) = x_1^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \rightarrow \infty \text{ per } |x| \rightarrow \infty$$

L'equilibrio è asintoticamente stabile in grande

Modello conservativo Lotka-Volterra

👉 Alla base della dinamica di popolazioni con rapporto preda-predatore

➡ Molto semplificato (interazioni lineari)

👉 Si basa sull'ipotesi che la crescita di ciascuna specie dipenda dalla densità dell'altra

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1} = \varphi(x_2) \quad \frac{\dot{x}_2}{x_2} = \varphi(x_1)$$

👉 Si può verificare che si tratta di un sistema *conservativo* definendo la funzione potenziale $V = \psi_1(x_1) - \psi_2(x_2) \rightarrow \dot{V} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \dot{x}_2$

👉 Definendo

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = \frac{\varphi_1}{x_1} \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = \frac{\varphi_2}{x_2}$$

👉 Si dimostra la conservazione $\dot{V} = \frac{\varphi_1}{x_1} \cdot \varphi_1 \cdot x_1 - \frac{\varphi_2}{x_2} \cdot \varphi_2 \cdot x_2 = 0$

Modello di Lotka-Volterra lineare (conservativo)

☞ Se le funzioni φ_1 e φ_2 vengono assunte lineari, si ha il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a - bx_2)x_1 \\ \dot{x}_2 = (cx_1 - d)x_2 \end{cases}$$

☞ Come funzione potenziale (funzione di Lyapunov), secondo le precedenti definizioni, si può scegliere

$$V(x_1, x_2) = cx_1 - d \cdot \ln x_1 + bx_2 - a \cdot \ln x_2$$

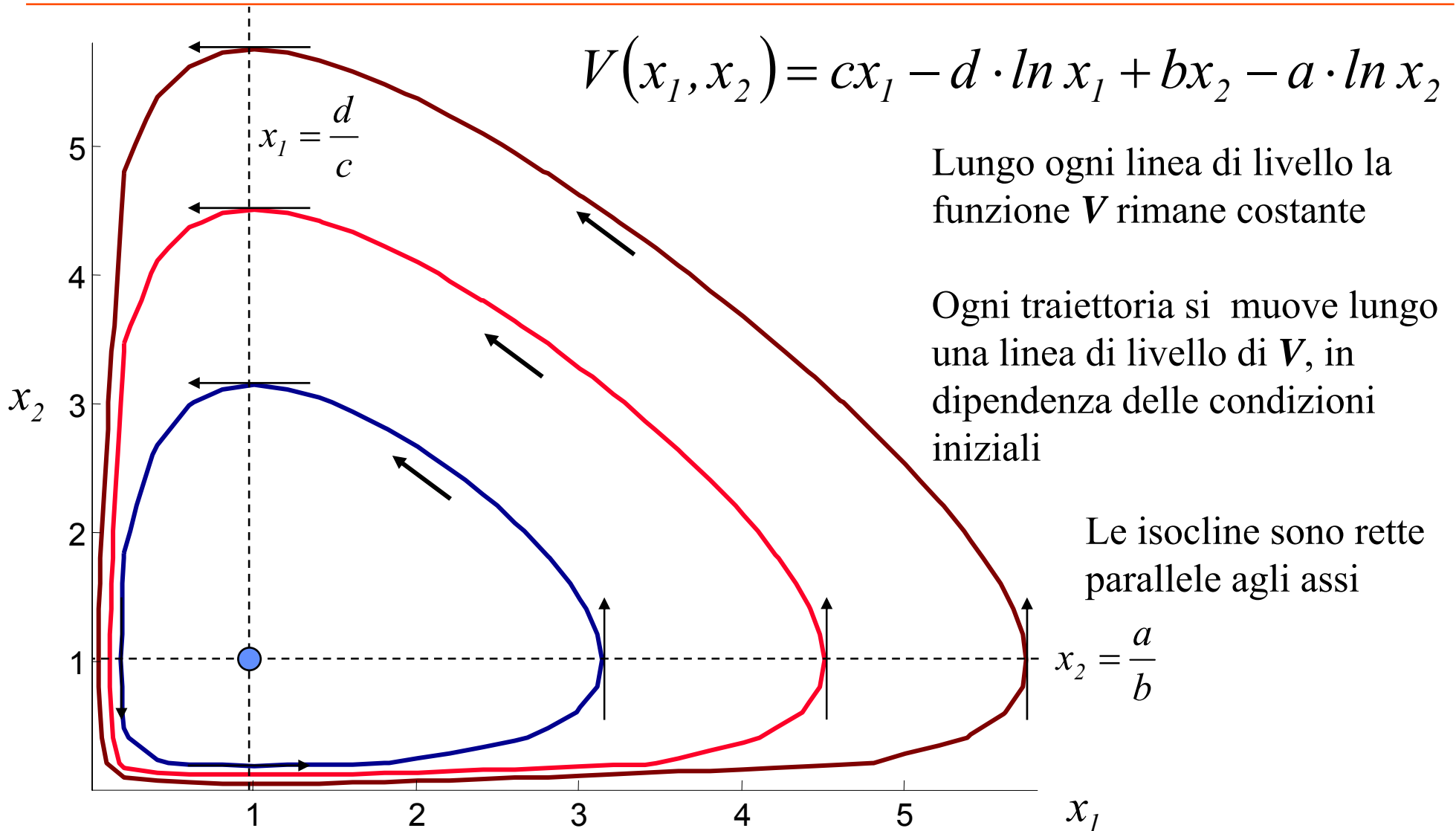
☞ Che verifica le condizioni precedenti (derivata nulla lungo ogni traiettoria)

$$\dot{V}(x_1, x_2) = c\dot{x}_1 - d \cdot \frac{\dot{x}_1}{x_1} + b\dot{x}_2 - a \cdot \frac{\dot{x}_2}{x_2} = 0$$

☞ Le isocline di equilibrio sono rette parallele agli assi passanti per il punto di equilibrio

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{a}{b} \quad \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{d}{c}$$

Curve di livello = traiettorie



Analisi linearizzata di Lotka-Volterra (conservativo)

👉 Lo Jacobiano del sistema è

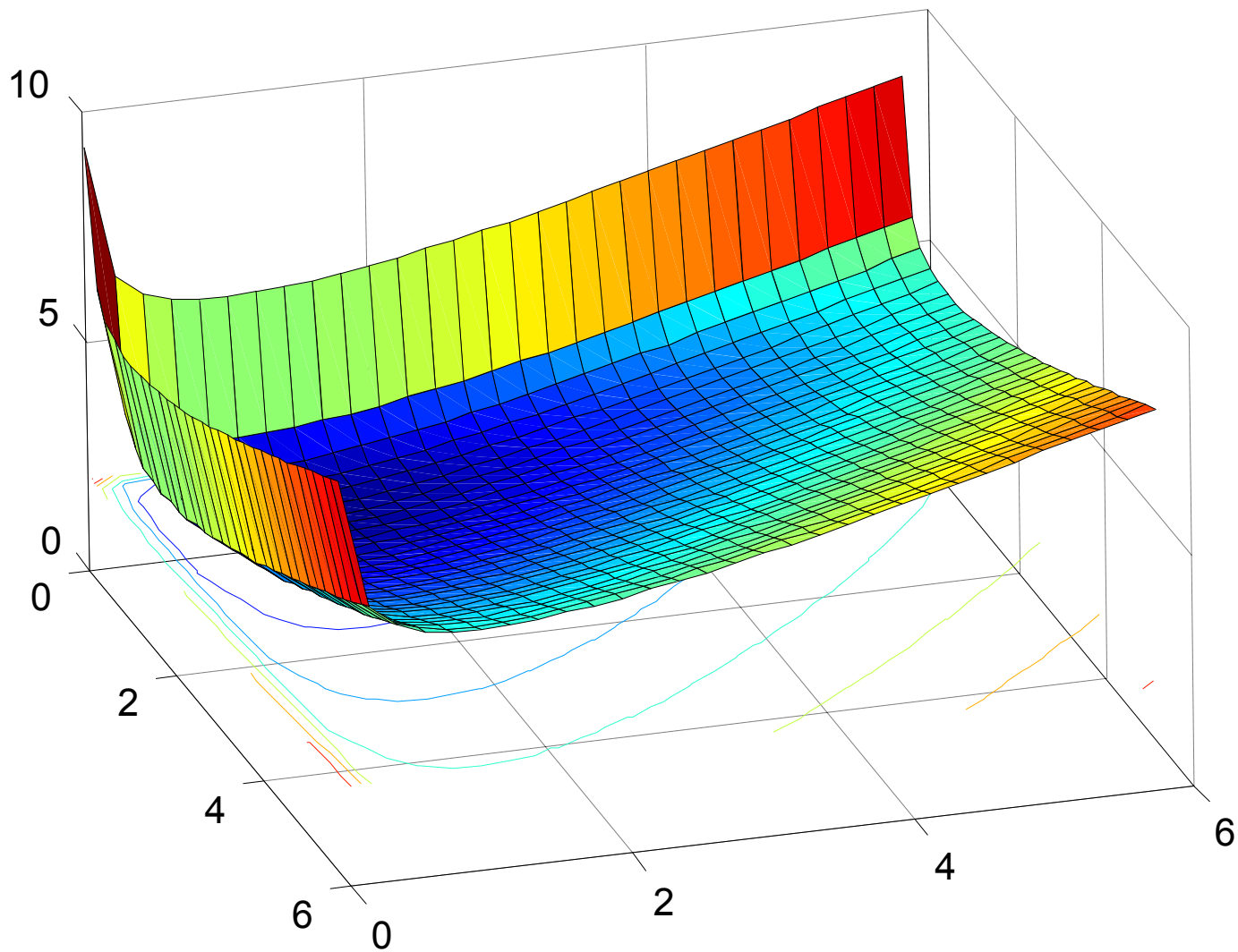
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b\bar{x}_2 & -b\bar{x}_1 \\ c\bar{x}_2 & c\bar{x}_1 - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

👉 Da cui si calcolano gli autovalori





$$\det \begin{bmatrix} \lambda & \frac{bd}{c} \\ -\frac{ca}{b} & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{ca}{b} \frac{bd}{c} = \lambda^2 + ad \Rightarrow \lambda = \pm j\sqrt{ad}$$

👉 Si ha sempre due autovalori immaginari coniugati. Il sistema si comporta come un *oscillatore armonico conservativo*.

Andamento della funzione di Lyapunov



Bibliografia

-  Cook P.A., *Nonlinear Dynamical Systems*. Prentice Hall, (1986).
-  Kaplan D. and Glass L., *Understanding Nonlinear Dynamics*. Springer, NY (1995).
-  May R. M., *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature **216**: 459 - 467 (1976).
-  Strogatz S.H., *Nonlinear dynamics and Chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Westview Press (1994).