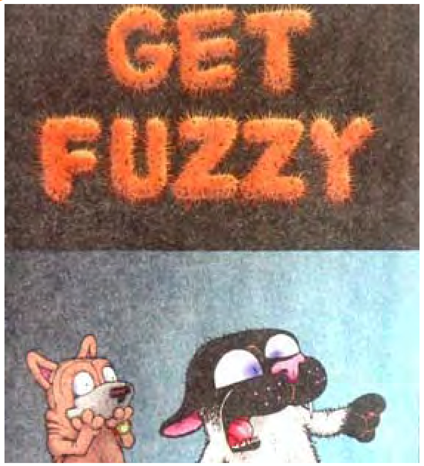
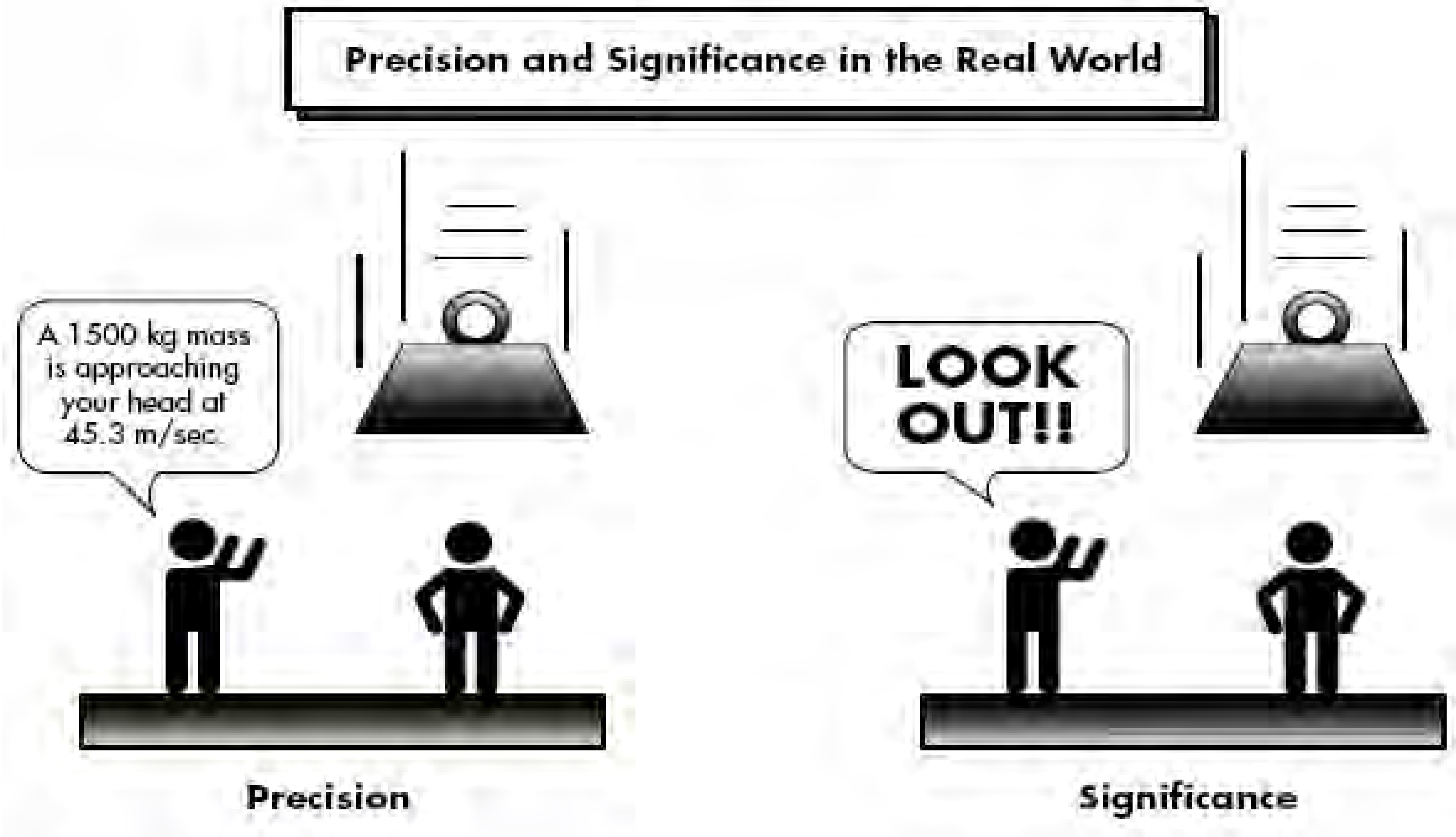
FUZZY SETS

Ragionamento approssimato con concetti definiti in modo vago

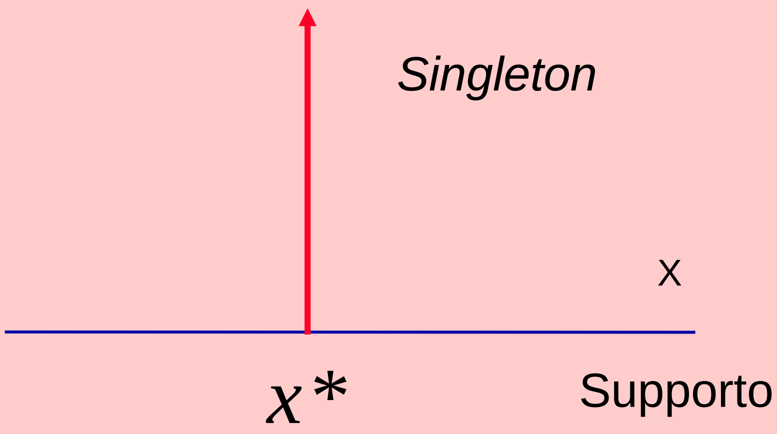


E’ più importante la precisione o il significato?



Valori deterministici e Fuzzy Sets

Rappresentazione deterministica (singleton)

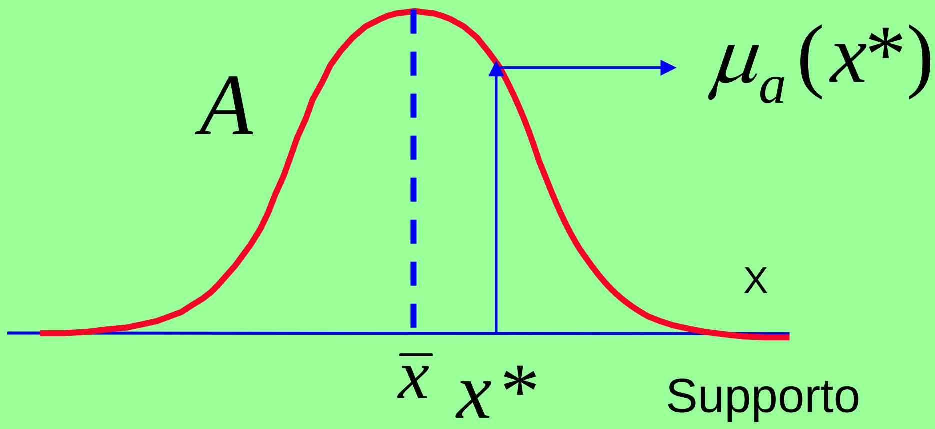


$x^* \in \boldsymbol{X}$

Ogni dato è rappresentato dal suo valore numerico

Fuzzy set

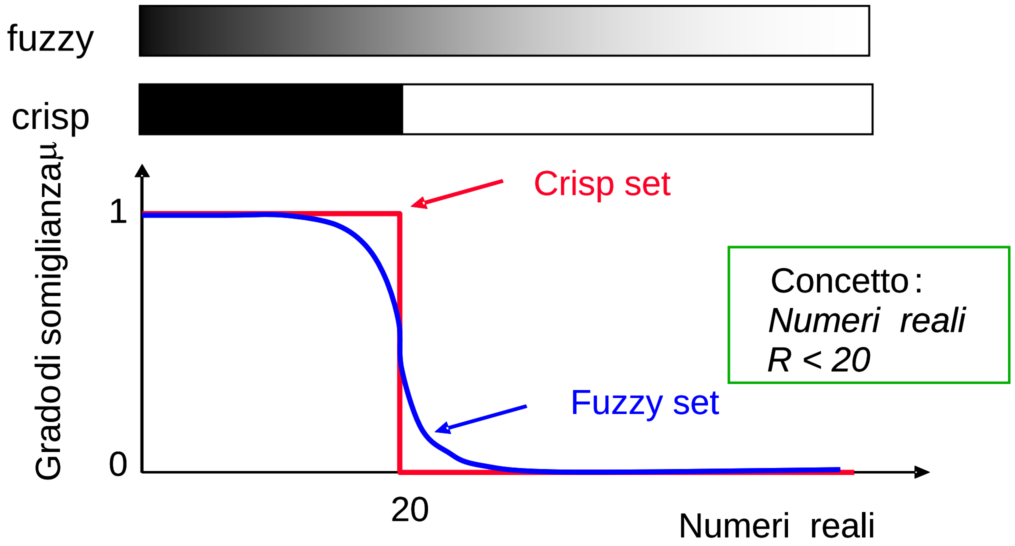
$$\boxed{X \mapsto A : x \rightarrow \mu_a(x)}$$

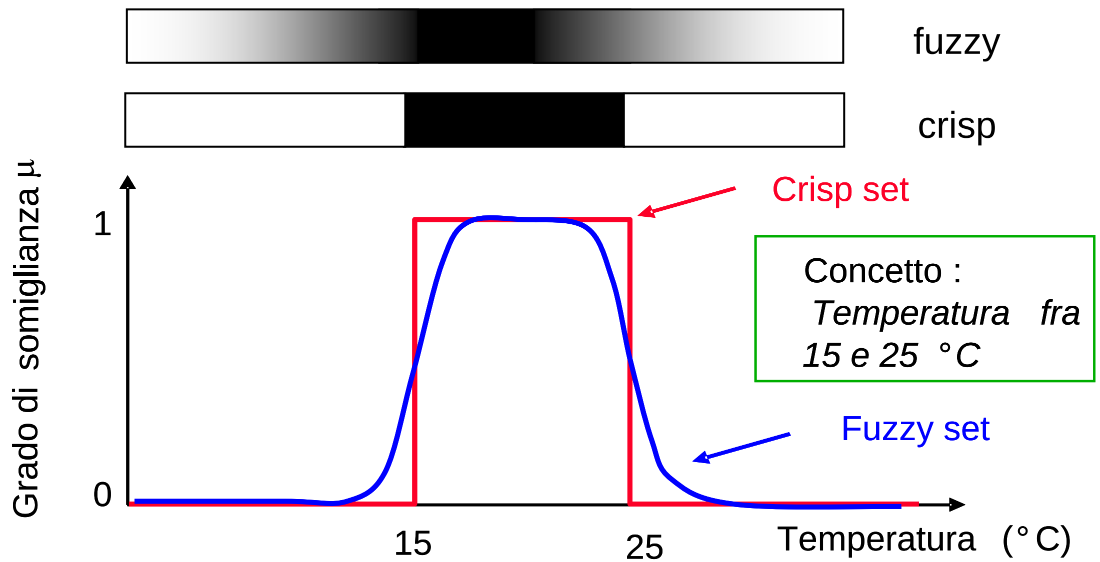


$x^* \in \boldsymbol{X}$

Ogni dato è rappresentato dalla sua ***somiglianza*** ad un riferimento

La logica Fuzzy introduce il *grado di somiglianza*





Il ragionamento “crisp” opera solamente con i concetti di ***uguale*** o ***diverso*** *(non uguale)*

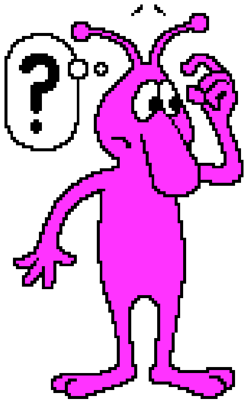
Il ragionamento “fuzzy” introduce la nozione di ***“grado di somiglianza”*** come appartenenza di un concetto ad un *prototipo* predefinito che ha la funzione di termine di paragone

Perciò il risultato hard *vero/falso* si “ammorbidisce” nel grado di appartenenza, che può assumere qualsiasi valore fra 0 e 1 con continuità

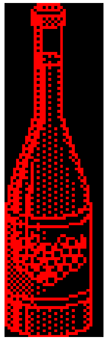
Le curve blu rappresentano i *prototipi* corrispondenti ai concetti espressi nelle scatole verdi

FUZZY vs. PROBABILITY

La Fuzziness esprime il grado di verità di un oggetto rispetto ad un concetto predefinito, basato su una ***esperienza diretta***, mentre la probabilità esprime ***l'eventualità*** che un evento futuro possa o non possa accadere.

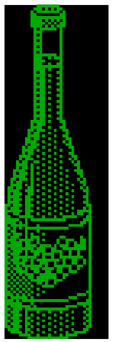


Bezdek, 1991



A: Potabile con fuzziness = 0.9

Da quale bottiglia preferireste bere?



B: Potabile con probabilità = 0.9

Il contenuto della bottiglia è "simile" ad acqua potabile con "somiglianza pari a 90%. Questa è un'affermazione basata su una ***reale confronto*** fra il contenuto di ***quella*** bottiglia ed un'acqua potabile di riferimento. Questa è una certezza!

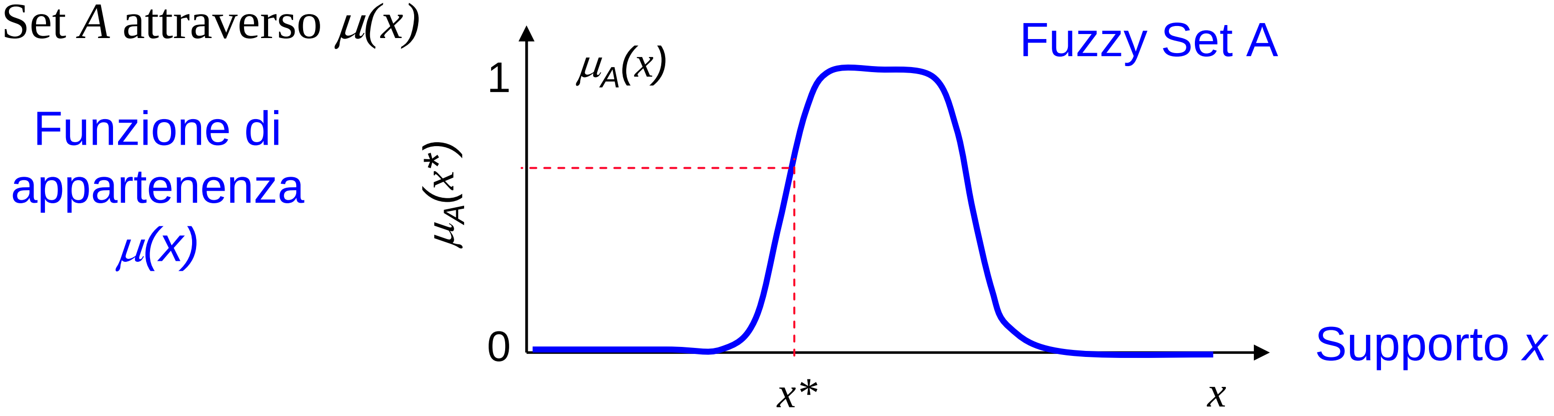
C'è una probabilità su 10 che il contenuto della bottiglia ***NON*** sia potabile !!!. Questa è un'affermazione basata su un test statistico, che basandosi ***induttivamente*** su un gran numero di test ***(ma non su quella bottiglia!),*** tenta di inferire il contenuto di quella bottiglia. Non c'è alcuna certezza circa il reale contenuto di ***quella*** bottiglia!

Definizioni di base dei Fuzzy Sets

- ☞ ***Supporto:*** l'intervallo $X \in \Re$ di interesse per la variabile indipendente x
- ☞ ***Funzione di appartenenza:*** la funzione $\mu(x)$ che fornisce il ***grado di verità*** per ciascun valore di $x \in X$. Tale funzione definisce operativamente il fuzzy set A come

$$A \quad \{\mu_A(x) : X \to (0,1)\}$$

- ☞ Il fuzzy set generalizza il concetto di appartenenza *(grado di verità)* graduandolo attraverso la funzione di appartenenza $\mu(x)$
- ☞ Dato un supporto X, un fuzzy set A su X è definito dalla funzione di appartenenza $\mu(x)$ che associa ciascun elemento di $x \in X$ ad un grado di verità associato al Fuzzy Set A attraverso $\mu(x)$

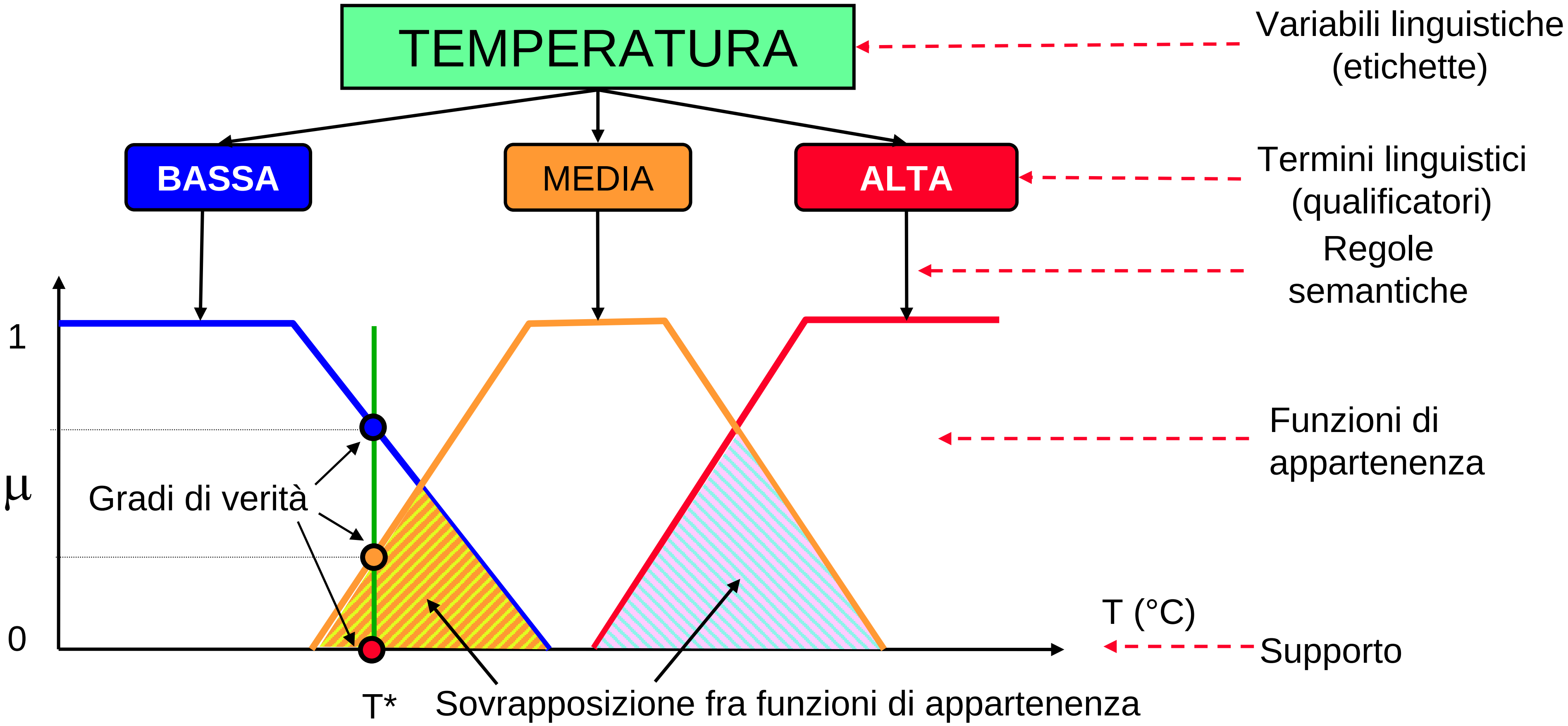


Variabili linguistiche

Una variabile linguistica è un'etichetta che definisce un concetto.

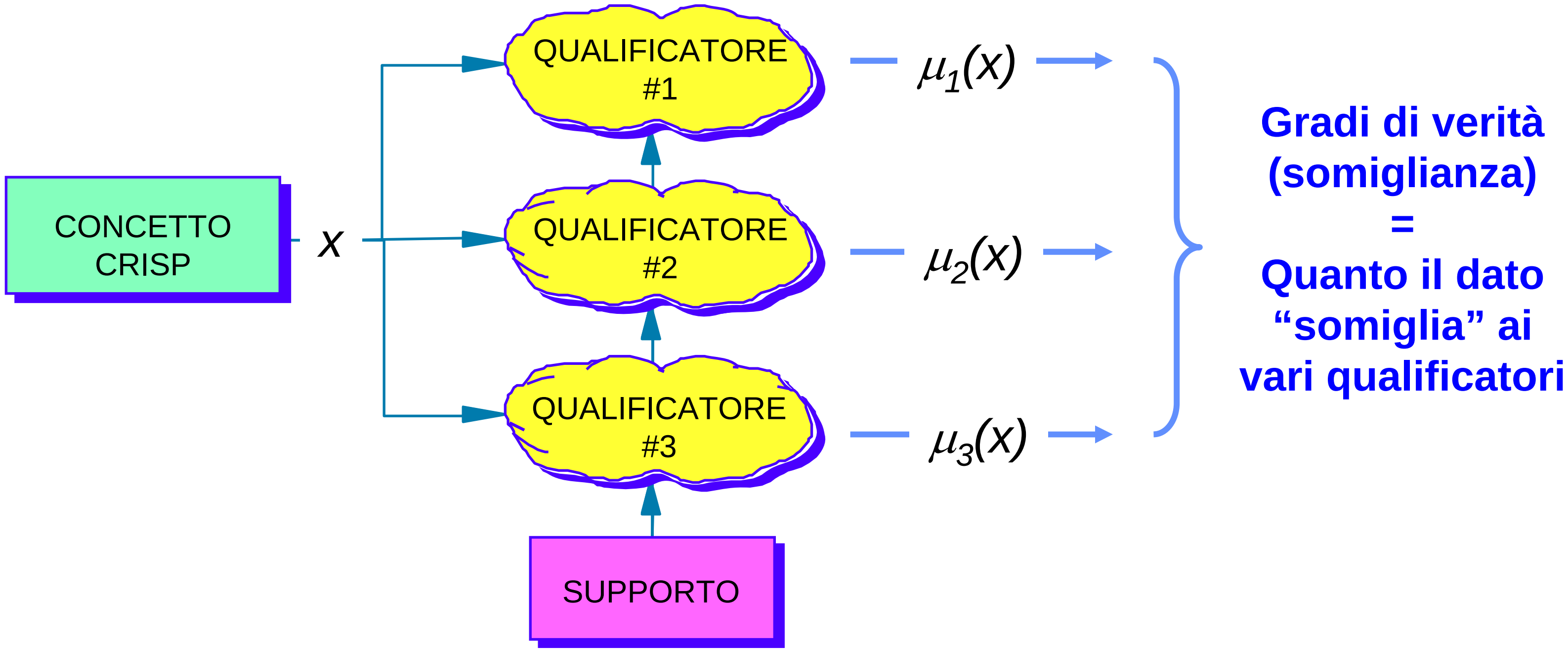
Ad essa corrisponde una funzione di appartenenza (qualificatore).

Esso determina il grado di verità $\mu(x)$ del valore x del supporto.



Fuzzificazione

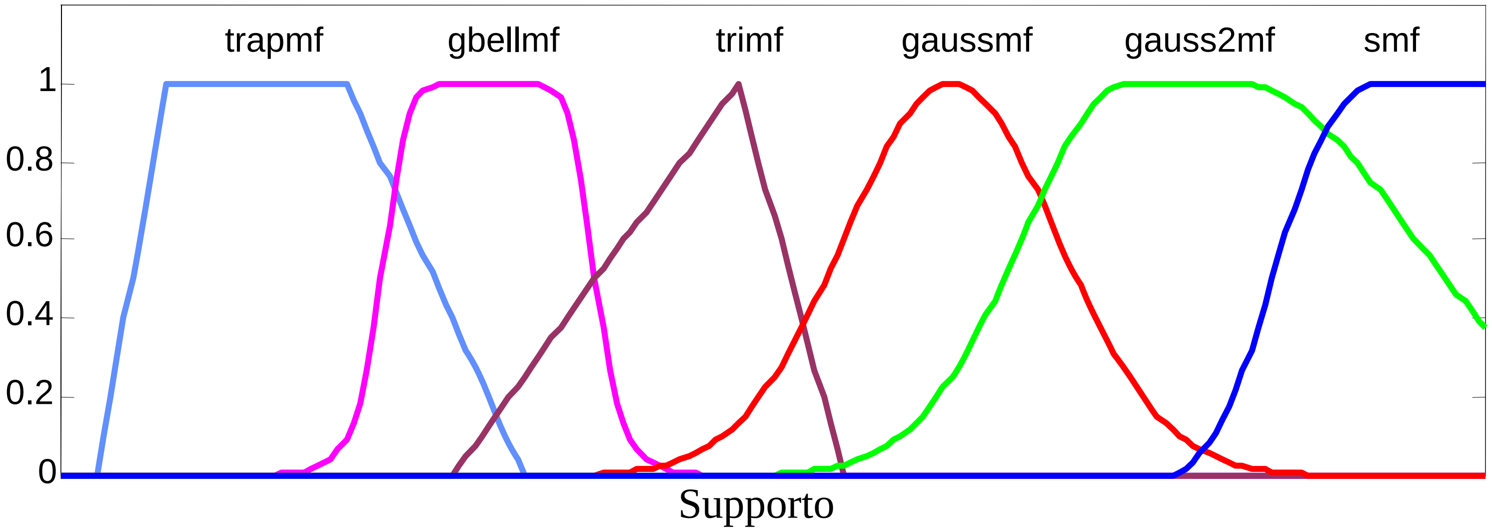
Consiste nella determinazione dei gradi di verità di un dato concetto rispetto ad un insieme di qualificatori predefiniti

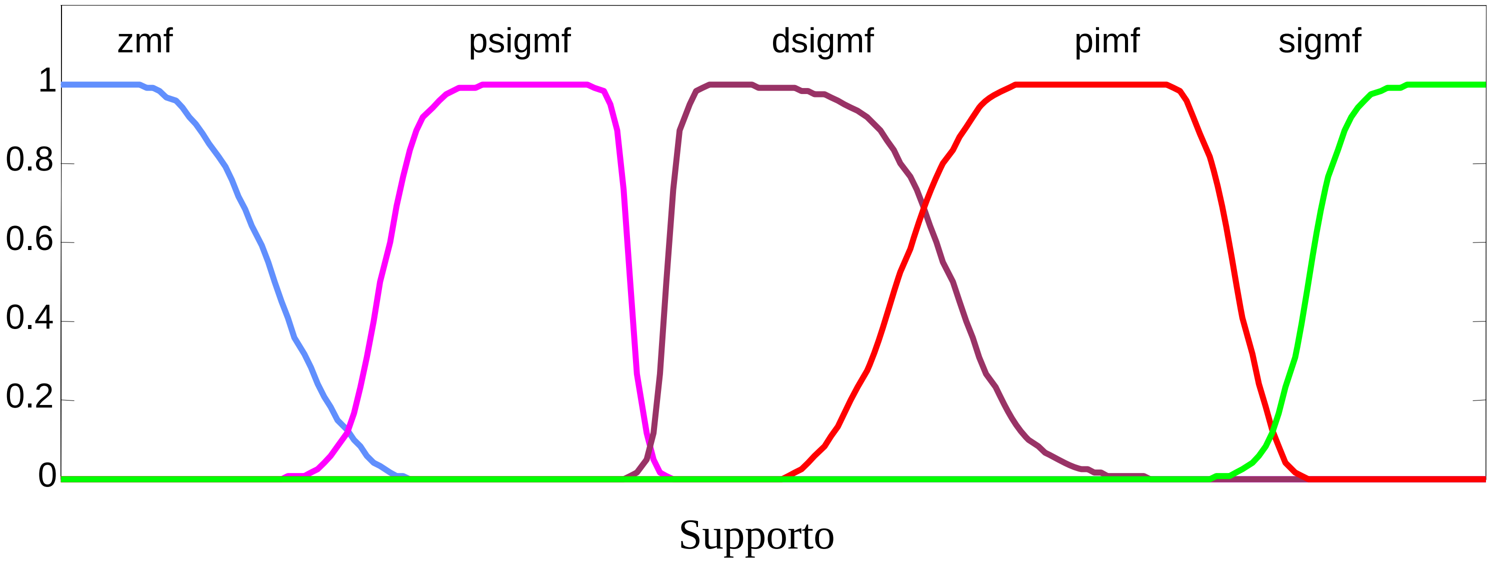


Il risultato della fuzzificazione è un vettore contenente i gradi di verità del concetto rispetto ai qualificatori

$$x \xrightarrow{\mathit{fuzzificazione}} \left[\mu_1(x) \quad \mu_2(x) \quad \mu_3(x) \right]$$

Qualificatori disponibili nella Matlab Fuzzy Toolbox





Alcune definizioni dei Fuzzy Sets

Dato un Fuzzy Set $\{A| \ \mu : X \rightarrow [0,1]\}$

☞ ***Normalità:*** un fuzzy set è detto normale se esiste almeno un elemento $x \in X$ tale che $\mu(x) = 1$

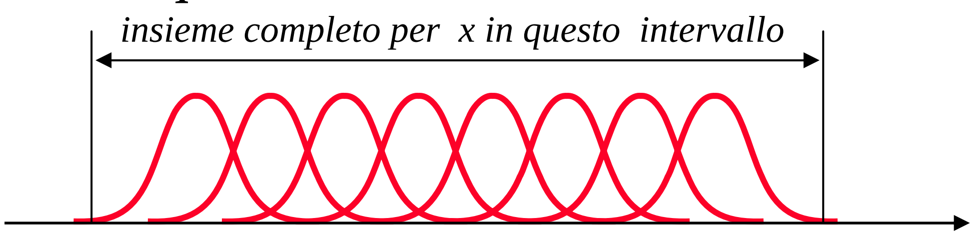
☞ ***Altezza:*** Il massimo grado di appartenenza di un elemento in A

$$\boxed{h(A) = \max_{x} \mu(x)}$$

☞ ***Supporto:*** Il sottoinsieme crisp X degli elementi dell'Universo del Discorso per cui i gradi di appartenenza sono non nulli

$$\boxed{Supp(A) = \{x \mid \mu(x) > 0 \ \ and \ \ x \in X\}}$$

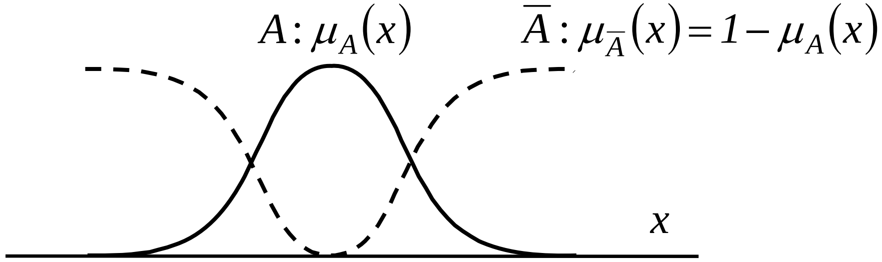
☞ ***Completezza:*** Per un qualsiasi $x \in X$, esiste almeno una *$\mu(x)$ non zero*



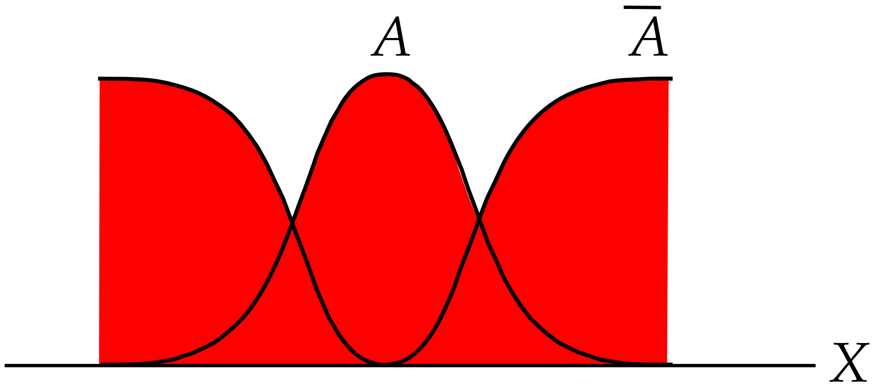
Complemento di un Fuzzy Set

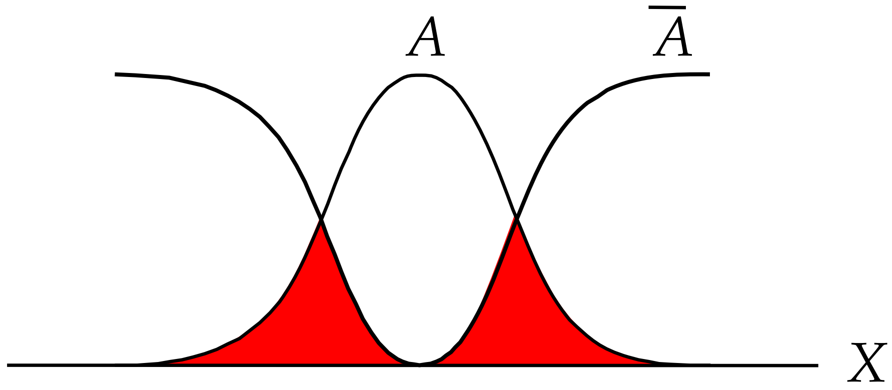
☞ ***Insieme complemento:*** il fuzzy set con funzione di appartenenza *complementare* rispetto a μ

$$\overline{A} : \{\overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x) : X \rightarrow (0,1)\}$$



crisp sets	Fuzzy sets
$A \cup \overline{A} = X \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$	$A \cup \overline{A} \neq X \quad A \cap \overline{A} \neq \varnothing$



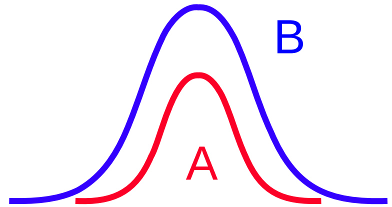


$$X \neq A \vee \overline{A} : max\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \;\; x \in X\}$$

$$\varnothing \neq A \wedge \overline{A} : min\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \;\; x \in X\}$$

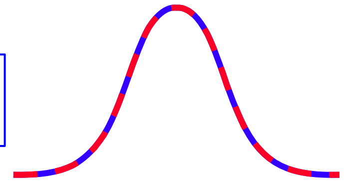
Definizioni di Fuzzy Sets

- ***Contenimento:*** dati due fuzzy sets A and B, A è contenuto in B se per ogni $x \in X$



$$\boxed{A \subset B : \mu_B(x) > \mu_A(x) \quad for \quad \forall x \in X}$$

- ***Uguaglianza:*** i fuzzy sets A e B sono detti uguali se



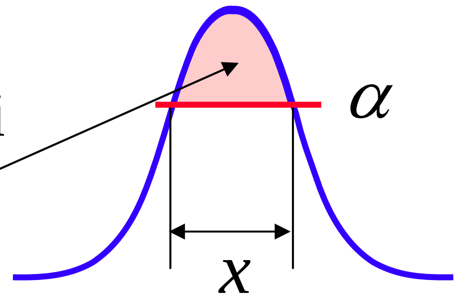
$$\boxed{A \subset B \quad and \quad B \subset A \Rightarrow \mu_B(x) = \mu_A(x) \quad for \quad \forall x \in X}$$

- ***Cardinalità:*** non così immediata come per i crisp sets (numero di elementi). Per i fuzzy set si assume pari alla somma dei gradi di appartenenza

$$\boxed{Card(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)}$$

- ***α-cut:*** Sottoinsieme di A formato da tutti gli elementi per i quali

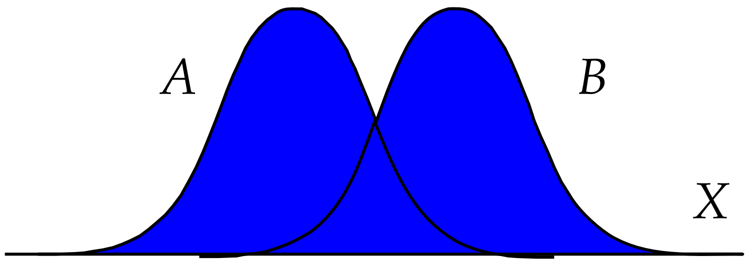
$$\boxed{A_\alpha : \{x \in \mathbf{X} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}}$$



Operazioni base sui fuzzy sets

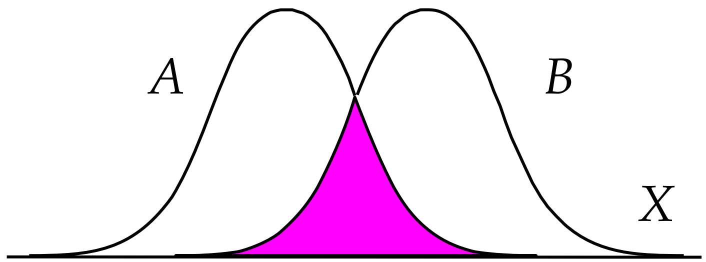
Unione Fuzzy (OR)

$$A \vee B : max\left\{\mu_A(x), \mu_B(x) \;\; x \in X\right\}$$

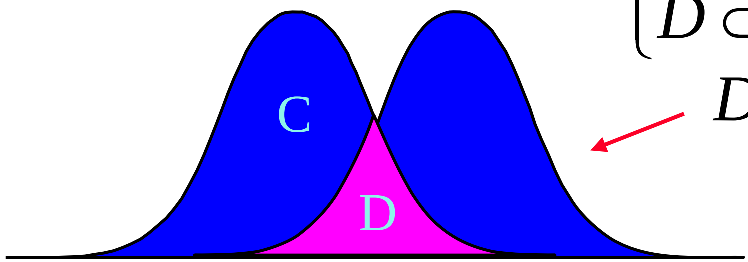


Intersezione Fuzzy (AND)

$$A \wedge B : min\left\{\mu_A(x), \mu_B(x) \;\; x \in X\right\}$$



$$if \quad C = A \vee B \;\; and \;\; D = A \wedge B \;\; then \begin{cases} D \subset C \\ A \subset C \;\; and \;\; B \subset C \\ D \subset A \;\; and \;\; D \subset B \end{cases}$$



$$D \subset C$$

Le composizioni $\wedge$ e $\vee$ possono riferirsi a diversi operatori, che devono soddisfare alle proprietà delle norme *triangolari*

Norme triangolari come connettivi AND ($\wedge$)

$$T(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

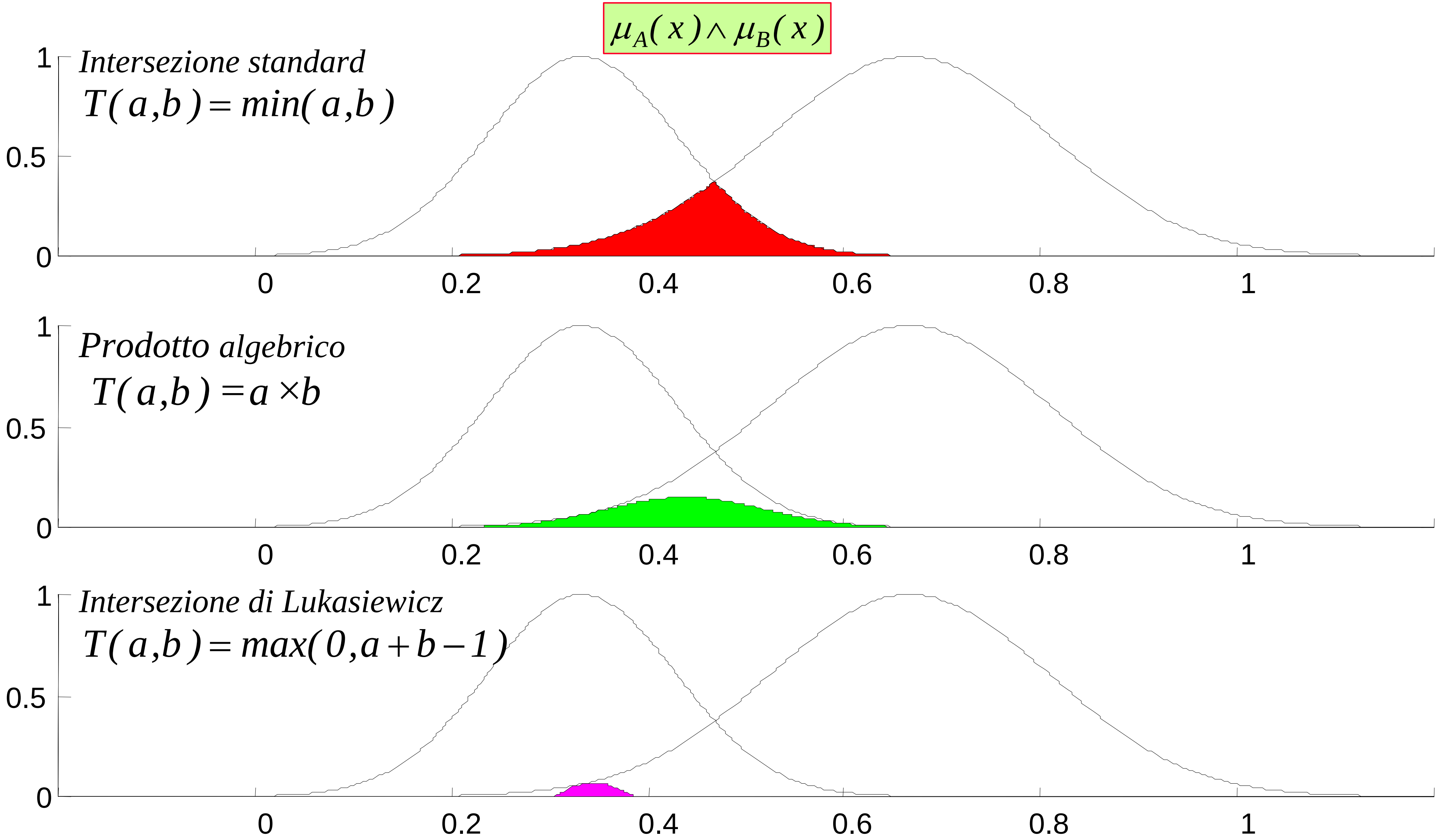
☞ L'operatore *T(.,.)* ha le seguenti proprietà

- Limitatezza $T(0,0) = 0;\ T(a,1) = T(1,a) = a$ *Prevale il più piccolo*
- Monotonicità $b \le c \Rightarrow T(a,b) \le T(a,c)$
- Commutatività $T(a,b) = T(b,a)$
- Associatività $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$

Possibili *t*-norme

- *Intersezione standard* $T(a,b) = min(a,b)$
- *Prodotto algebrico* $T(a,b) = a \times b$
- *Intersezione di Lukasiewicz* $T(a,b) = max(0, a+b-1)$

Esempi di T-norme



S-norme triangolari come connettivi OR ($\vee$)

$$S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

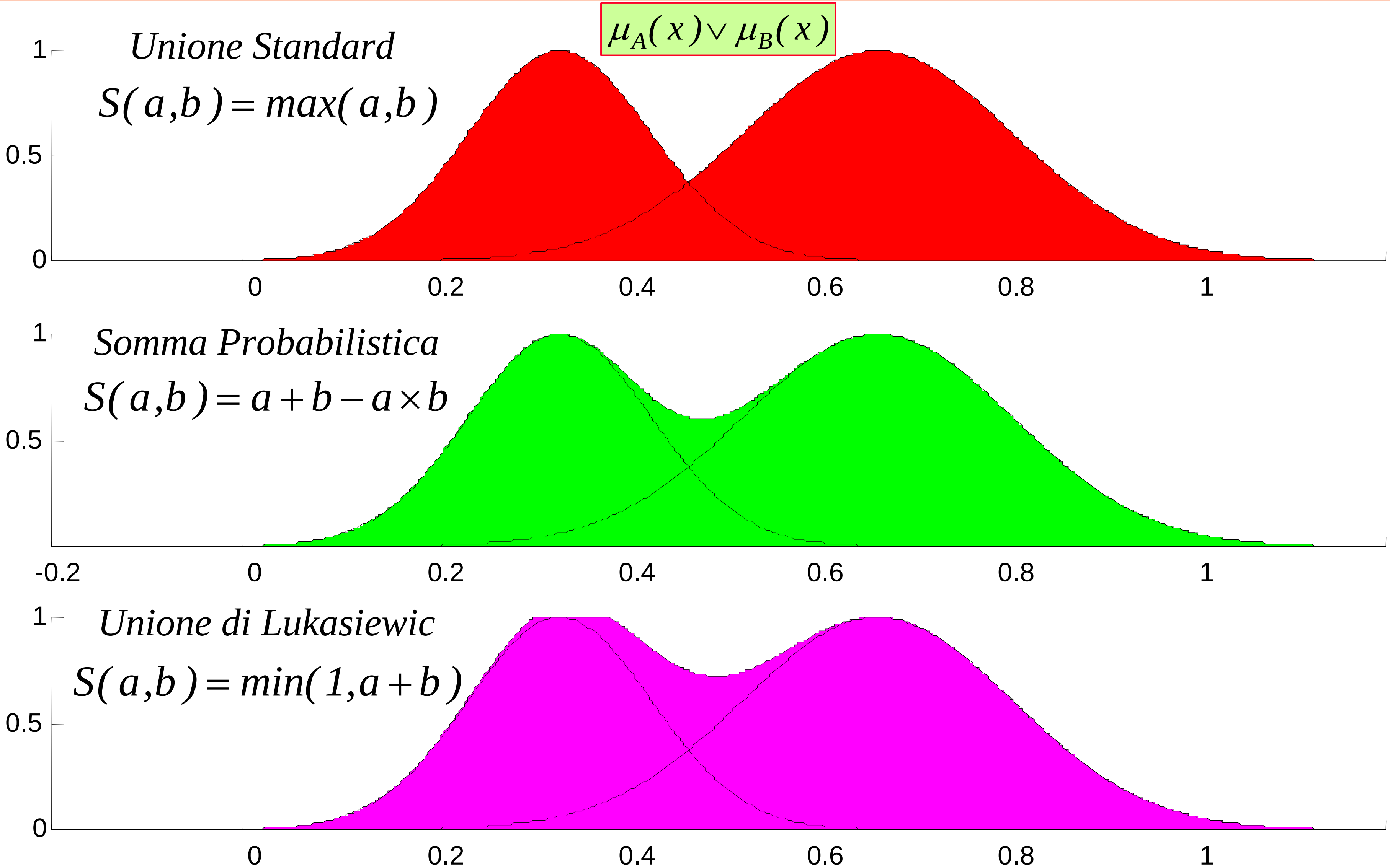
☞ L'operatore *S(.,.)* ha le seguenti proprietà

- Limitatezza $S(1,1) = 1;\ S(a,0) = S(0,a) = a$ *Prevale il più grande*
- Monotonicità $b \le c \Rightarrow S(a,b) \le S(a,c)$
- Commutatività $S(a,b) = S(b,a)$
- Associatività $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$

Possibili *s*-norme

Unione Standard	$S(a,b) = max(a,b)$
Somma Probabilistica	$S(a,b) = a + b - a \times b$
Unione di Lukasiewic	$S(a,b) = min(1, a + b)$

Esempi di S-norme



Implicazione Fuzzy ($A \rightarrow B$)

- La logica fuzzy è ***deduttiva***, nel senso che condiziona la verità del *conseguente* a quella dell'antecedente

$$\underbrace{IF \quad x \text{ is } A}_{antecedente} \quad \underbrace{THEN \quad y \text{ is } B}_{conseguente}$$

- La notazione *x is A* va intesa come il grado di appartenenza di *x* al fuzzy set *A*, ovvero operativamente

$$x \text{ is } A \rightarrow \mu_A(x)$$

- Analogamente per il conseguente *y is B* va intesa come il grado di appartenenza del conseguente *y* al fuzzy set *B*

$$y \text{ is } B \rightarrow \mu_B(y)$$

- Il problema nuovo rispetto alle precedenti operazioni è che adesso *A* e *B* sono ***definiti su due supporti diversi X e Y*** *!!!*

- Perciò va definito un nuovo operatore: ***l' Implicazione fuzzy*** che determina il grado di verità del conseguente sulla base di quello dell'antecedente

Implicazione Fuzzy ($A \rightarrow B$)

☞ L'implicazione

$$R : IF \;\; x \; is \;\; A \; THEN \;\; y \; is \;\; B$$

opera sul prodotto cartesiano fra gli spazi di ingresso (X) e uscita (Y)

$$R : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \rightarrow [0,1]$$

☞ Il grado di appartenenza del conseguente è dato dall'operatore di implicazione (THEN), che si realizza con una *t*-norma (come fosse un AND)

☞ Possibili operatori di implicazione *t*-norme

$$R : \begin{cases} min\left(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\right) & Lukasievic\;\; z \\ max\left(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\right) & Kleene \\ min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right) & Mamdani \\ \mu_A(x) \times \mu_B(y) & Prodotto \end{cases}$$

Superficie di implicazione per l'operatore *'min'*

$$S(x,y) = min\left(\mu_A(x),\mu_B(y)\right)$$

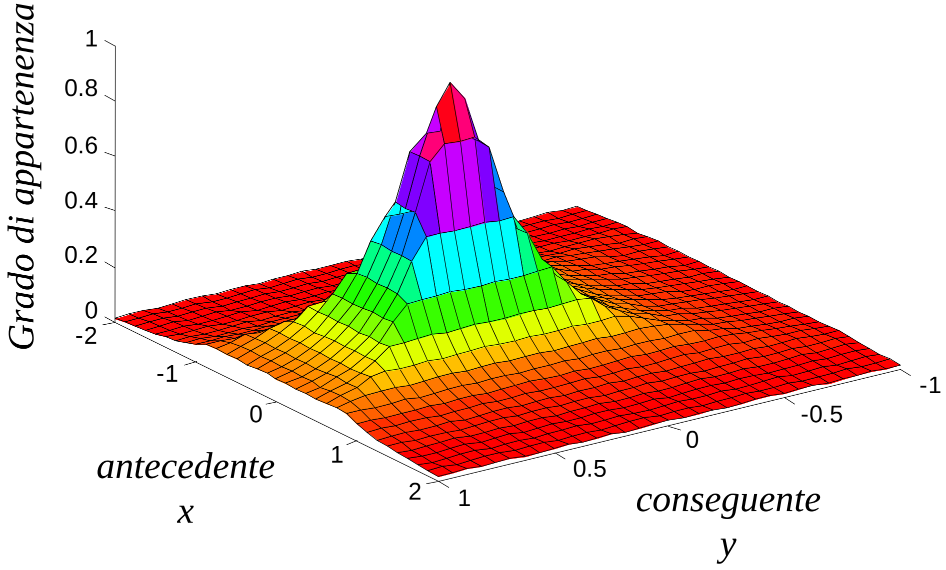
La superficie completa di implicazione è definita dal prodotto cartesiano

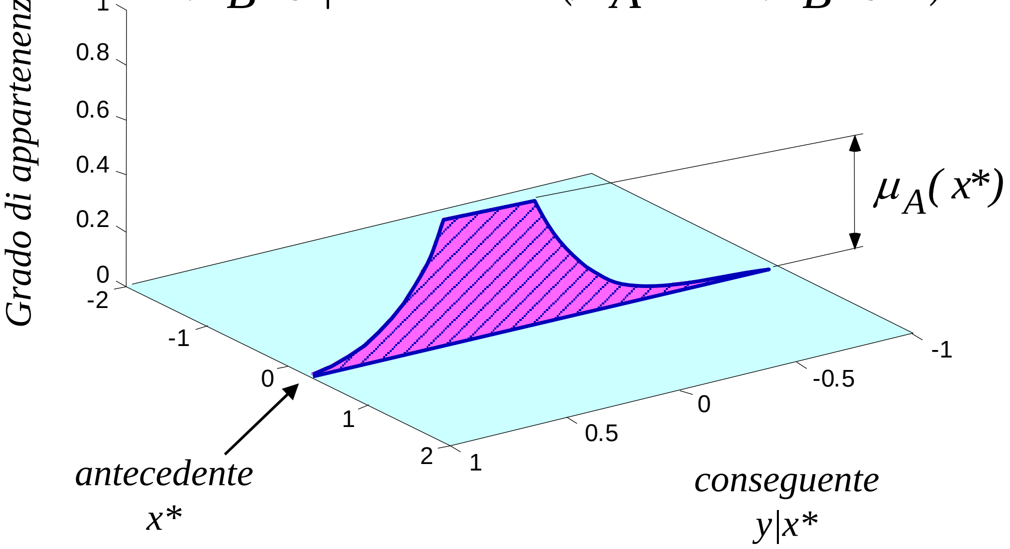
$$R:(X \times Y) \rightarrow [0,1]$$

Il sottoinsieme definito per il valore corrente x dell'antecedente è la funzione*

$$r:(x^* \times Y) \rightarrow [0,1]$$

$$\mu_B(y|x^*) = min\left(\mu_A(x^*),\mu_B(y)\right)$$





Superficie di implicazione per l'operatore '*prod*'

$$S(x,y) = \mu_A(x) \times \mu_B(y)$$

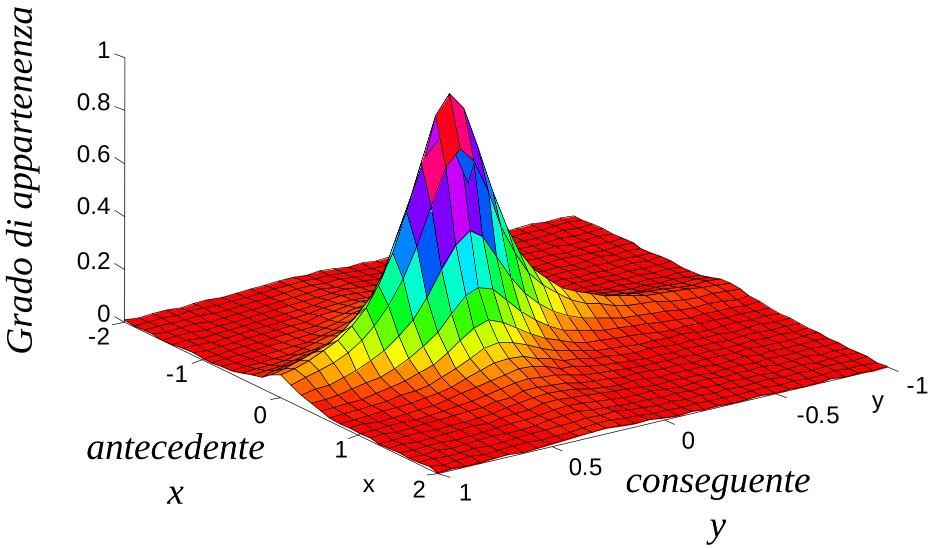
La superficie completa di implicazione è definita dal prodotto cartesiano

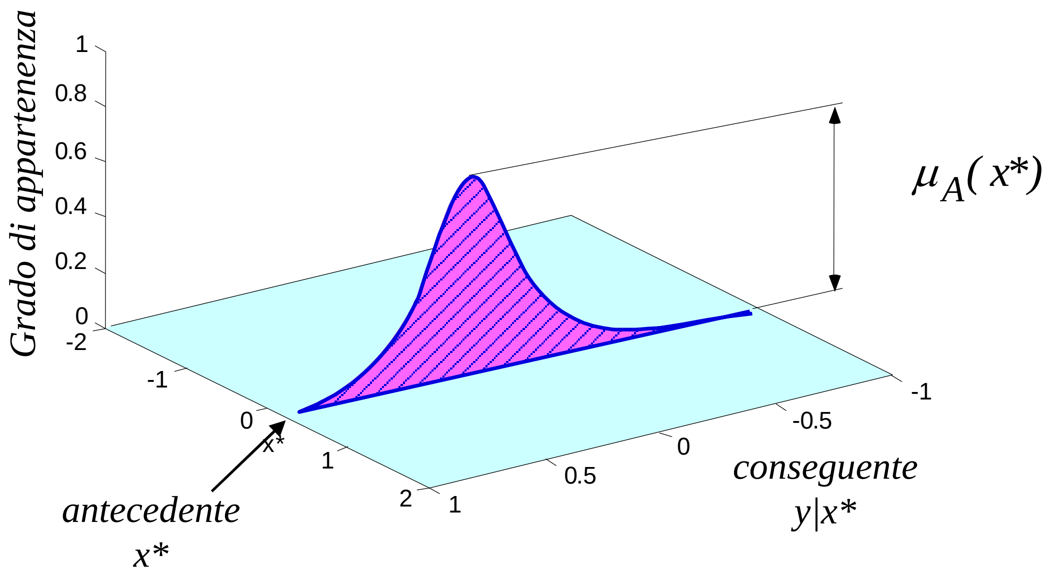
$$R : (X \times Y) \rightarrow [0,1]$$

Il sottoinsieme definito per il valore corrente x dell'antecedente è la funzione*

$$r : (x^* \times Y) \rightarrow [0,1]$$

$$\mu_B(y|x^*) = \mu_A(x^*) \times \mu_B(y)$$





Implicazione Fuzzy

$$R: IF\ \ x\ is\ A\ THEN\ \ y\ is\ B$$

$$\boldsymbol{S}: \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \rightarrow \mu_s(x,y) = \mu_a(x) \wedge \mu_b(y) = \begin{cases} min\{\mu_a(x), \mu_b(y)\} \\ \mu_a(x) \times \mu_b(y) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \in \boldsymbol{X} \\ y \in \boldsymbol{Y} \end{matrix}$$

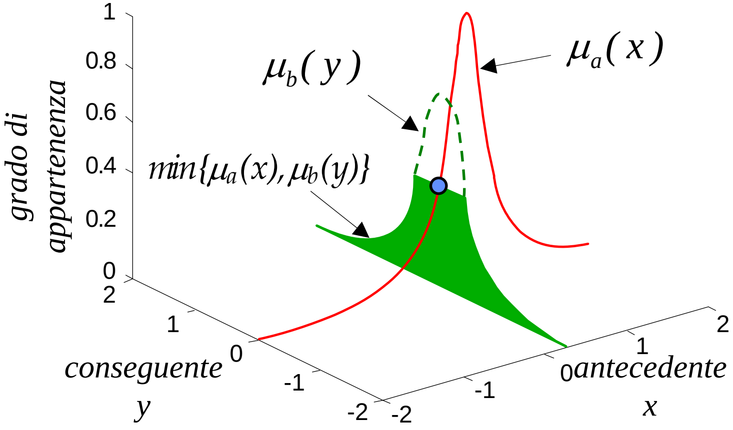
Prodotto Cartesiano
dei due insiemi fuzzy

Connettivo
di implicazione

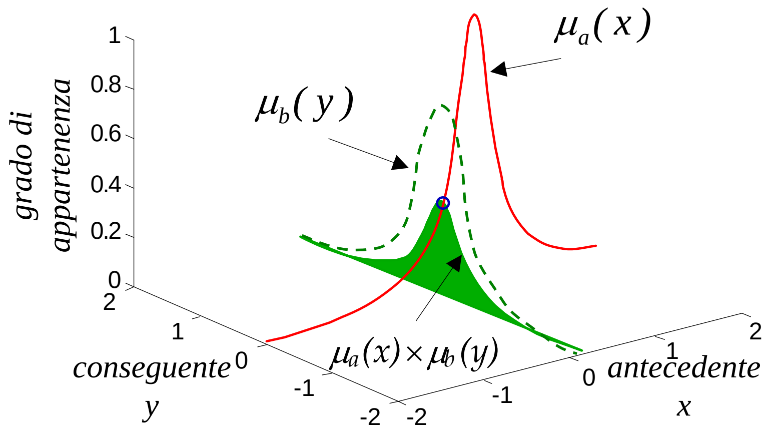
Possibili
operatori

L'antecedente condiziona il grado di appartenenza del conseguente

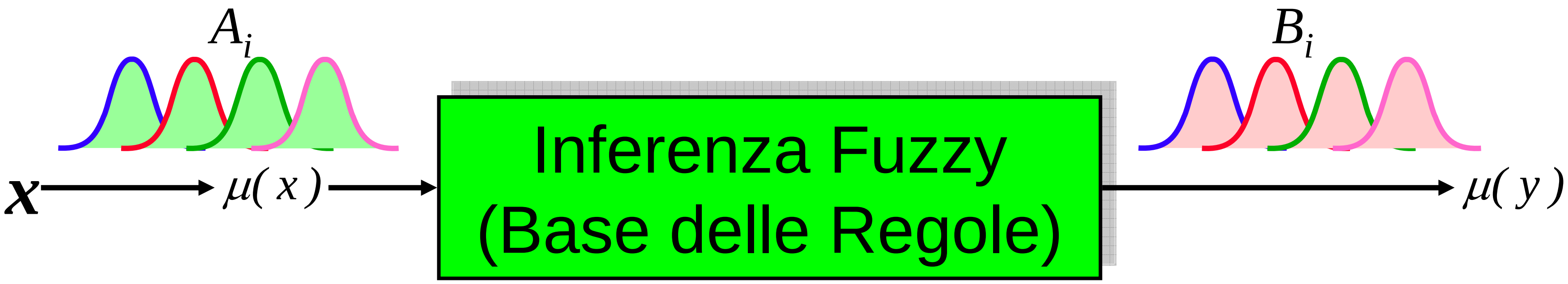
Operatore ‘min’



Operatore ‘prod’



Logica Fuzzy basata su Implicazioni



Regola di inferenza

$$R_i : \; IF \; \underbrace{\overbrace{x_1 \; is \; A_1}^{\mu_1(x_1)} \; AND \; \overbrace{x_2 \; is \; A_2}^{\mu_2(x_2)}}_{antecedente} \; THEN \; \underbrace{y \; is \; B}_{conseguente}$$

- ☞ Alla base della logica fuzzy stanno le regole di inferenza
- ☞ Più predicati fuzzy possono essere ***connessi*** fra loro **(AND)**
- ☞ Dato un predicato ***antecedente***, la sua verità implica **(THEN)** quella del predicato ***conseguente***
- ☞ Vanno definiti gli operatori logici di ***connessione*** fra concetti fuzzy e di ***implicazione*** fra antecedente e conseguente

Implicazione con un solo antecedente

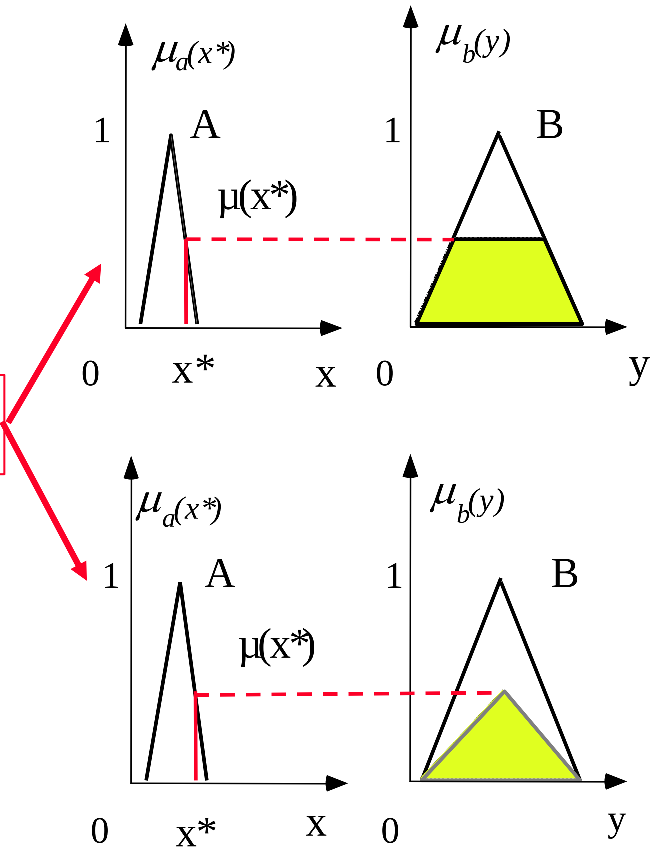
$$IF\ \ x\ is\ \ A\ THEN\ \ y\ is\ \ B$$

$$\mu_b(y) == \mu_a(x^*) \wedge \mu_b(y)$$

Composizione 'min'

$$x\ \ is\ \ A \Rightarrow \mu_a(x)$$

Composizione 'prod'



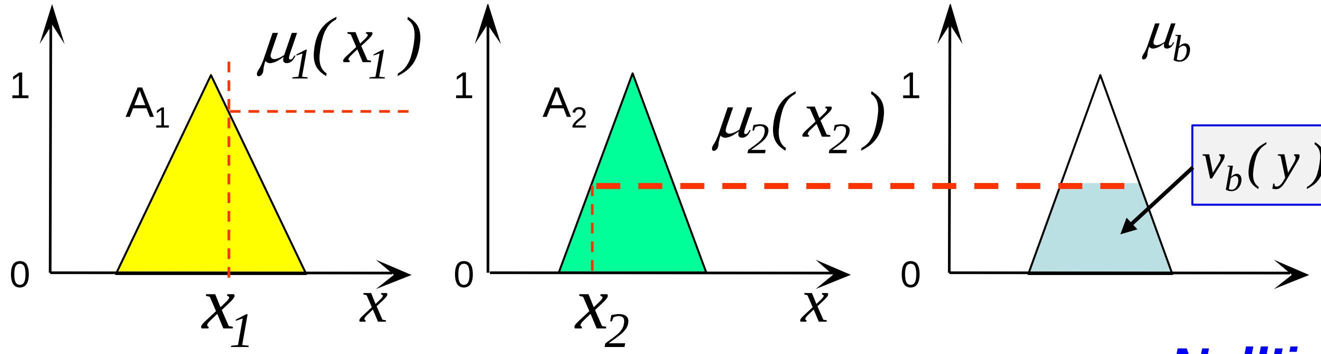
$$\mu_b(y) = min\left(\mu_a(x^*), \mu_b(y)\right)$$

$$\mu_b(y) = \mu_a(x^*) \times \mu_b(y)$$

Implicazione con più antecedenti

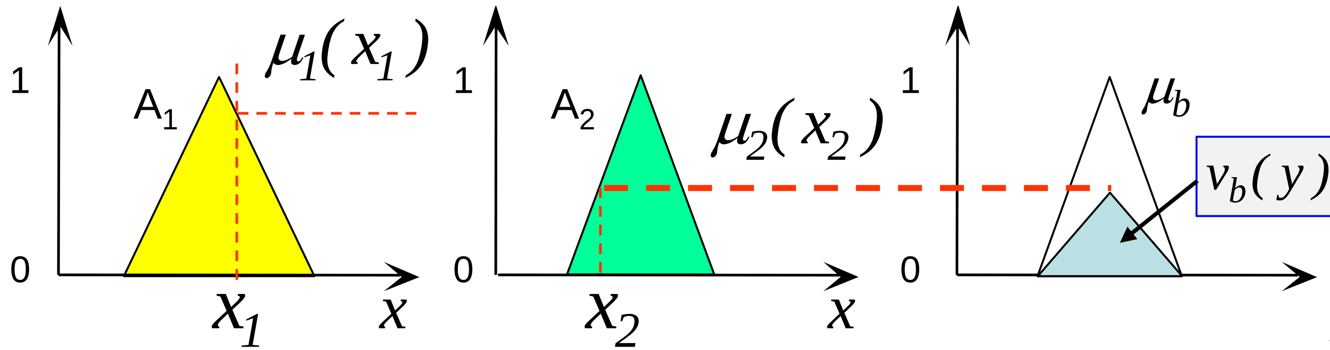
$$IF\ \left(x_1\ is\ A_1\right)\ AND\ \left(x_2\ is\ A_2\right)\ THEN\ \ y\ is\ B$$

$$\mu_b(y) = \left(\mu_1(x^*) \wedge \mu_2(x^*)\right) \wedge \mu_b(y)$$



$$v_b(y) = min\left(min\left(\mu_1(x), \mu_2(x)\right), \mu_b(y)\right)$$

Nell'implicazione prevale l'antecedente con minore grado di verità



$$v_b(y) = min\left(\mu_1(x), \mu_2(x)\right) \times \mu_b(y)$$

Algoritmo inferenziale fuzzy

- In genere una sola regola fuzzy non è sufficiente per definire l'intero concetto che vogliamo esprimere
- Si usano allora più regole, connesse fra di loro con il predicato ELSE
- Esempio: si considerino due regole

$$
\begin{aligned}
&R_1 : IF\ (x_1\ is\ A_{11})\ AND\ (x_2\ is\ A_{21})\ THEN\ y\ is\ B_1 \\
&ELSE \\
&R_2 : IF\ (x_1\ is\ A_{12})\ AND\ (x_2\ is\ A_{21})\ THEN\ y\ is\ B_2
\end{aligned}
$$

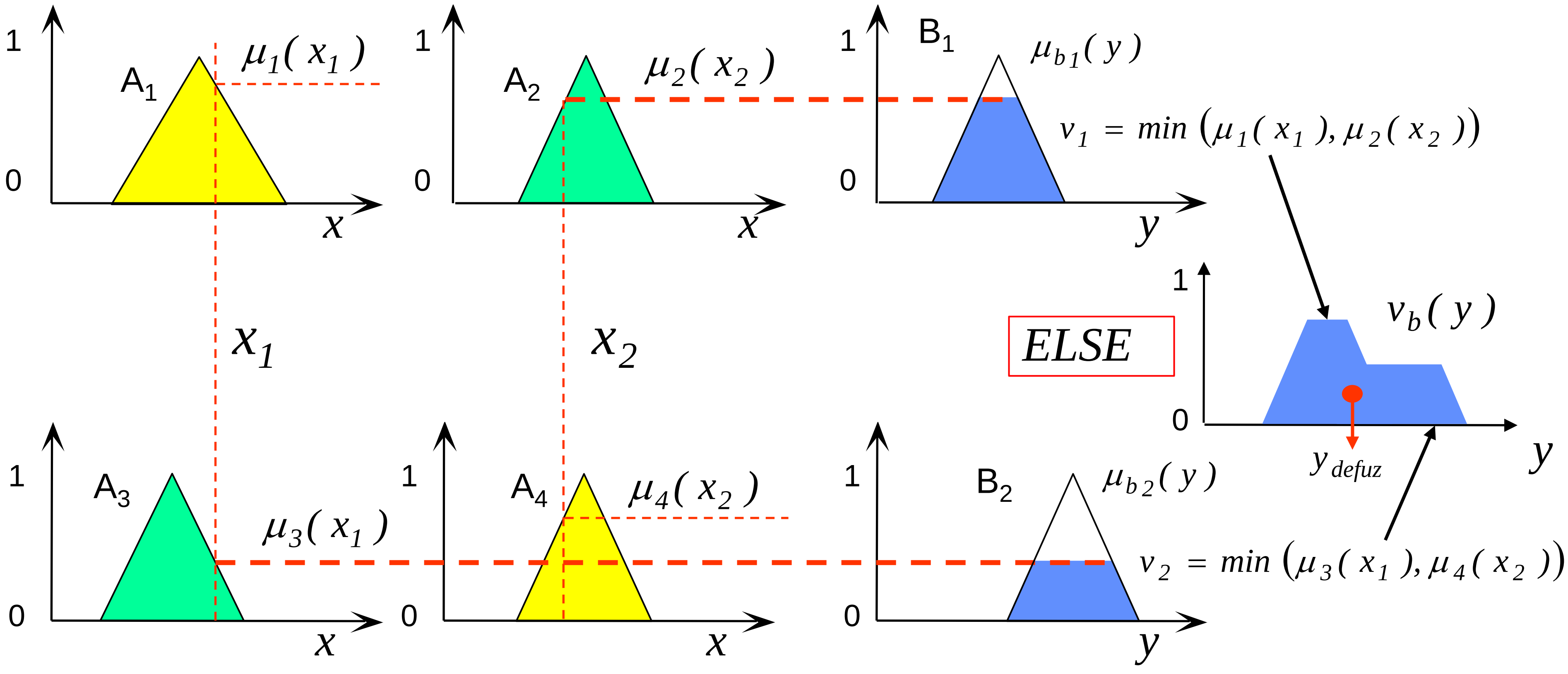
In questo caso si considera l'alternativa fra le somiglianze di x_1 a A_{11} o A_{12} e di x_2 a A_{21} o A_{22}. Ciascun antecedente mappa il conseguente in B_1 o B_2 in funzione del proprio grado di verità

- Tale connettivo rappresenta il grado di alternativa delle singole regole e viene perciò realizzato con un operatore *s*-norma ($\vee$)

Composizione di due regole

Prima regola

$$IF \quad x_1 \subset A_1 \quad AND \quad x_2 \subset A_2 \quad THEN \quad y \subset B_1$$



Seconda regola

$$IF \quad x_1 \subset A_3 \quad AND \quad x_2 \subset A_4 \quad THEN \quad y \subset B_2$$

Connettivi usati nell'inferenza Fuzzy

$$R_1 : \ IF \ \overbrace{x_1 \subset A_3}^{\mu_1(x_1)} \ AND \ \overbrace{x_2 \subset A_4}^{\mu_2(x_2)} \ THEN \ \ y \subset B_1$$

CONNETTIVO REGOLE *massimo* → $ELSE$

CONNETTIVO ANTECEDENTI minimo o prodotto

IMPLICAZIONE minimo o prodotto

$$R_2 : \ IF \ \underbrace{x_1 \subset A_3}_{\mu_3(x_1)} \ AND \ \underbrace{x_2 \subset A_4}_{\mu_4(x_2)} \ THEN \ \ y \subset B_2$$

Inferenza generalizzata ad *m* regole

n antecedenti

m regole

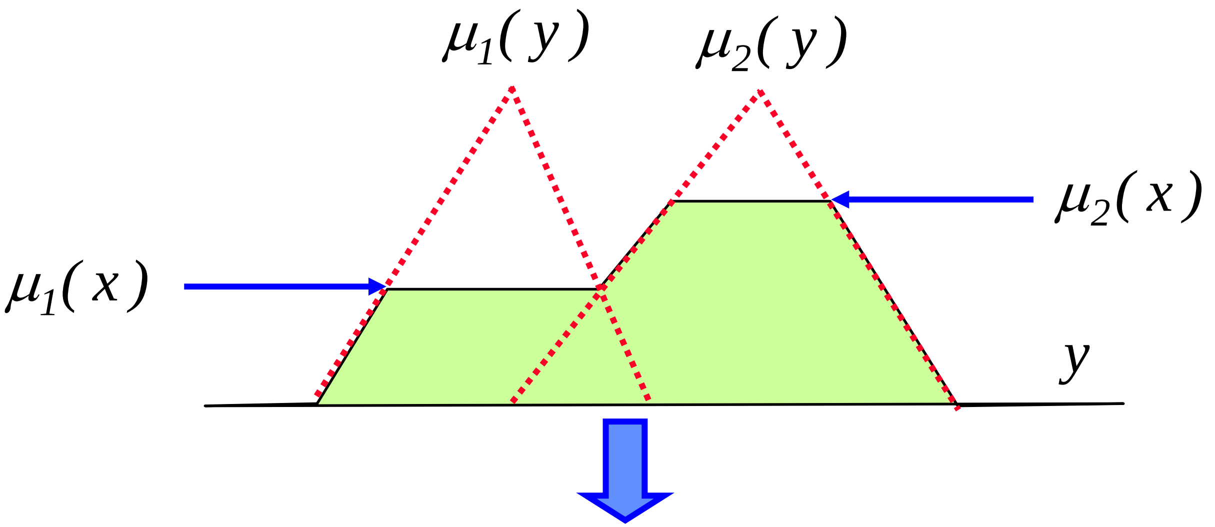
$$
\begin{aligned}
&R_1 : \quad IF\ (x_1\ is\ A_{1,1})\ AND\ .....\ AND\ (x_n\ is\ A_{1,n})\ THEN\ (y\ is\ B_1)\\
&\qquad ELSE\\
&.........\\
&R_m : \quad IF\ (x_1\ is\ A_{m,1})\ AND\ .....\ AND\ (x_n\ is\ A_{m,n})\ THEN\ (y\ is\ B_m)
\end{aligned}
$$

$$A_{j,i} \rightarrow \mu_{j,i}(x) \quad B_j \rightarrow \mu_{b_j}(y)$$

$$\mu_b(y) = \bigcup_{j=1}^{m} \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mu_{j,i}(x^*) \right) \wedge \mu_{b_j}(y) \right\}$$

Ritorno al mondo reale: la defuzzificazione

- Il risultato dell'inferenza fuzzy è un fuzzy set ottenuto per unione (S-norma) dei risultati delle singole inferenze

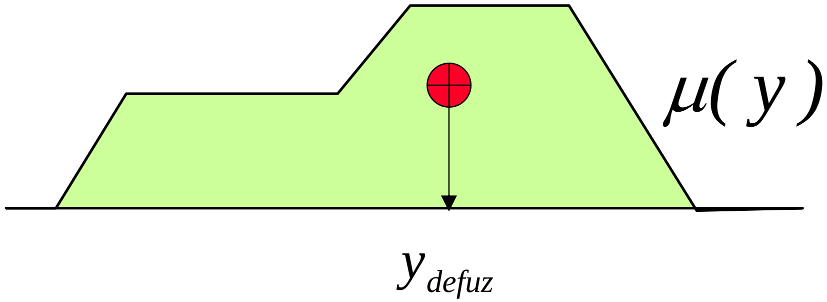


Quale y ?

- Il Fuzzy Set colorato in verde rappresenta l'uscita dell'inferenza in termini fuzzy, ma come far corrispondere a questo un ***singolo valore crisp di y*** rappresentativo dell'inferenza?

Defuzzificazione

- I metodo più affidabile è il *centro di gravità*.
- Si calcola y_{defuz} come l'ascissa del baricentro della figura geometrica che rappresenta il fuzzy set di uscita



$$y_{defuz} = \frac{\int_Y y \cdot \mu(y)\,dy}{\int_Y \mu(y)\,dy}$$

Aspetti numerici

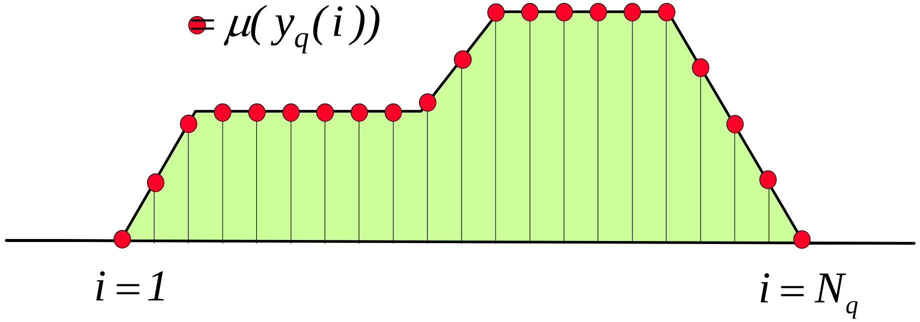
- Si divide il supporto *y* in un numero sufficiente di intervalli

$$\{ y_q(i) \mid i = 1,\ldots,N_q \}$$

- Si calcola la funzione di appartenenza nei punti y_q

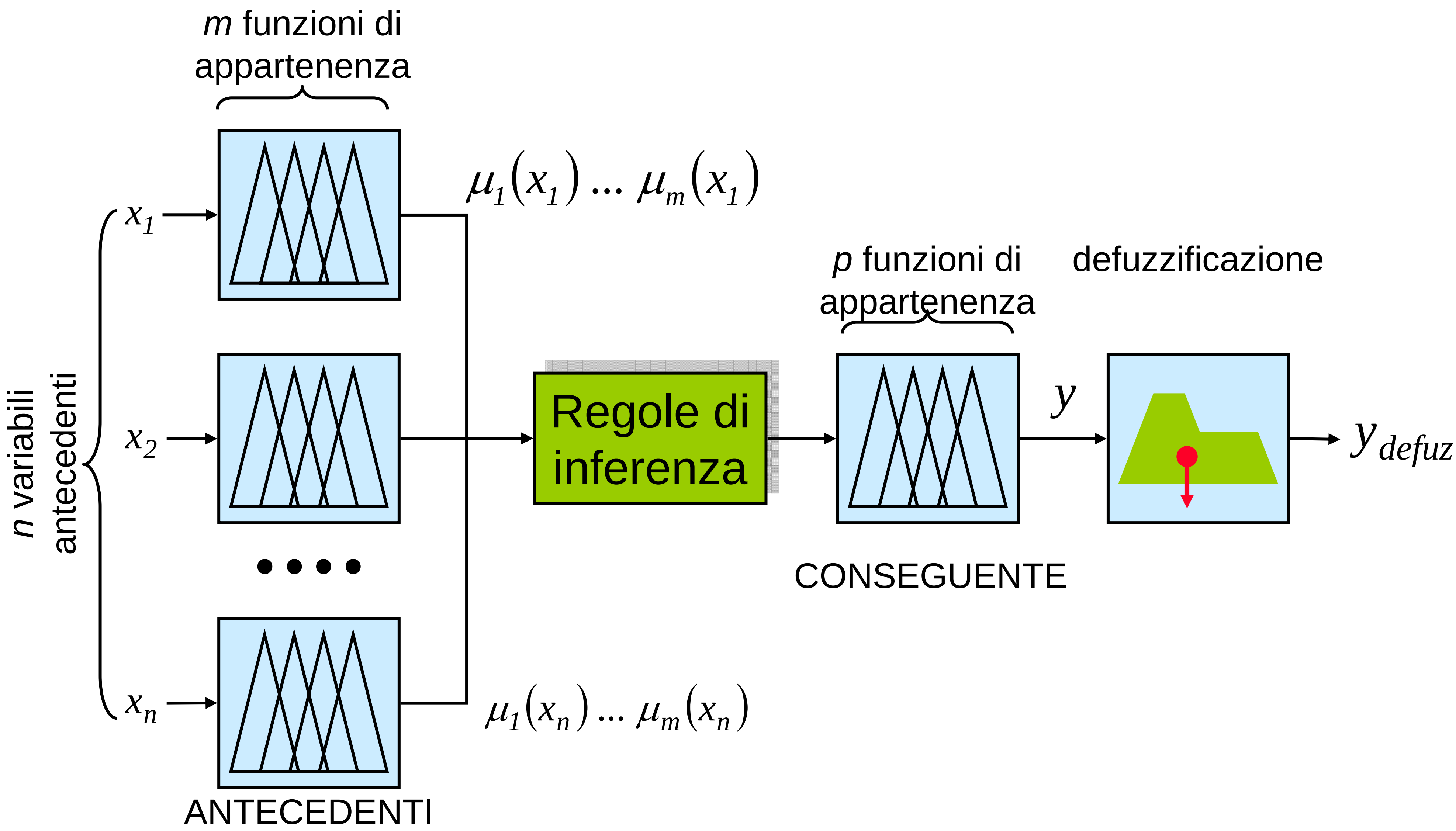
$$\{ \mu(y_q(i)) \mid i = 1,\ldots,N_q \}$$

- L'integrale viene approssimato da una sommatoria estesa ai punti della discretizzazione



$$y_{defuz} = \frac{\sum_{i=1}^{N_q} y_q(i) \cdot \mu(y_q(i))}{\sum_{i=1}^{N_q} \mu(y_q(i))}$$

Schema riassuntivo dell'inferenza Fuzzy



Inferenza Fuzzy alla Sugeno

- Il costrutto logico è lo stesso, con antecedenti fuzzy e le medesime regole di composizione, ma il conseguente è un singolo valore deterministico (*singleton*)

$$IF\ \ x_1\ is\ A_1\ AND\ x_2\ is\ A_2\ \ THEN\ \boxed{y = k}$$

Valore assunto dall'uscita in funzione del grado di verità dell'antecedente

- Viene eliminato il problema della defuzzificazione: basterà effettuare la media dei vari singleton pesata con i gradi di verità degli antecedenti;
- E' immediata l'estensione a conseguenti più complessi, come funzioni lineari o più in generali a funzione a base radiale (approssimatori universali)

$$\boxed{IF\ x_1\ is\ A_1\ AND\ x_2\ is\ A_2\ \ THEN\ \ y = f(x_1, x_2)}$$

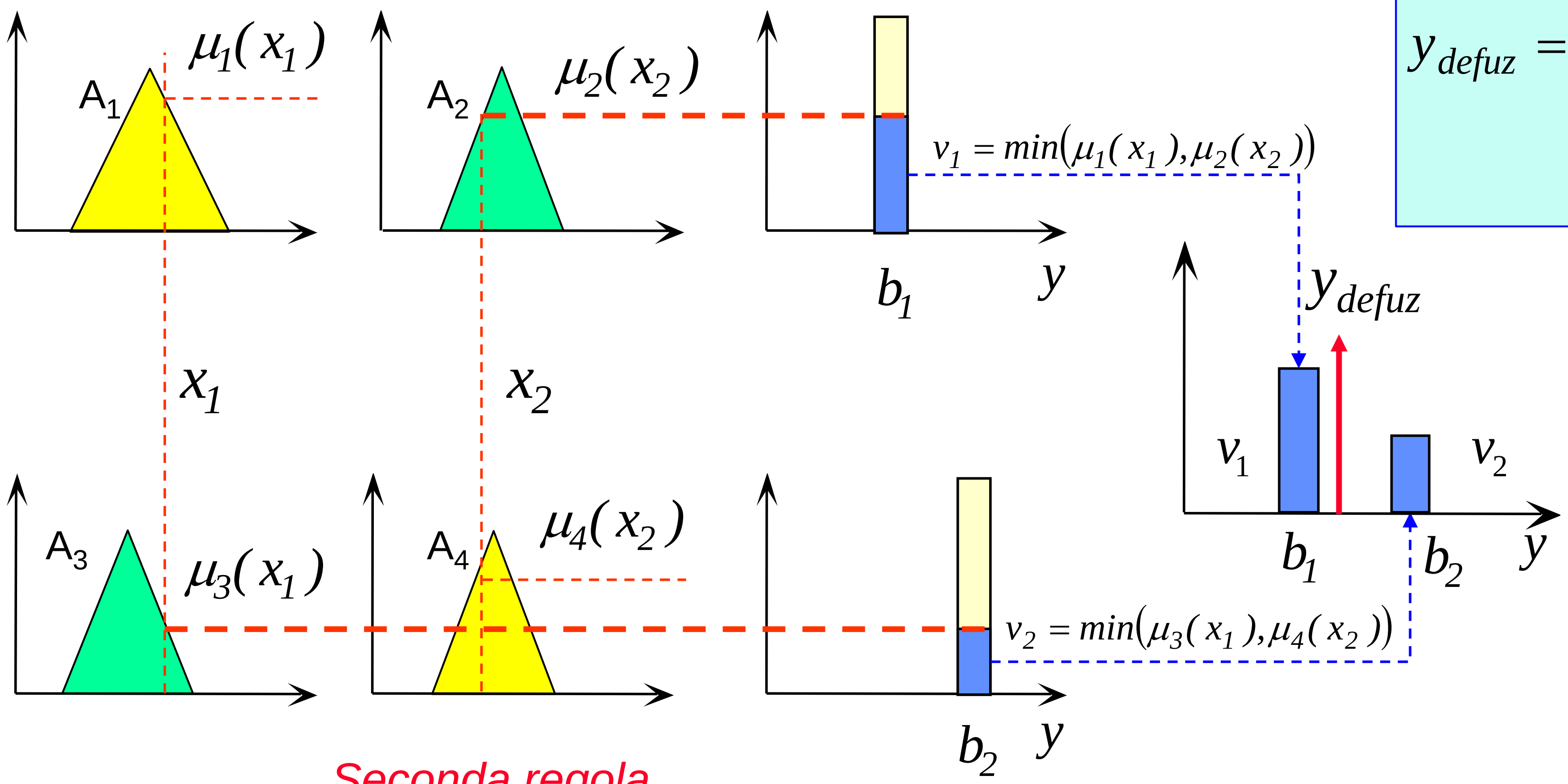
- Si apre così la strada ad un ricongiungimento fra la teoria dei sistemi "classica" ed il mondo fuzzy.

Implicazione alla Sugeno

Prima regola

$$IF \;\; x_1 \subset A_1 \;\; AND \;\; x_2 \subset A_2 \;\; THEN \;\; y = b_1$$

$$y_{defuz} = \frac{\sum_{i=1}^{N} v_i b_i}{\sum_{i=1}^{N} v_i}$$



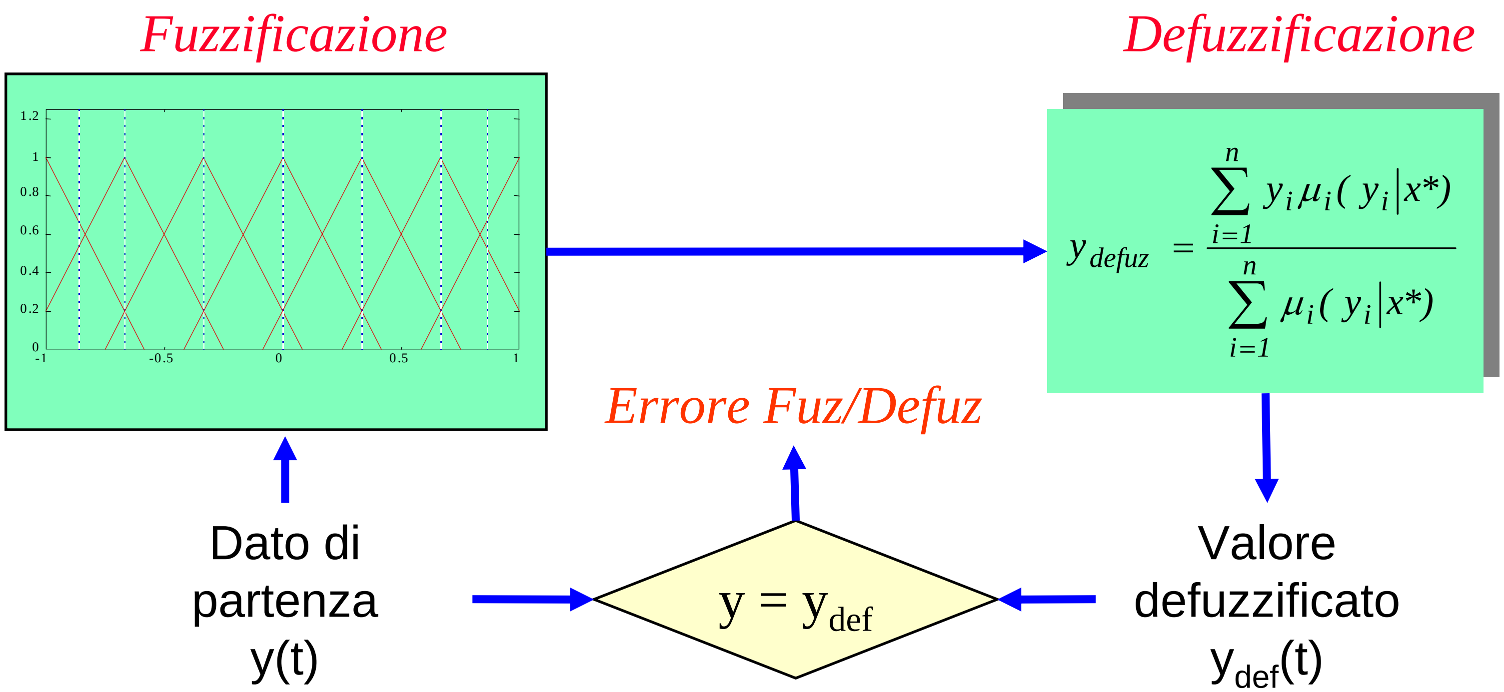
Seconda regola

$$IF \;\; x_1 \subset A_3 \;\; AND \;\; x_2 \subset A_4 \;\; THEN \;\; y = b_2$$

Errore di Fuzzificazione/Defuzzificazione

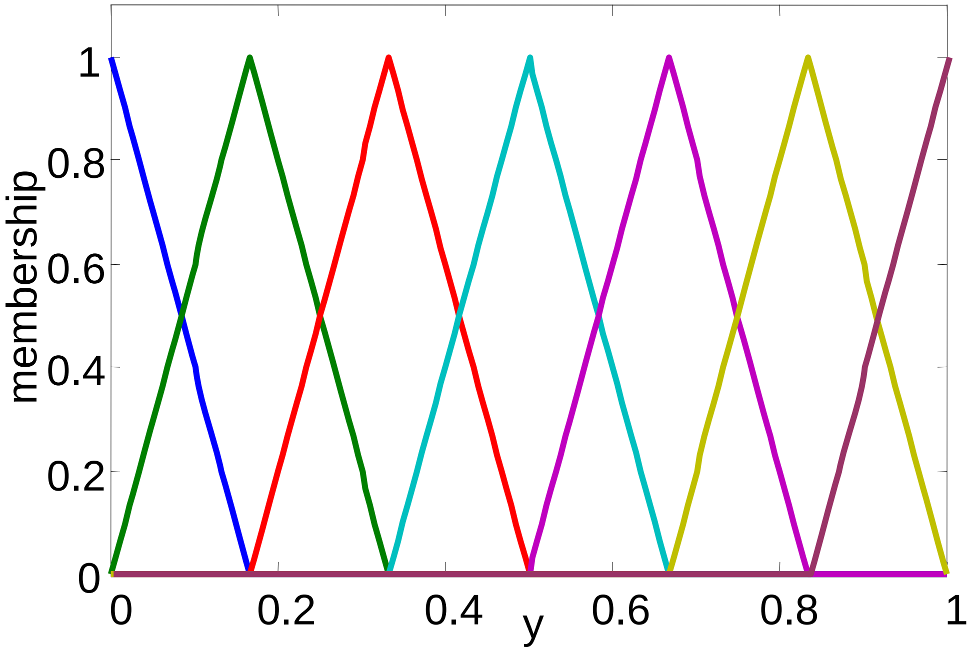
- Il processo di fuzzificazione e successiva defuzzificazione è complessivamente nonlineare e perciò introduce degli errori nelle variabili

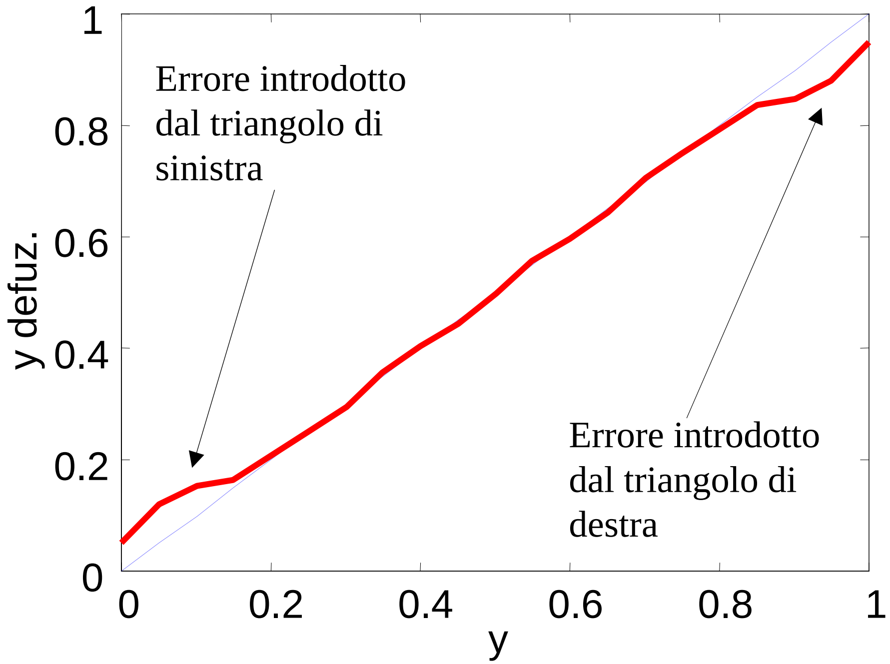
- Per valutarli si effettua le due operazioni in sequenza e si compara il risultato al valore di partenza



Errori di Fuz/Defuz

$$R_i : \quad if \;\; x \; is \; A_i \quad then \;\; y = A_i$$



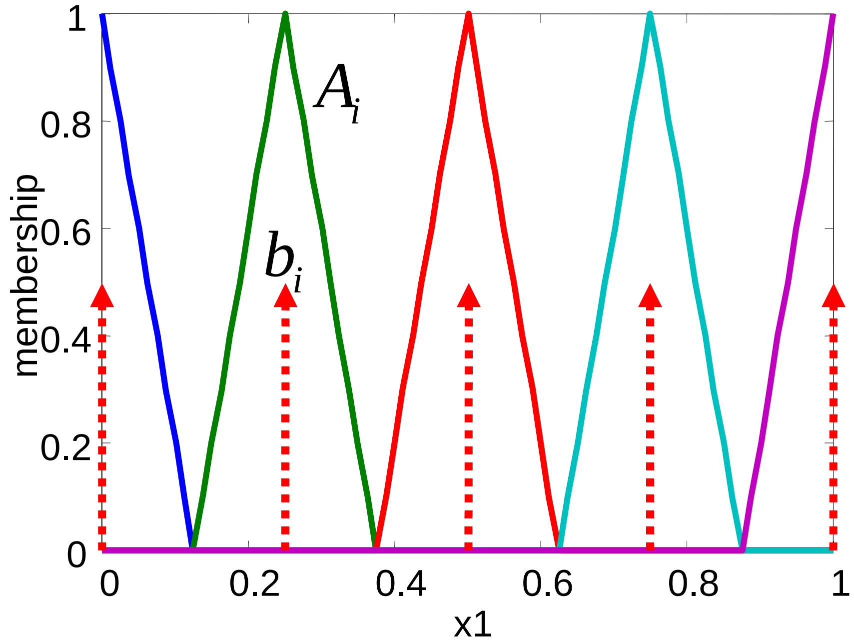


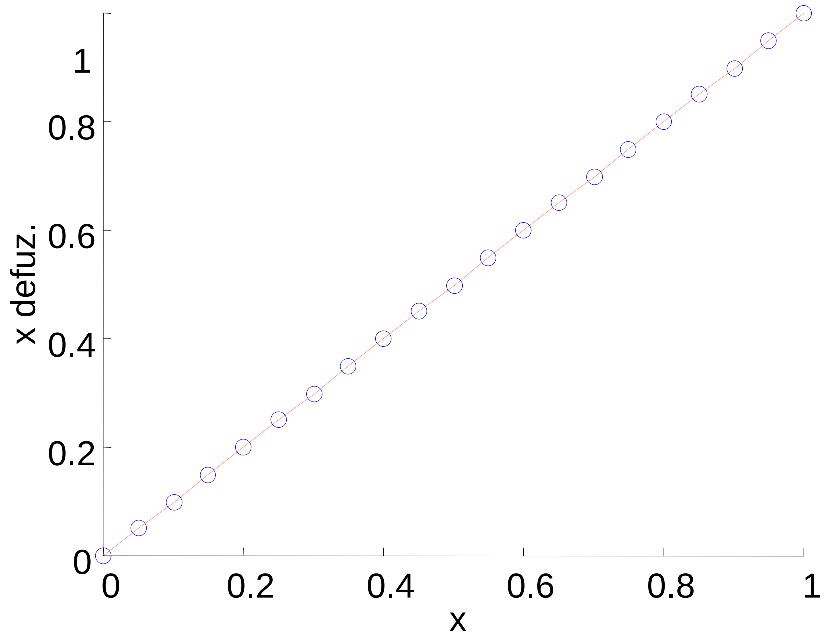
L’errore di defuzzificazione è dovuto all’asimmetria dei rappresentatori estremi (triangoli rettangoli) che differiscono dai rappresentatori centrali (triangoli isosceli) anche nel caso ottimale di sovrapposizione al 50%

$$y_{defuz} = \frac{\sum_{i=1}^{N_q} y_q(i) \cdot \mu(y_q(i))}{\sum_{i=1}^{N_q} \mu(y_q(i))}$$

Errore di defuzzificazione in Sugeno

$$R_i : \quad if \;\; x \; is \; A_i \quad then \quad y = b_i$$





Anche utilizzando qualificatori non ottimali (intersezione al 50%) si ottiene ugualmente una defuzzificazione senza errore dovuto alla fuzzificazione

Defuzzificazione: media dei conseguenti pesata con i gradi di attivazione

$$y = y_{defuz} = \frac{\sum_{i=1}^{M} b_i \times \mu_i}{\sum_{i=1}^{M} \mu_i}$$