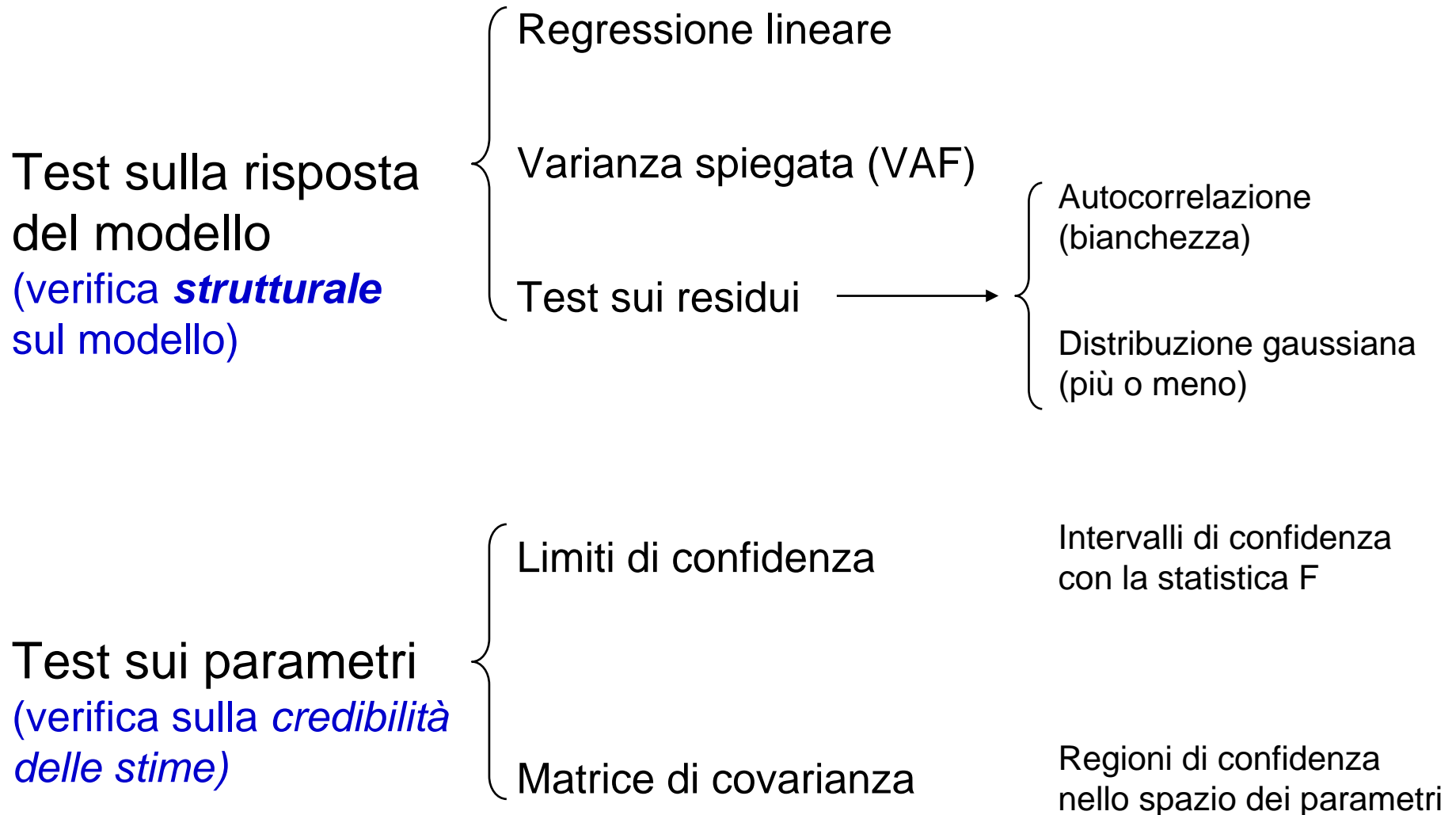


Test di validazione dei modelli

A proof is an argument that convinces someone who knows the subject
Davis and Hersh (1981)

A good model is one that fools 80% of the experts 80% of the time
Alan Turing (1942)

Valutazione della stima



Test di validazione delle stime: l'ipotesi nulla H_0

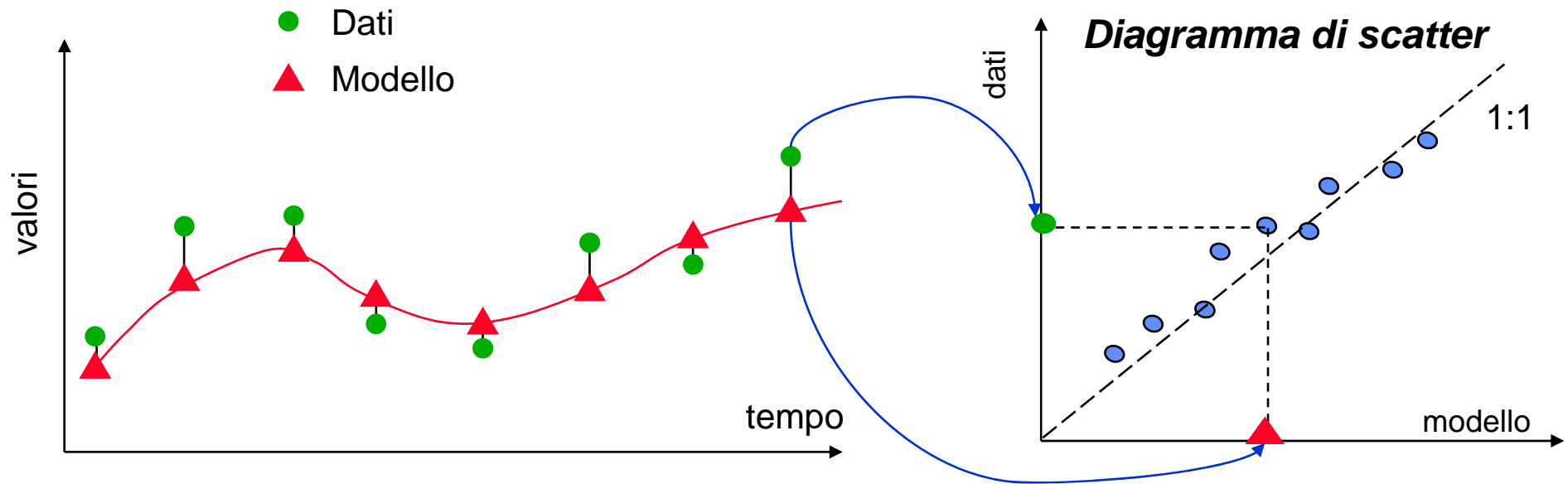
- 👉 Nel test statistico viene verificata in termini probabilistici la validità di un'ipotesi statistica, detta **ipotesi nulla** H_0 .
- 👉 Nel valutare le statistiche del confronto dati/modello si può commettere uno dei due seguenti errori

Errore di Tipo I: si rifiuta una H_0 che in realtà è corretta;

Errore di Tipo II: si accetta una H_0 che è in realtà falsa.

- 👉 *Livello di significatività:* è il valore α che indica la massima probabilità che venga rifiutata un H_0 vera. Il livello di significatività α viene normalmente fissato in anticipo, tipicamente al 5%
- 👉 I due errori ***non sono simmetrici*** e, in generale, vi è un ampio livello di tolleranza nell'accettare H_0 , mentre per rifiutarla quando risulta soddisfatta occorre che i dati campionari siano molto improbabili.

Confronto fra dati e risposte del modello

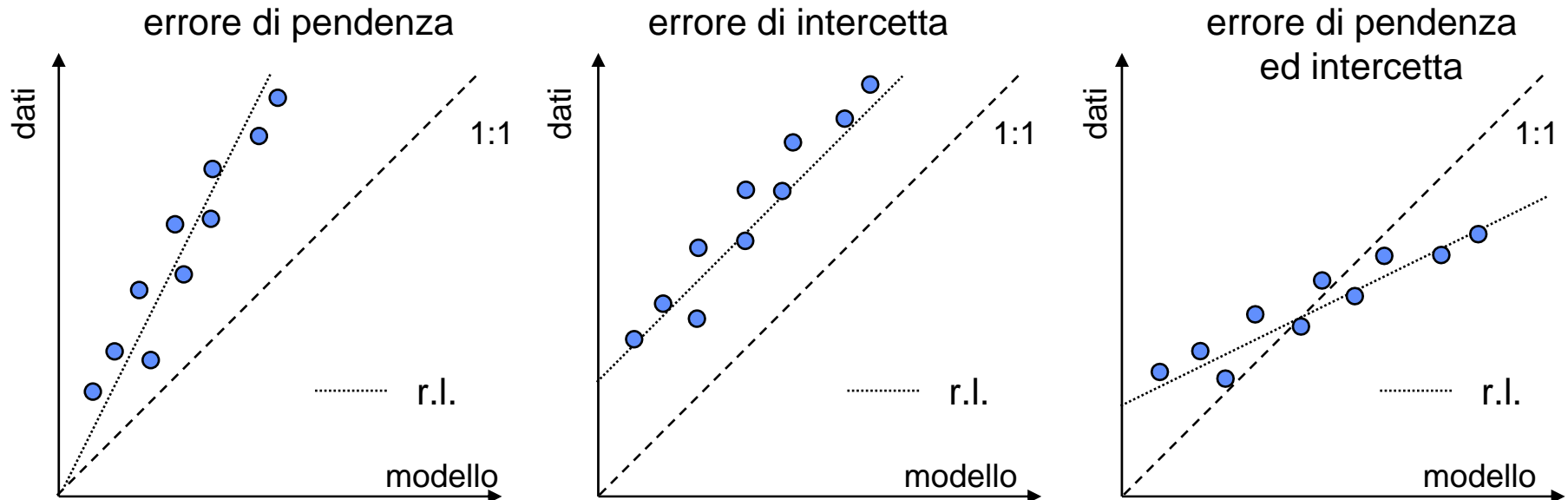


Plottando i campioni prodotti dal modello contro i dati sperimentali, si elimina il fattore tempo, ma si vede la corrispondenza diretta di ciascuna coppia dato/modello.

Per una concordanza perfetta, gli elementi del plot dati/modello si dovrebbero disporre lungo la linea 1:1, avente pendenza 1 e passante per l'origine.

Test di validazione dei parametri

- Una volta stimati i parametri di un modello, l'obiettivo del test è determinare se le stime sono *statisticamente plausibili*, il che porta ad accettare l'ipotesi nulla H_0 .
- Ovviamente, ciò non ci assicura la loro "verità", ma solo che non possono essere considerati errati.
- Regressione lineare:** La più semplice tecnica di validazione è verificare se la concordanza fra i dati sperimentali e le uscite del modello sono spiegabili da una semplice regressione lineare da paragonare con la retta 1:1. Si possono avere i seguenti errori

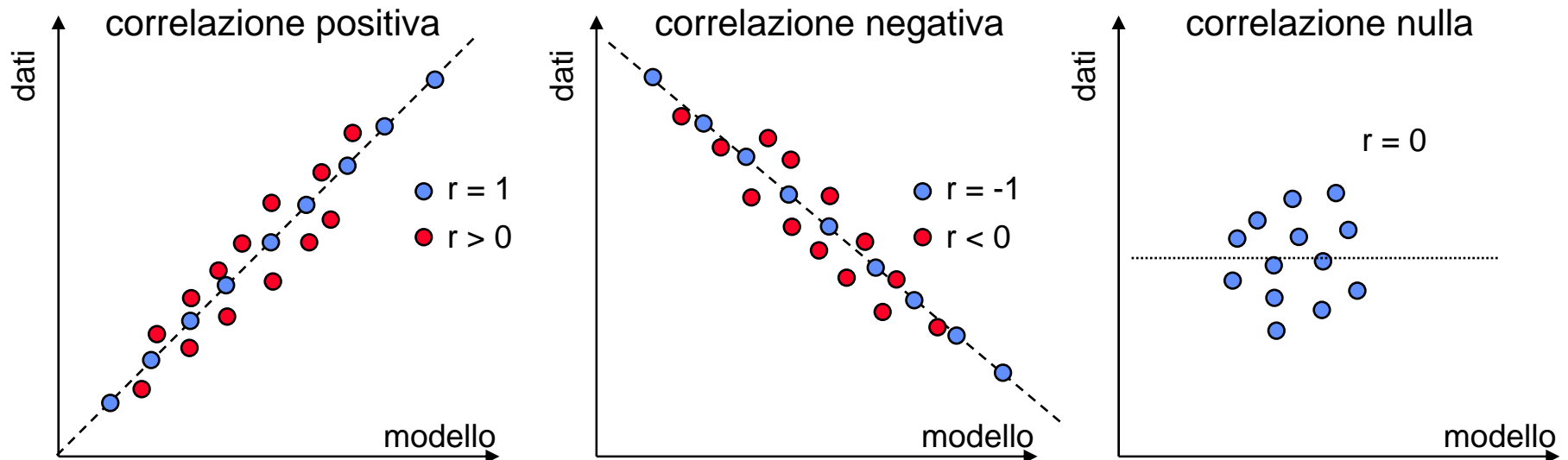


Test di correlazione

👉 La relazione fra dati e uscite del modello può essere rappresentata mediante il coefficiente di correlazione r

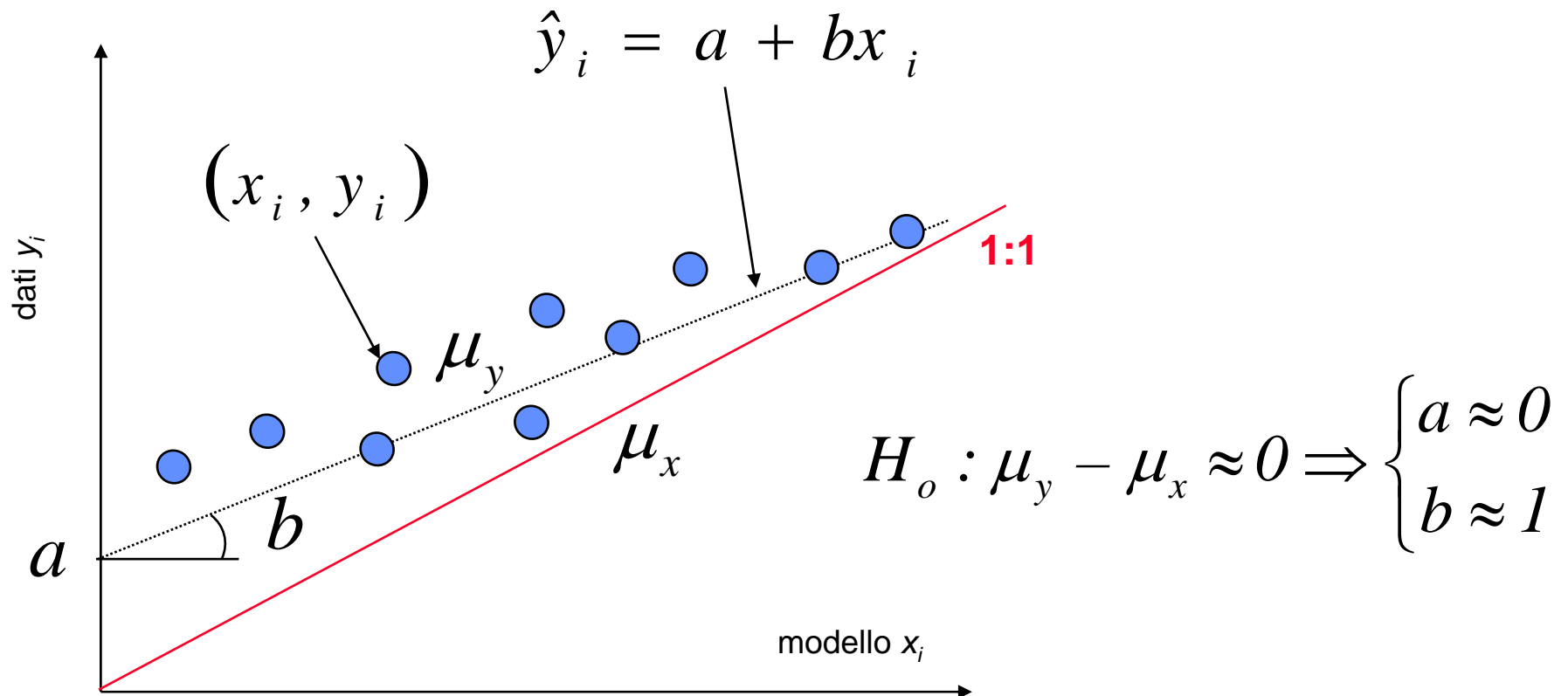
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$\begin{cases} x_i = \text{uscite modello} & \bar{x} = \text{media di } x_i \\ y_i = \text{dati} & \bar{y} = \text{media di } y_i \end{cases}$$



Test statistico sulla retta di regressione

- Il test su r è limitato perché non esiste un valore di riferimento
- L'approccio più corretto è quello *statistico*: si testa che la retta di regressione sia statisticamente uguale alla retta 1:1, cioè che abbia **Pendenza 1 e Intercetta 0**
- Dobbiamo trovare un test statistico per decidere se accettare $H_0: \mu_y - \mu_x = 0$



La statistica F

Il test si basa sulla statistica F , che se applicata alla retta di regressione, si calcola come:

$$F_{2,n-2,\alpha} = \frac{na^2 + 2a(b-1)\sum_{i=1}^n x_i + (b-1)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{2S_{yx}^2}$$

dove:

⇒ a = valore stimato dell'intercetta;

⇒ b = valore stimato della pendenza;

⇒ x_i = singole predizioni del modello;

⇒ n = numero delle coppie (osservazioni-modello);

⇒ y_i = singoli valori osservati (*validation data*)

⇒ \bar{y} = valor medio degli osservati

⇒ S_{yx}^2 = residual mean squared error

$$RMSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$$

Interpretazione della statistica F

- Se il modello proposto è valido, quindi se la regressione fitta bene i dati, la statistica F darà valori inferiori ai limiti riportati nelle apposite tabelle.
- Se il valore di F trovato è inferiore al valore di tabella, per numero di dati e livello di confidenza scelto, non si può rifiutare l'ipotesi nulla $H_0: \mu_y - \mu_x = 0$ (modello coincidente con i dati).

Perciò il modello è validato se non viene rifiutata l'ipotesi nulla H_0 .

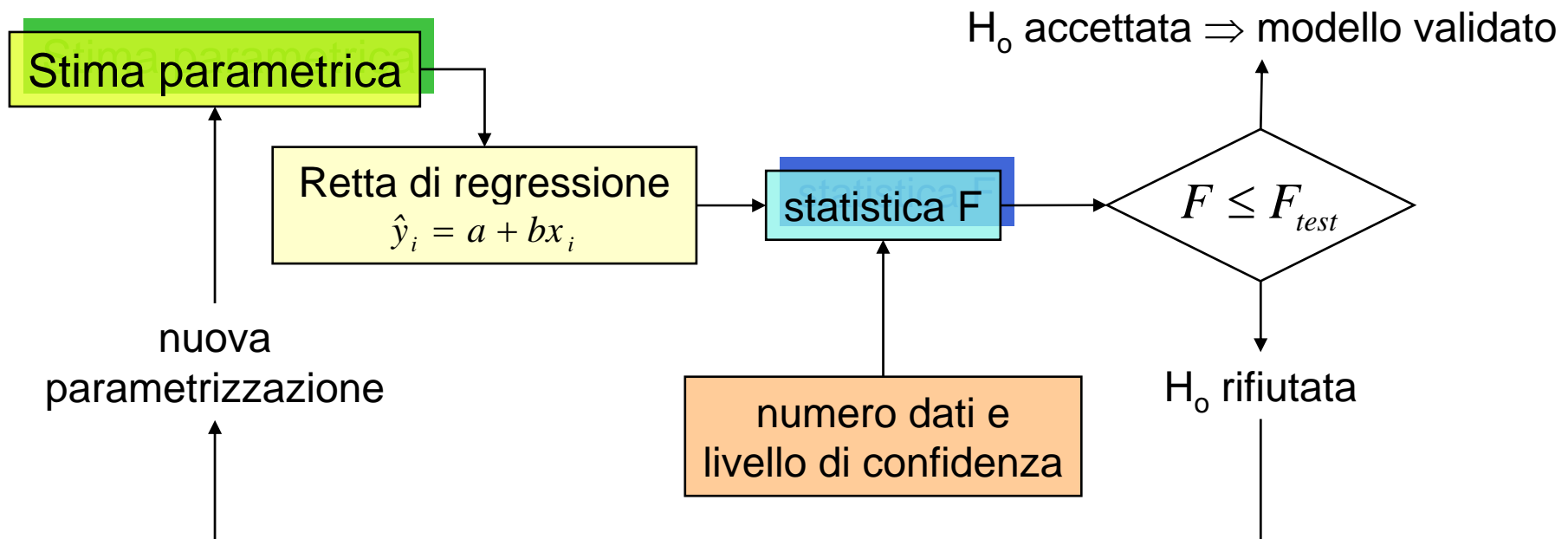


Tabelle della statistica F

Probability 5% SIGNIFICANCE TABLE for F-test

No. of degrees of freedom v_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
No. of degrees of freedom v_2										
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	249.0	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.64	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.53	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.74	2.54
.....										
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.30	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.29	2.12	1.91	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	1.92	1.70	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1.25
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.10	1.94	1.75	1.52	1.00

Ipotesi nulla
 $H_0: \mu_y - \mu_x = 0$

L'ipotesi H_0 non viene scartata se il valore di F è inferiore a quello in tabella

I gradi di libertà della statistica F sono

$$v_1 = 2$$

$$v_2 = n - 2$$

n = numero di dati

Ulteriori problemi con F

- 👉 I problemi aumentano quando cadono le ipotesi alla base della regressione lineare
 - ⇒ *Le X devono essere esattamente note (niente rumore)*
 - ⇒ *La varianza degli errori sulle Y deve essere costante*
 - ⇒ *I dati Y devono essere indipendenti*
- 👉 Inoltre, la forma della statistica F è tale da aumentare gli errori di Tipo I dato che essendo un rapporto, bilancia le deviazioni dei parametri della regressione al numeratore con gli errori residui al denominatore
- 👉 Questo crea un paradosso per modelli molto buoni con molti dati,

$$F_{2,n-2,\alpha} = \frac{na^2 + 2a(b-1)\sum_{i=1}^n x_i + (b-1)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{2S_{yx}^2}$$

perché

$$n \uparrow \quad \sum x \uparrow \quad S_{yx}^2 \downarrow \Rightarrow F \text{ grande}$$

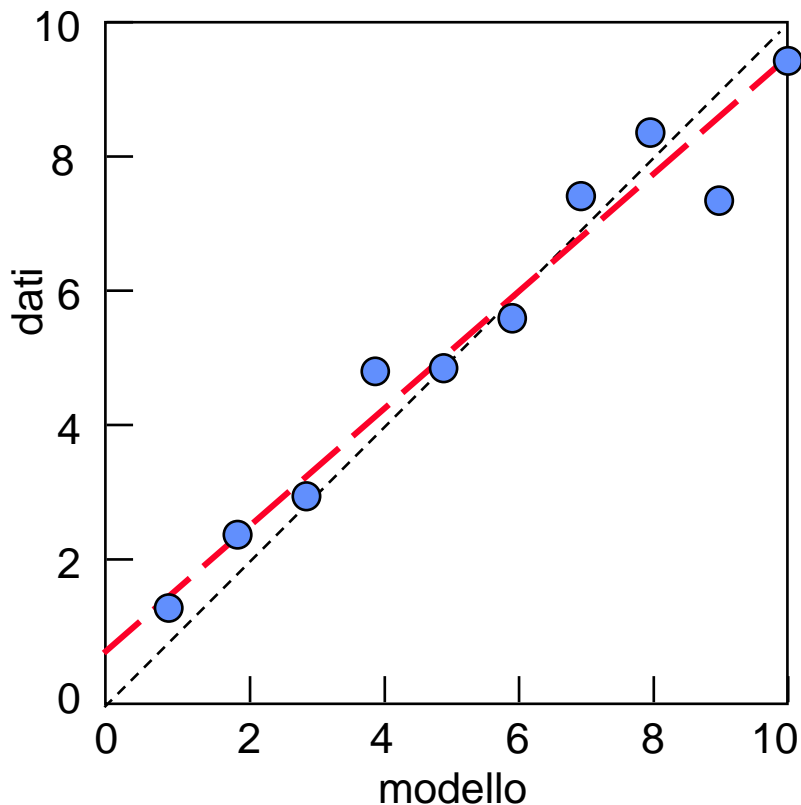
- 👉 L'altro fattore di errore di Tipo I è il termine $(b - 1)$ che se negativo può ridurre F facendo accettare un H_0 falsa, in particolare avvantaggia modelli con pendenza minore di 1 rispetto ai modelli con pendenza maggiore di 1.

Possibili errori nell'applicazione di F

- 👉 La statistica F ci porta a accettare o rifiutare l'ipotesi che la retta di regressione sia statisticamente uguale alla retta 1:1, cioè che abbia **Pendenza 1 e Intercetta 0**
- 👉 In termini statistici ciò si esprime come $H_0: \mu_y - \mu_x = 0$
- 👉 *Si possono commettere due tipi di errori*
 - ⇒ *Errore di Tipo I: Rifiutare una H_0 corretta*
 - ⇒ *Errore di tipo II: Accettare una H_0 errata*
- 👉 Ciò può accadere a cause del rumore che sommato ai dati produce un aspetto visivo che può apparire intuitivamente corretto
- 👉 I due errori non sono simmetrici e, in generale, vi è un ampio livello di tolleranza nell'accettare H_0 , mentre per rifiutarla occorre che i dati siano molto improbabili quando H_0 risulta soddisfatta.

Errore di tipo II: accettare un H_0 falsa

I dati furono generati dal modello $y = 1.0 + 0.8x$. Perciò il modello è sbagliato, ma il rumore aggiunto, con $\sigma = 0.4$, inganna la statistica F e ci fa accettare un modello errato. D'altra parte a vista si nota che in realtà il modello *sottostima i bassi valori e sovrastima quelli grandi*.



La statistica F produce un valore più basso di quello in tabella e ci fa accettare un modello che sappiamo non corretto: si commette un errore di Tipo II: accettare un H_0 che in realtà è falsa.

Regressione vera:

$$y = 1.0 + 0.8x$$

Regressione stimata:

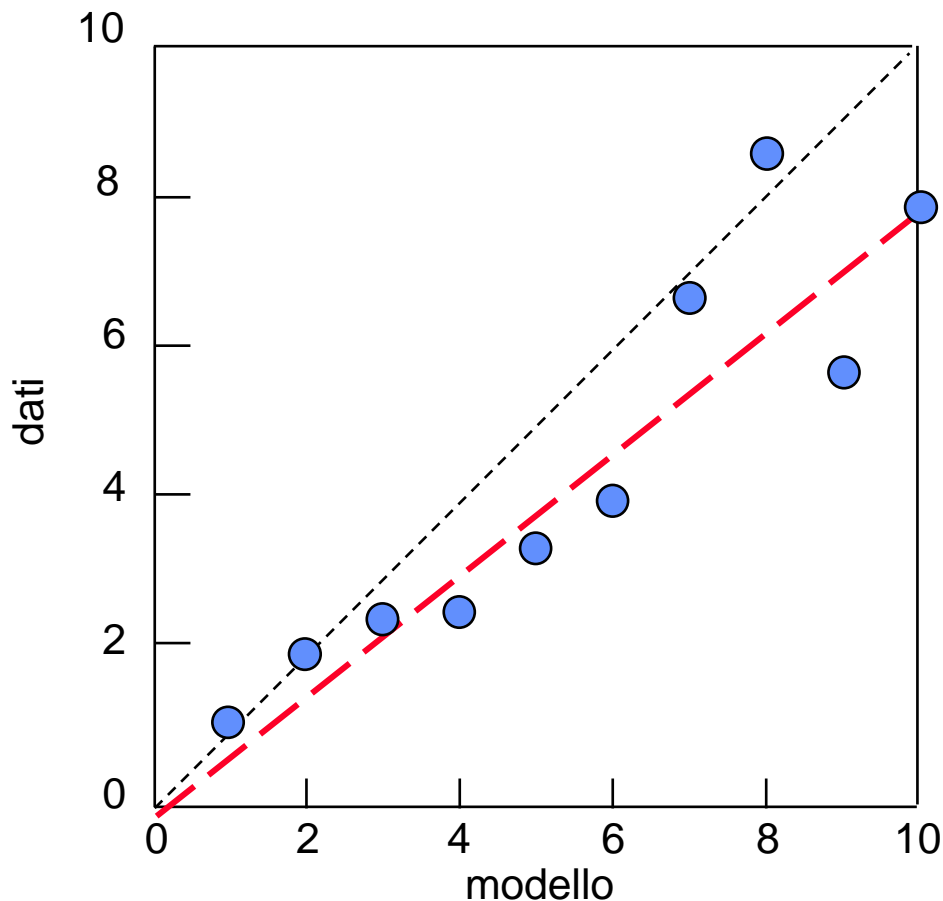
$$y = 0.692 + 0.884x$$

Correlazione: $r = 0.978$

Statistica $F = 1.52 < 4.46 (F_{2,8,5\%})$

Errore di tipo I: rifiutare un H_0 vera

In questo esempio il modello è originariamente corretto, ma appare visualmente errato a causa dell'alto rumore ($\sigma = 0.8$) proporzionale aggiunto.



La statistica F produce un valore più alto di quello in tabella e ci fa rifiutare un modello che potrebbe essere corretto: si commette un errore di Tipo I: *rifiutare una H_0 che in realtà è vera.*

Regressione vera:

$$y = 0.0 + 1.0 x$$

Regressione stimata:

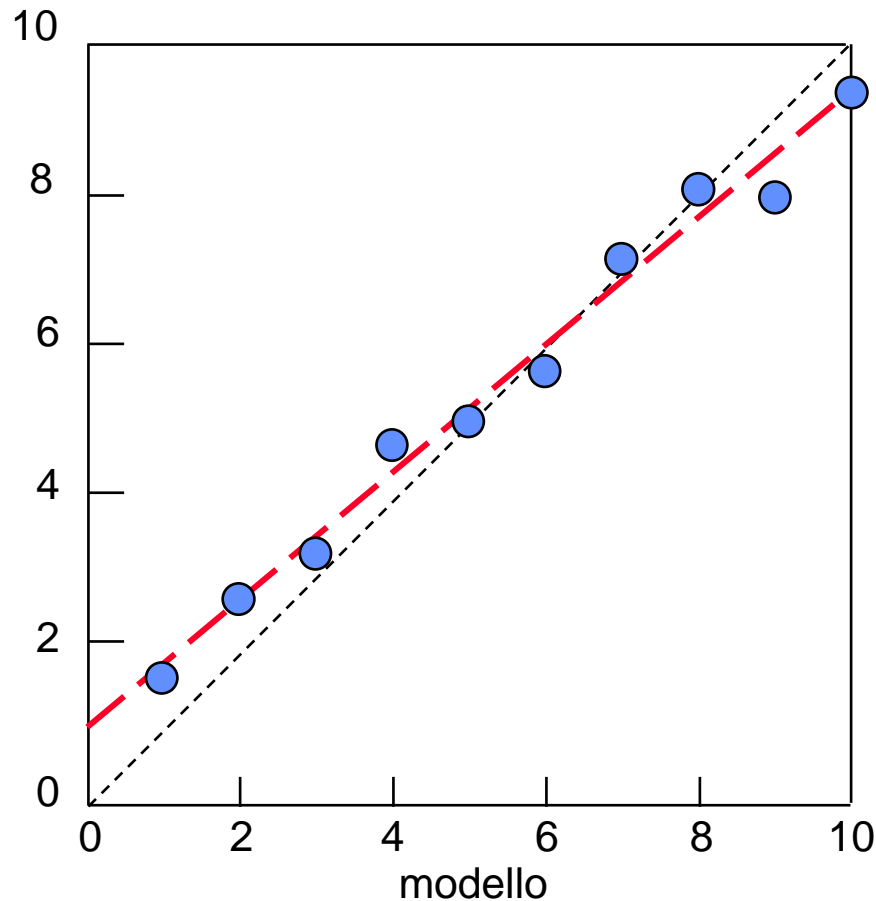
$$y = -0.0435 + 0.766 x$$

Correlazione: $r = 0.884$

Statistica $F = 6.571 > 4.46 (F_{2,8,5\%})$

Controprova: corretto rifiuto di H_0

Il modello è lo stesso del caso di Errore di Tipo II, $y = 1.0 + 0.8 x$, ma il rumore aggiunto è inferiore, perciò l'errore strutturale del modello risulta più evidente e la statistica F correttamente rifiuta H_0 .



Regressione vera:

$$y = 1.0 + 0.8 x$$

Regressione stimata:

$$y = 1.029 + 0.804 x$$

Correlazione: $r = 0.991$

Statistica $F = 12.52 > 4.46 (F_{2,8,5\%})$

Ulteriori indici basati sulla predizione

Sono basati sul *squared root mean square error prediction* (SRMSEP).

👉 **Inequality coefficient:** fornisce valori compresi tra 0 e 1. Il numeratore è il SRMSEP, mentre al denominatore ci sono termini di normalizzazione

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - y_i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2} + \sqrt{\frac{1}{n} \sum y_i^2}}$$

più è piccolo U migliore è l'accettabilità del modello

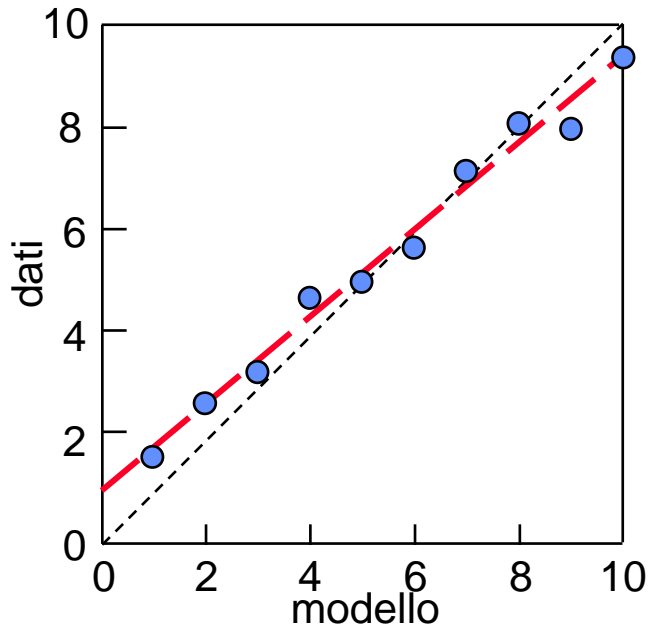
👉 **Mean Squared Error of Predictions (MSEP)**

$$MSEP = \frac{1}{n} \sum (x_i - y_i)^2 = (\bar{x} - \bar{y})^2 + (S_x - rS_y)^2 + (1 - r^2)S_y^2 = MC + SC + RC$$

composto da tre termini:

- ⇒ MC, differenza tra le medie del modello e del sistema,
- ⇒ SC, differenza tra la varianza del modello e delle osservazioni,
- ⇒ RC, la deviazione della correlazione del modello e delle osservazioni da 1

Applicazione degli indici ai casi precedenti



Regressione vera:

$$y = 1.0 + 0.8 x$$

Regressione stimata:

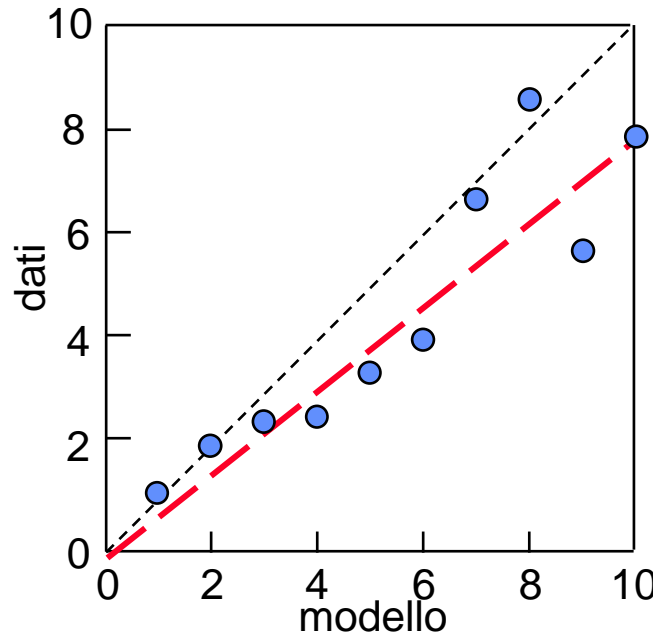
$$y = 0.692 + 0.884 x$$

$$F = 1.52$$

$$MSEP = 0.412 \quad U = 0.052$$

$$MC=0.008 \quad SC = 0.268$$

$$RC=0.725$$



Regressione vera:

$$y = 0.0 + 1.0 x$$

Regressione stimata:

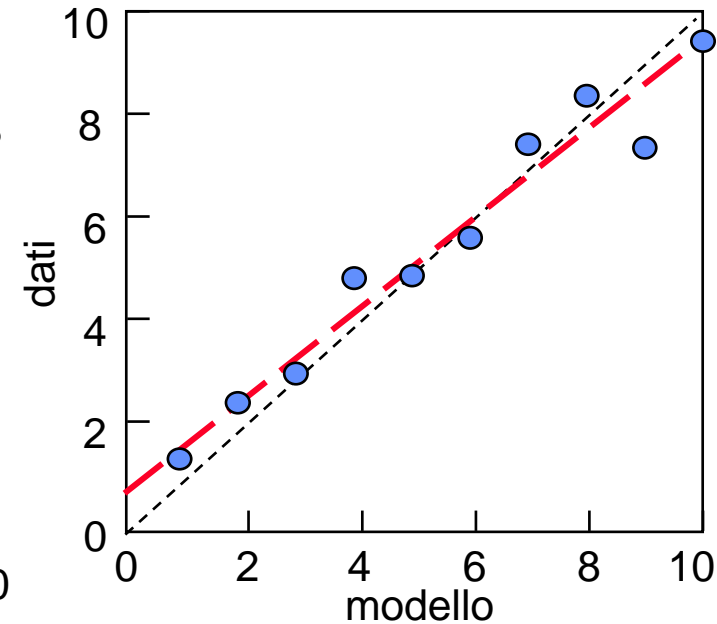
$$y = -0.0435 + 0.766 x$$

$$F = 6.571$$

$$MSEP = 3.578 \quad U = 0.171$$

$$MC=0.495 \quad SC = 0.126$$

$$RC=0.378$$



Regressione vera:

$$y = 1.0 + 0.8 x$$

Regressione stimata:

$$y = 1.029 + 0.804 x$$

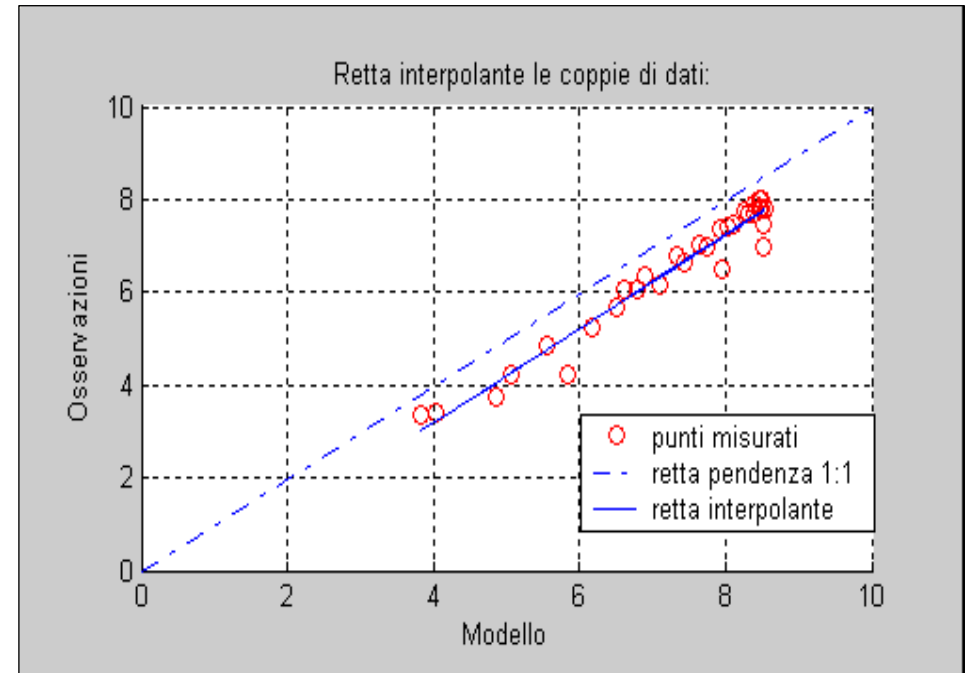
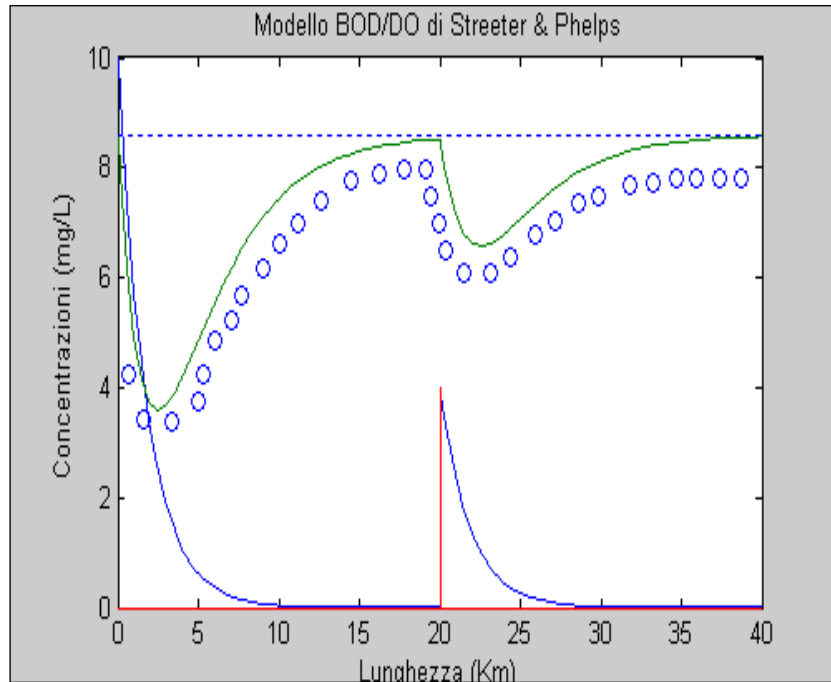
$$F = 12.52$$

$$MSEP = 0.424 \quad U = 0.054$$

$$MC=0.006 \quad SC = 0.752$$

$$RC=0.242$$

Applicazione al modello di Streeter & Phelps (1)



Regressione stimata (n = 31):

$$y = -0.8662 + 1.0143x$$

$$F = 95.83 > 3.31$$

$$MSEP = 0.6708 \quad U = 0.1565$$

$$MC = 0.5822 \quad SC = 0.00039$$

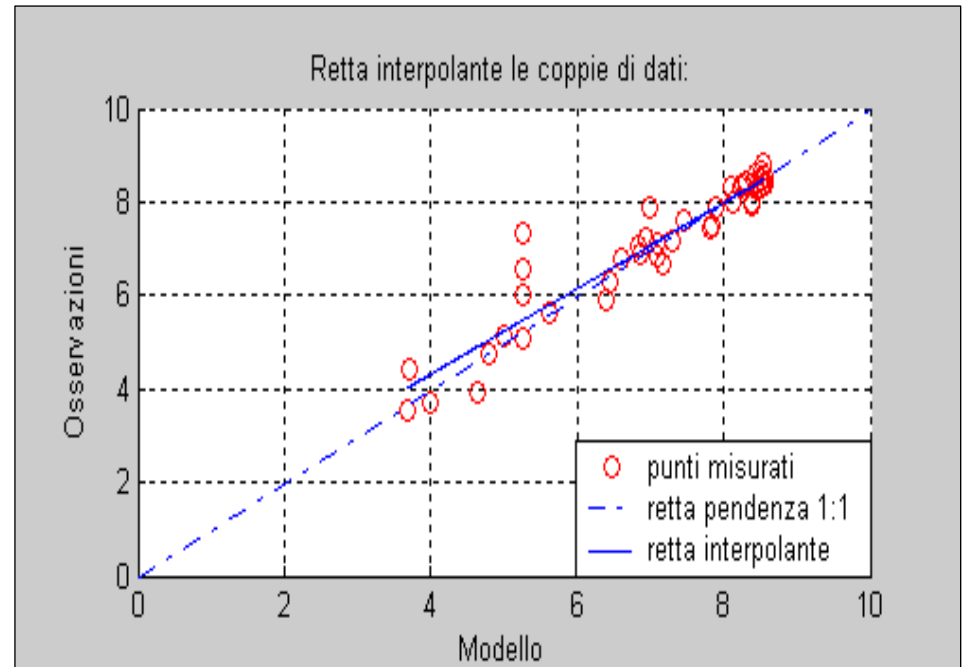
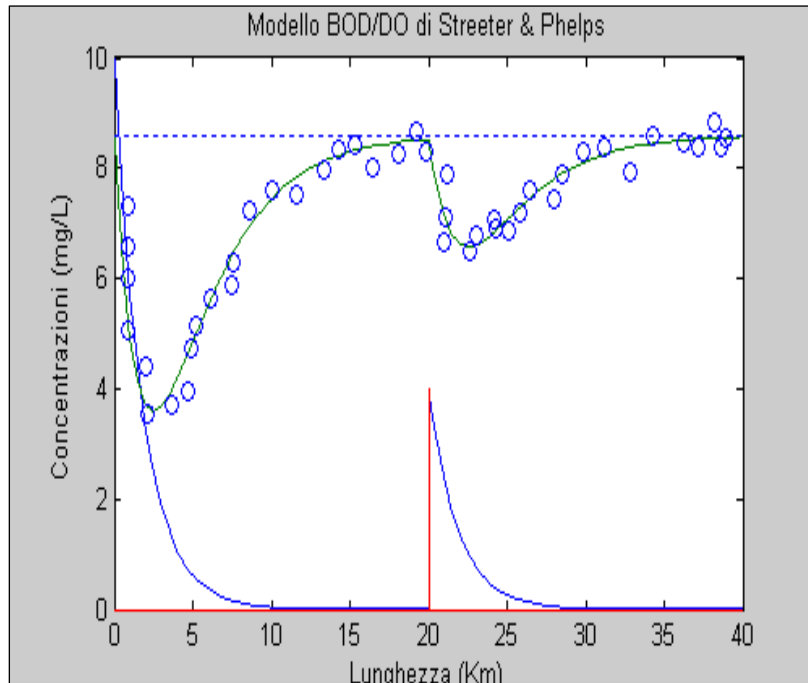
$$RC = 0.0911$$

Il valore di F è molto superiore al limite di tabella

MC è molto superiore a SC e RC, indicando che l'errore principale è di bias (*polarizzazione*)

Si può tranquillamente rifiutare il modello

Applicazione al modello di Streeter & Phelps (2)



Regressione stimata ($n = 43$):

$$y = 0.6271 + 0.9194x$$

$$F = 1.716 < 3.23$$

$$MSEP = 0.2361 \quad U = 0.0916$$

$$MC = 0.0039 \quad SC = 0.0146$$

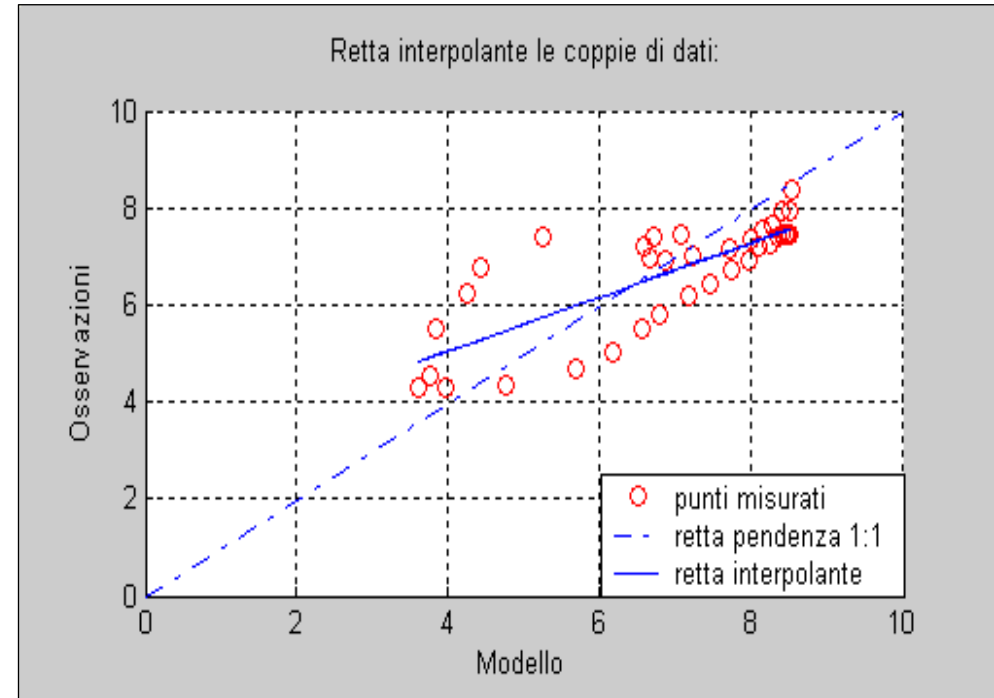
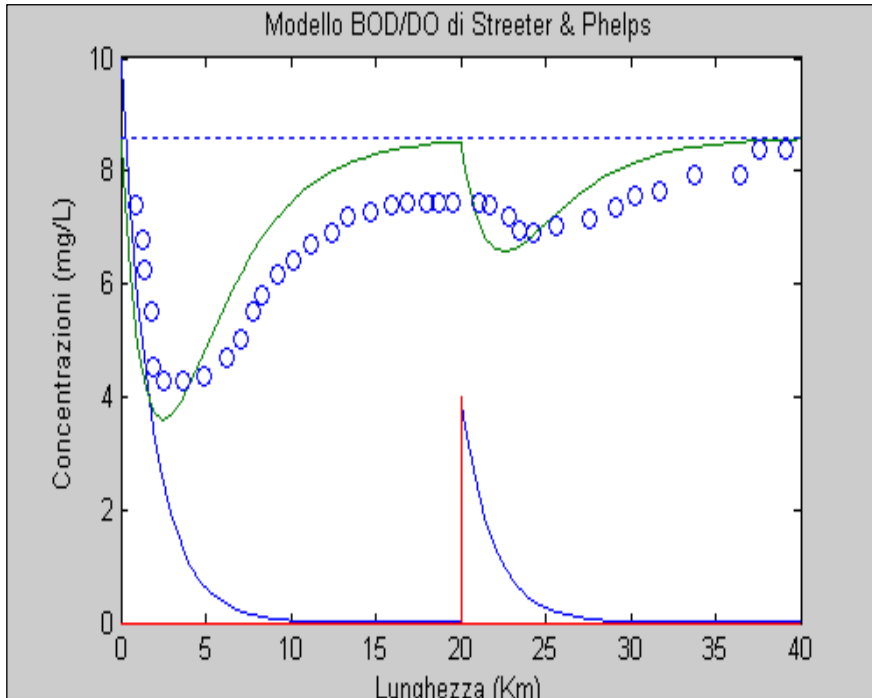
$$RC = 0.2231$$

Il valore di F è inferiore al limite di tabella

RC è molto superiore a MC e SC , indicando che l'errore principale è dovuto alla componente casuale (rumore sui dati)

Non c'è motivo di rifiutare il modello

Applicazione al modello di Streeter & Phelps (3)



Regressione stimata (n = 36):

$$y = 2.8091 + 0.5585x$$

$$F = 19.0647 > 3.13$$

$$MSEP = 1.0322 \quad U = 0.1955$$

$$MC = 0.0484 \quad SC = 0.5114$$

$$RC = 0.5005$$

Il valore di F è superiore al limite di tabella

SC e RC sono i termini maggiori, indicando che l'errore è prevalentemente nella diversità di b da 1 (scatter dei dati) e nel rumore sui dati

Il modello deve essere rifiutato

Varianza spiegata (VAF)

- 👉 **Variance Accounted For** (VAF) è la percentuale della variazione totale dei dati attorno alla media che viene spiegata dal modello

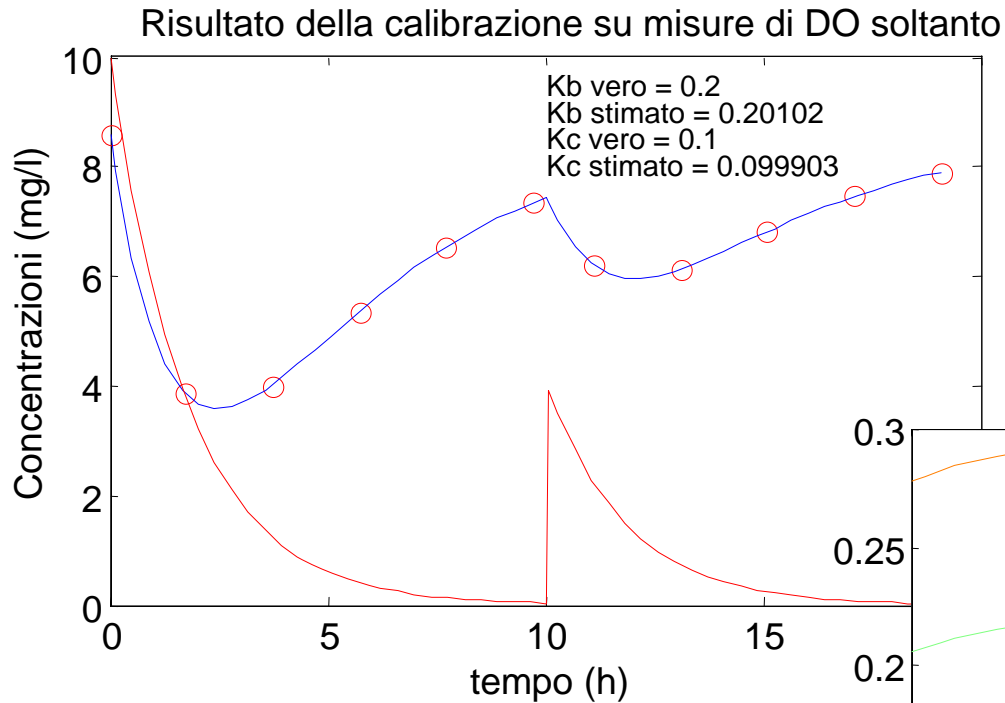
$$VAF = 100 \left(1 - \frac{\sum_k (y_k^{exp} - y_k^m)^2}{\sum_k (y_k^{exp} - \bar{y})^2} \right)$$

Residui del modello

Variabilità dei dati

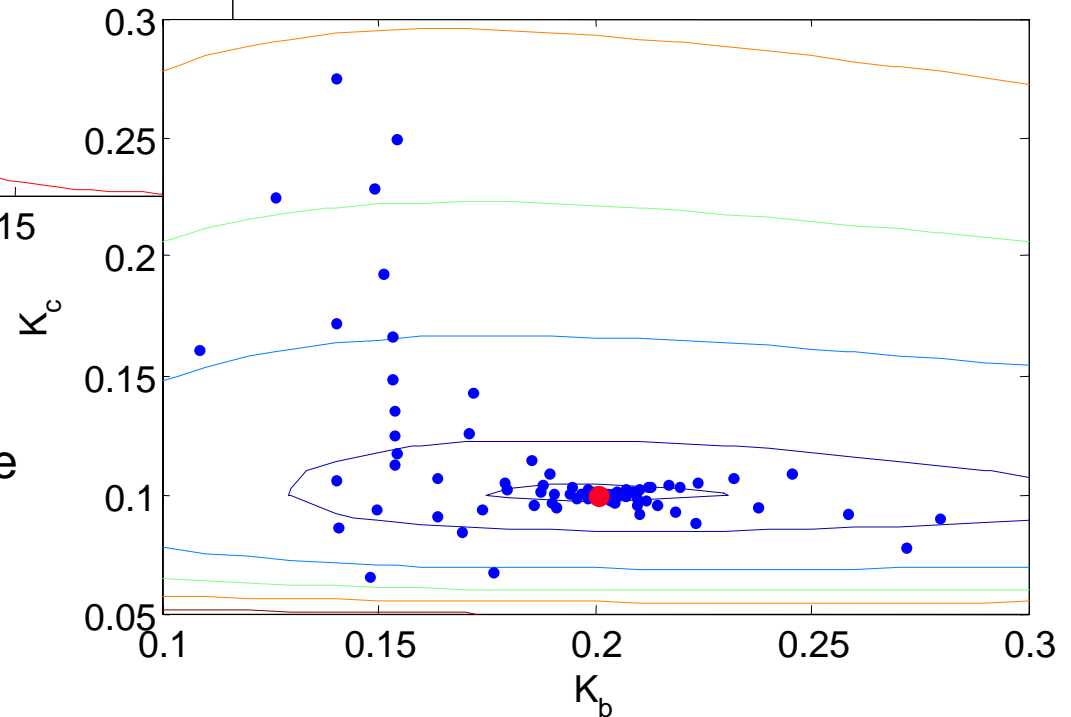
- 👉 $\bar{y} = media(y_k^{exp})$
- 👉 VAF è un'utile misura di quanto il modello riesce a spiegare della variabilità totale dei dati
- 👉 Nota: perché VAF sia valida ($VAF > 0$), il primo termine deve essere maggiore del secondo: *variabilità dei dati > dell'errore di modello*

VAF della calibrazione di Streeter & Phelps



Varianza del rumore sui dati = 0 %

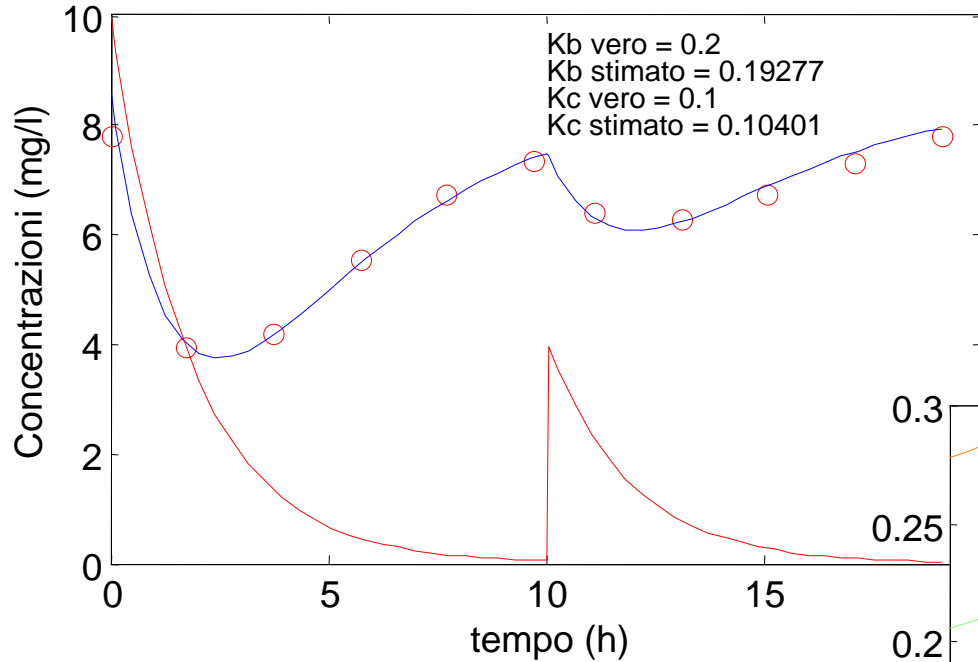
VAF = 100 %



Esempio di modello di Streeter & Phelps su un doppio tratto fluviale con due scarichi concentrati

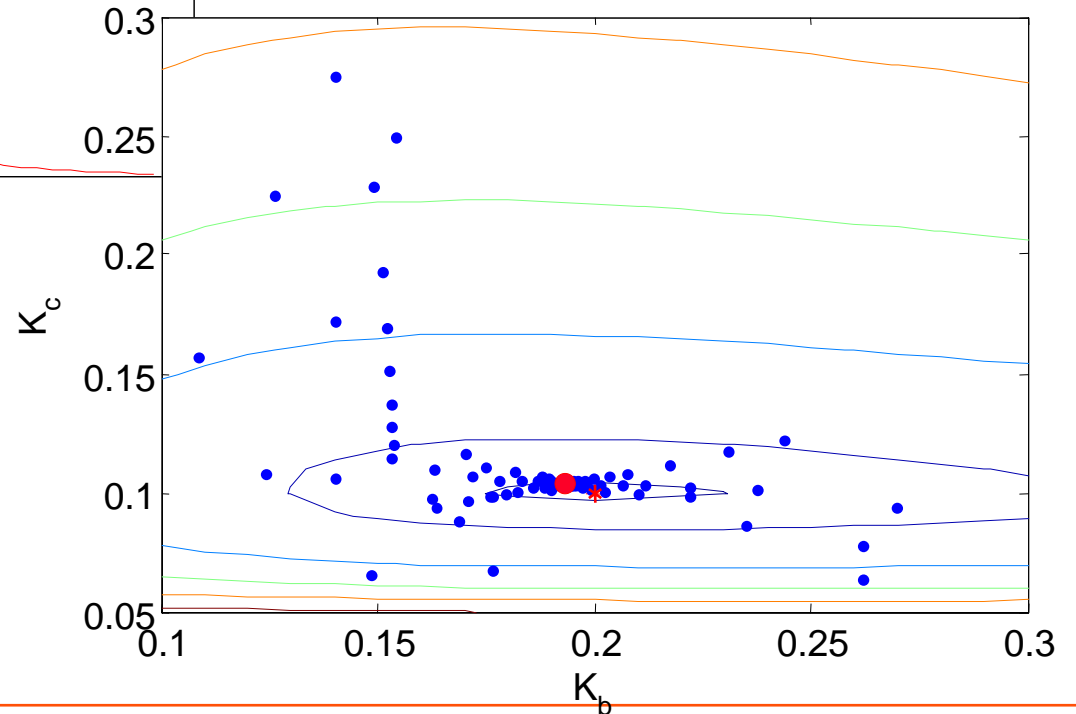
VAF della calibrazione di Streeter & Phelps

Risultato della calibrazione su misure di DO soltanto



Varianza del rumore sui dati = 2 %

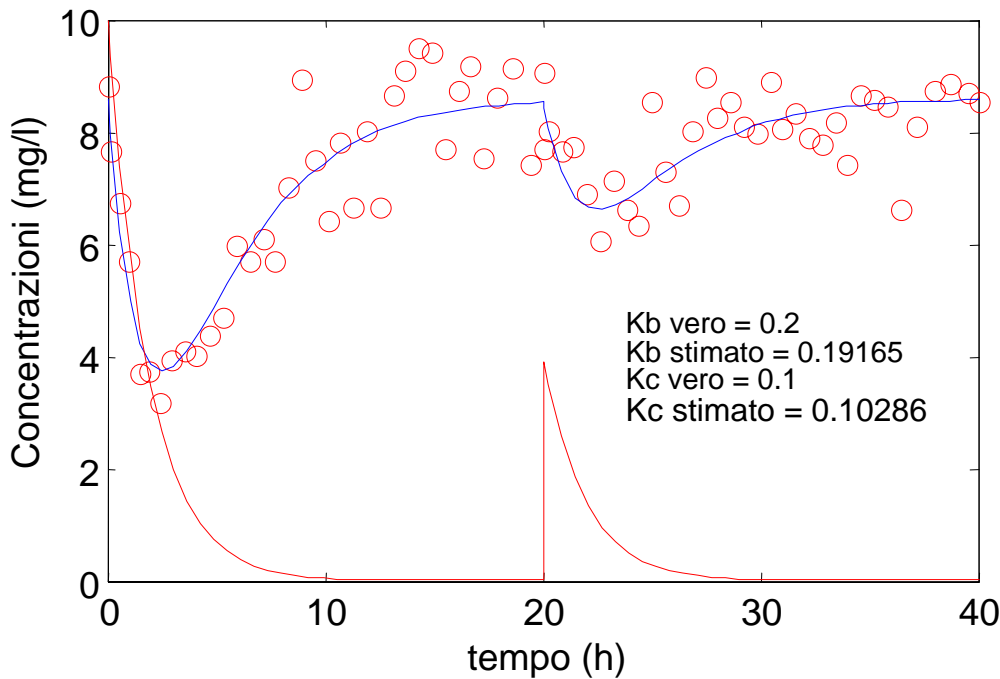
VAF = 98.1469 %



Esempio di modello di Streeter & Phelps su un doppio tratto fluviale con due scarichi concentrati

VAF della calibrazione di Streeter & Phelps

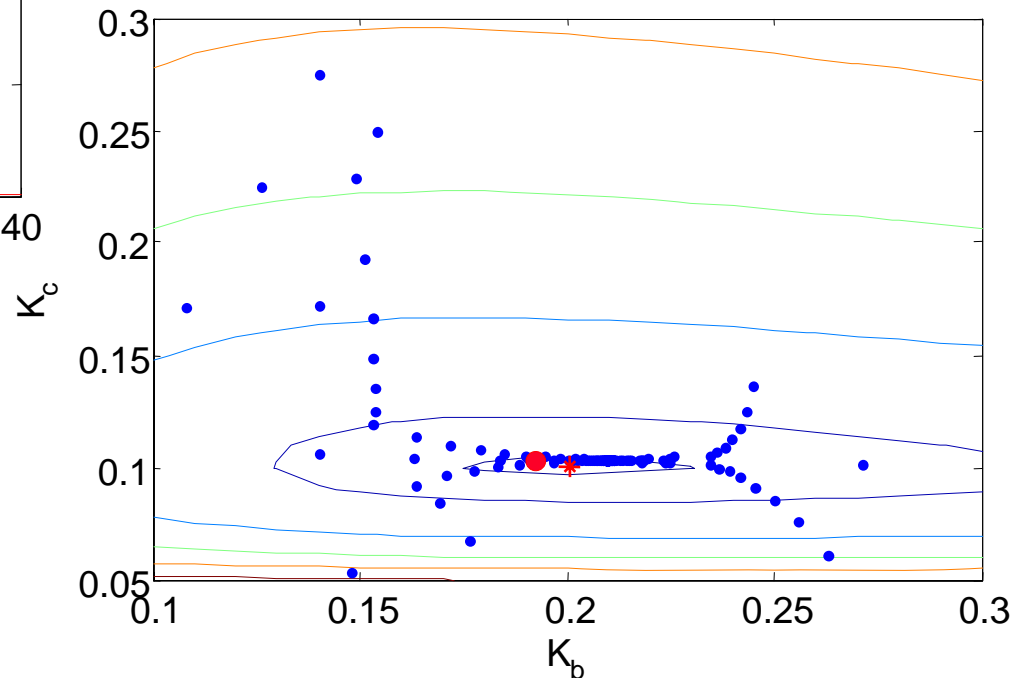
Risultato della calibrazione su misure di DO soltanto



Esempio di modello di Streeter & Phelps su un doppio tratto fluviale con due scarichi concentrati

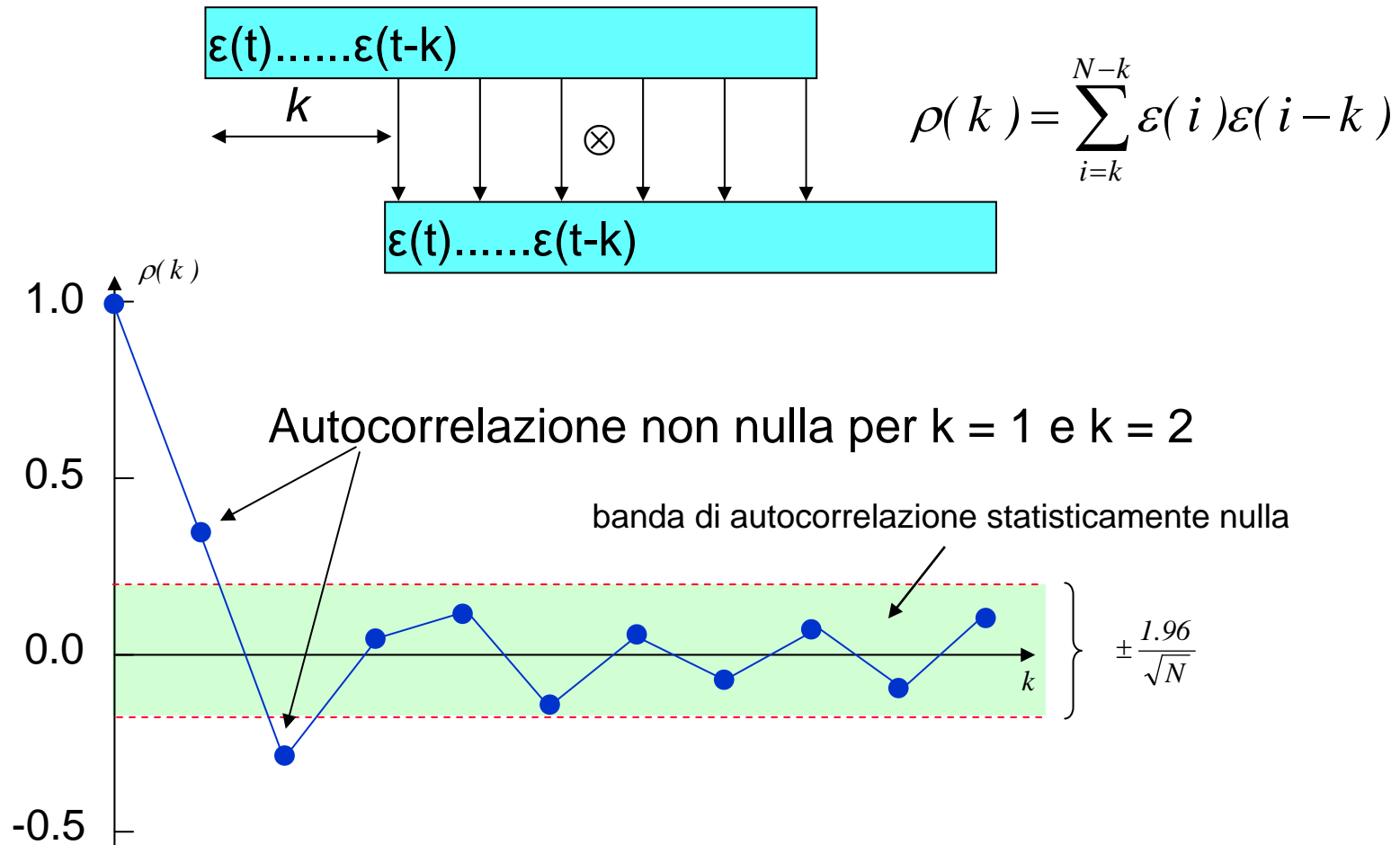
Varianza del rumore sui dati = 20.689 %

VAF = 80.7551 %



Test di autocorrelazione dei residui

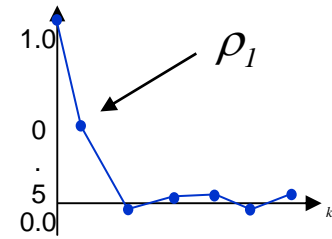
👉 Analisi di correlazione dei residui al variare del ritardo k $\varepsilon(t) = y_t^{exp} - y_t^m$



Effetto dei residui NON autocorrelati

- L'ipotesi di base è che il modello spieghi completamente la realtà a parte il rumore completamente casuale.

$$\left. \begin{aligned} y_t^m &= f(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_t \\ y_t^{exp} - y_t^m &= \varepsilon_t \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &media(\varepsilon) = 0 \quad Var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$



- Supponiamo che la correlazione sia di un solo residuo $v_t = \rho_1 v_{t-1} + \varepsilon_t$

$$y_t^{exp} - y_t^m = v_t = \rho_1 v_{t-1} + \varepsilon_t \quad v_t = \rho_1 (\rho_1 v_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \rho_1^2 v_{t-2} + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_{t-1}^{exp} - y_{t-1}^m = v_{t-1} = \rho_1 v_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \Rightarrow v_t = \rho_1^2 (\rho_1 v_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_{t-2}^{exp} - y_{t-2}^m = v_{t-2} = \rho_1 v_{t-3} + \varepsilon_{t-2} \quad v_t = \rho_1^3 v_{t-3} + \rho_1^2 \varepsilon_{t-2} + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$v_t = \rho_1^3 v_{t-3} + \rho_1^2 \varepsilon_{t-2} + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_1^2 \varepsilon_{t-2} + \rho_1^3 \varepsilon_{t-3} + \dots$$

- La varianza del rumore di modello **è superiore alla vera varianza del rumore** a causa dell'autocorrelazione

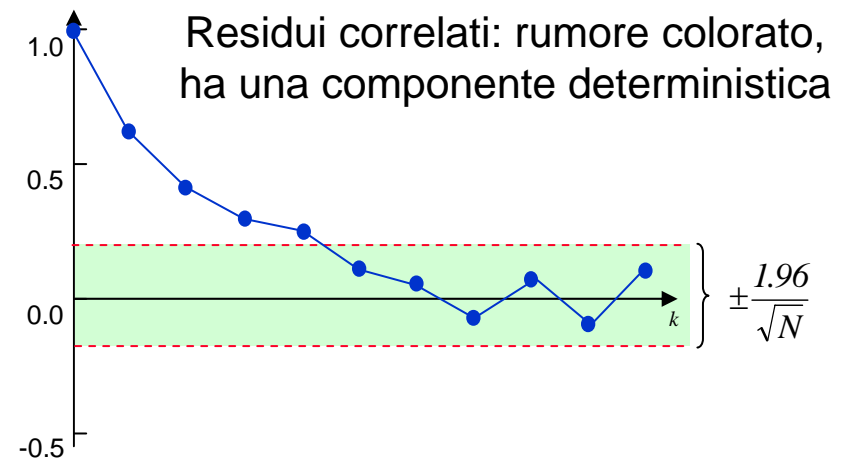
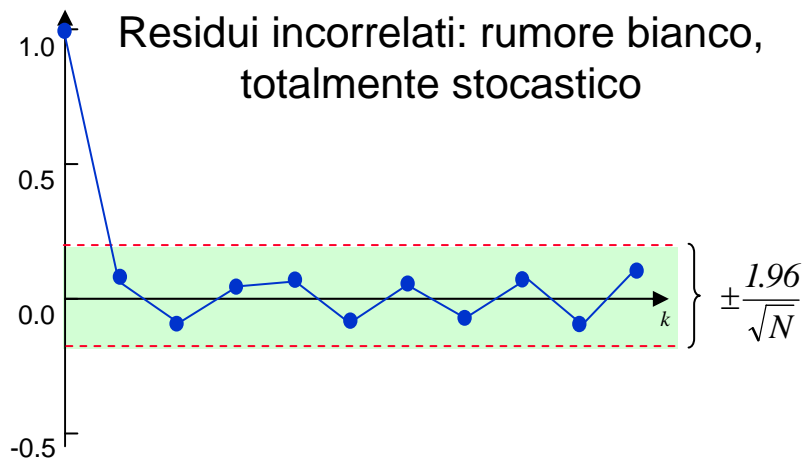
$$Var(v_t) = Var(\varepsilon_t) + \rho_1 Var(\varepsilon_{t-1}) + \rho_1^2 Var(\varepsilon_{t-2}) + \rho_1^3 Var(\varepsilon_{t-3}) + \dots$$

$$\sigma_v^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \rho_1 + \rho_1^2 + \rho_1^3 + \dots) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho_1^2} > \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{dato che } \rho_1 < 1$$

Test sui residui: Autocorrelazione

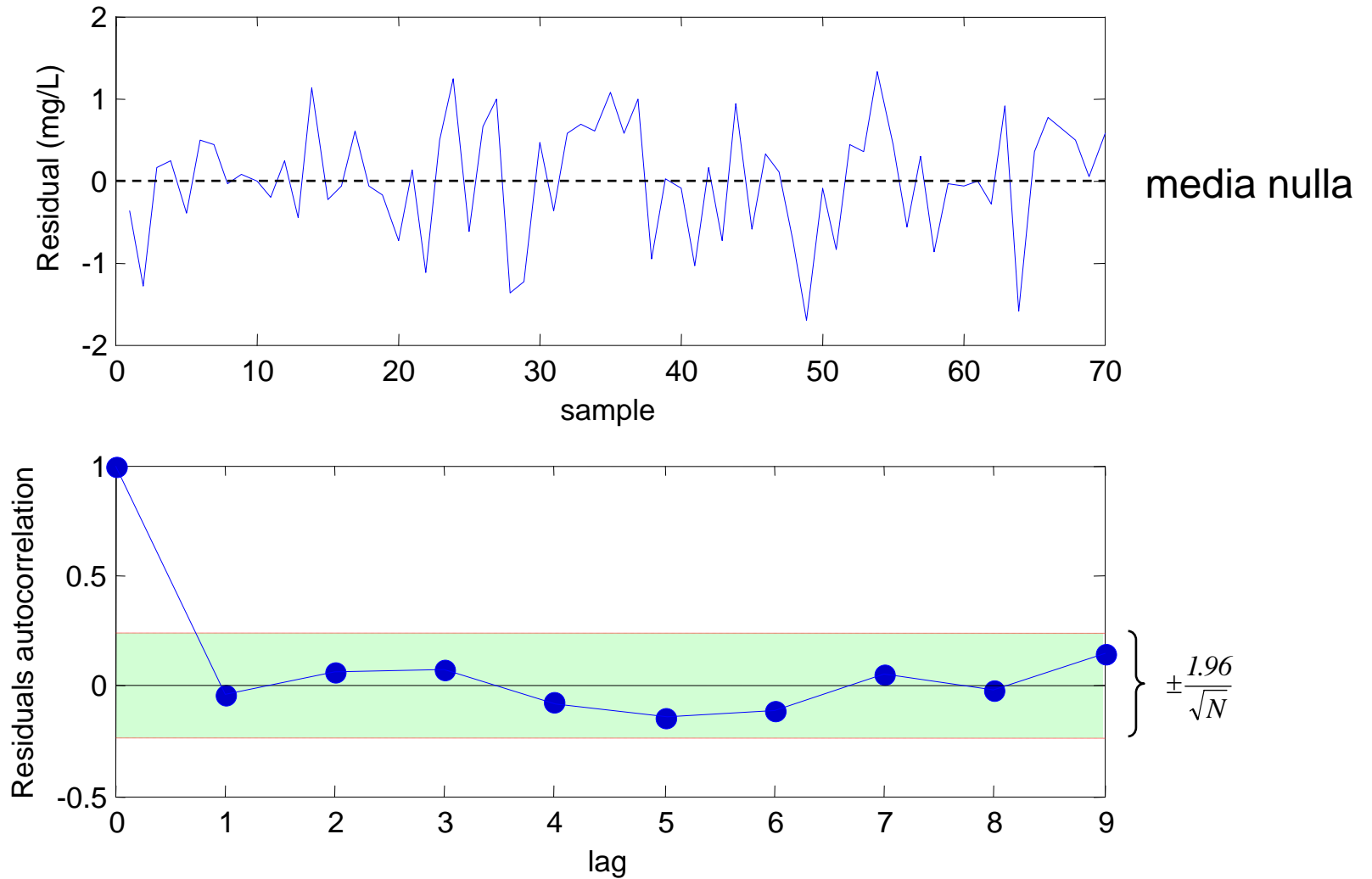
- 👉 I residui $R(t)$ rappresentano la parte dei dati che il modello non riesce a spiegare
- 👉 Essi contengono informazioni su due fonti di errore:
 - Errori di misura (errore stocastico)
 - Errori di modello (errore deterministico)
- 👉 Se si suppone che gli errori di misura siano incorrelati, ogni autocorrelazione rilevata nei residui può essere un segnale di un modello strutturalmente inadeguato
- 👉 L'autocorrelazione si considera nulla se inferiore allo "zero statistico" dato da con confidenza al 95%

$$\pm \frac{1.96}{\sqrt{N}}$$



Autocorrelazione dei residui

Residui del modello di Streeter & Phelps

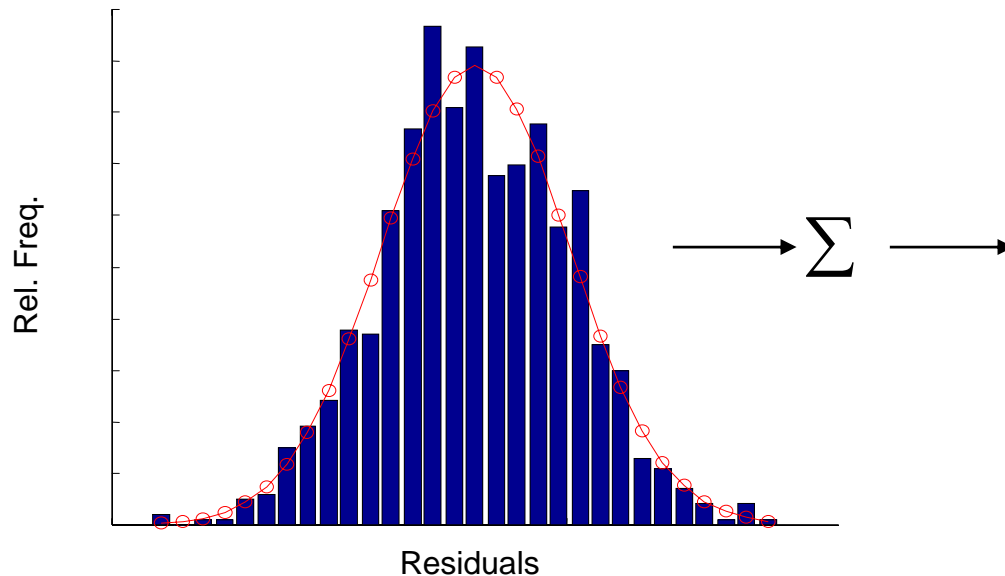


Test sui residui: Gaussianità

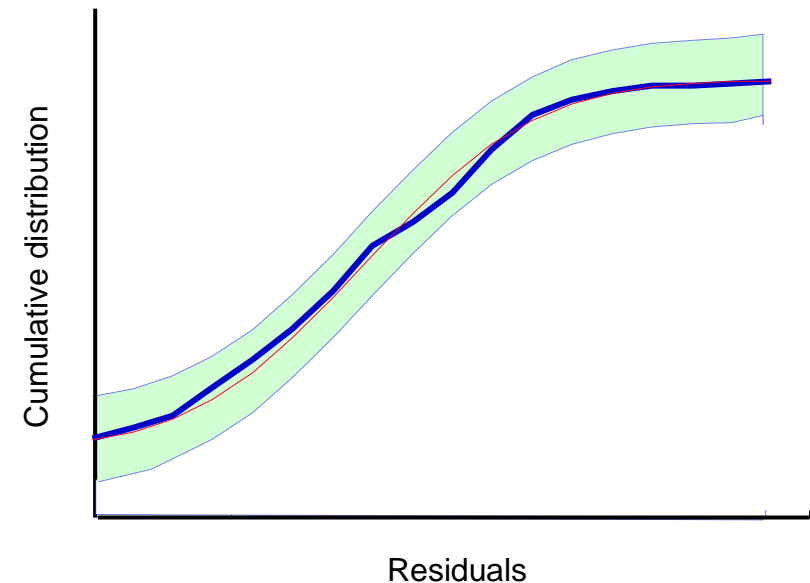
- 👉 Nell'ipotesi che il rumore di misura sia gaussiano $N(0, \sigma^2)$ incorrelato (salvo diverse informazioni), l'eventualità NON gaussianità della distribuzione dei residui è riconducibile ad un errore di modello

Test di gaussianità

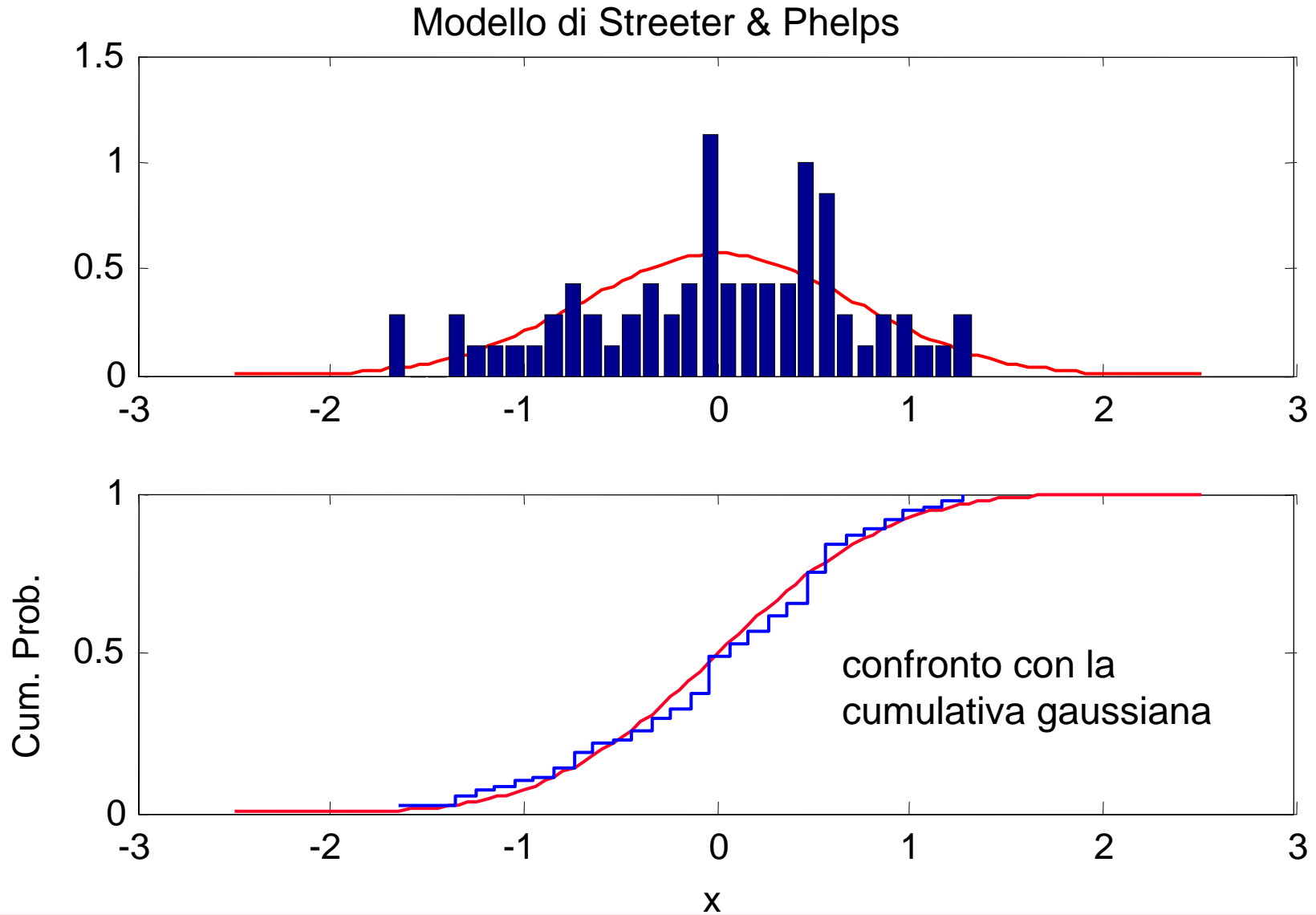
Confrontare visualmente l'istogramma dei residui con la distribuzione gaussiana che ha la stessa media e varianza



Fare un test di Kolmogorov-Smirnov per verificare che la distr. cumulativa rientri nelle fasce di tolleranza del test



Istogramma dei residui

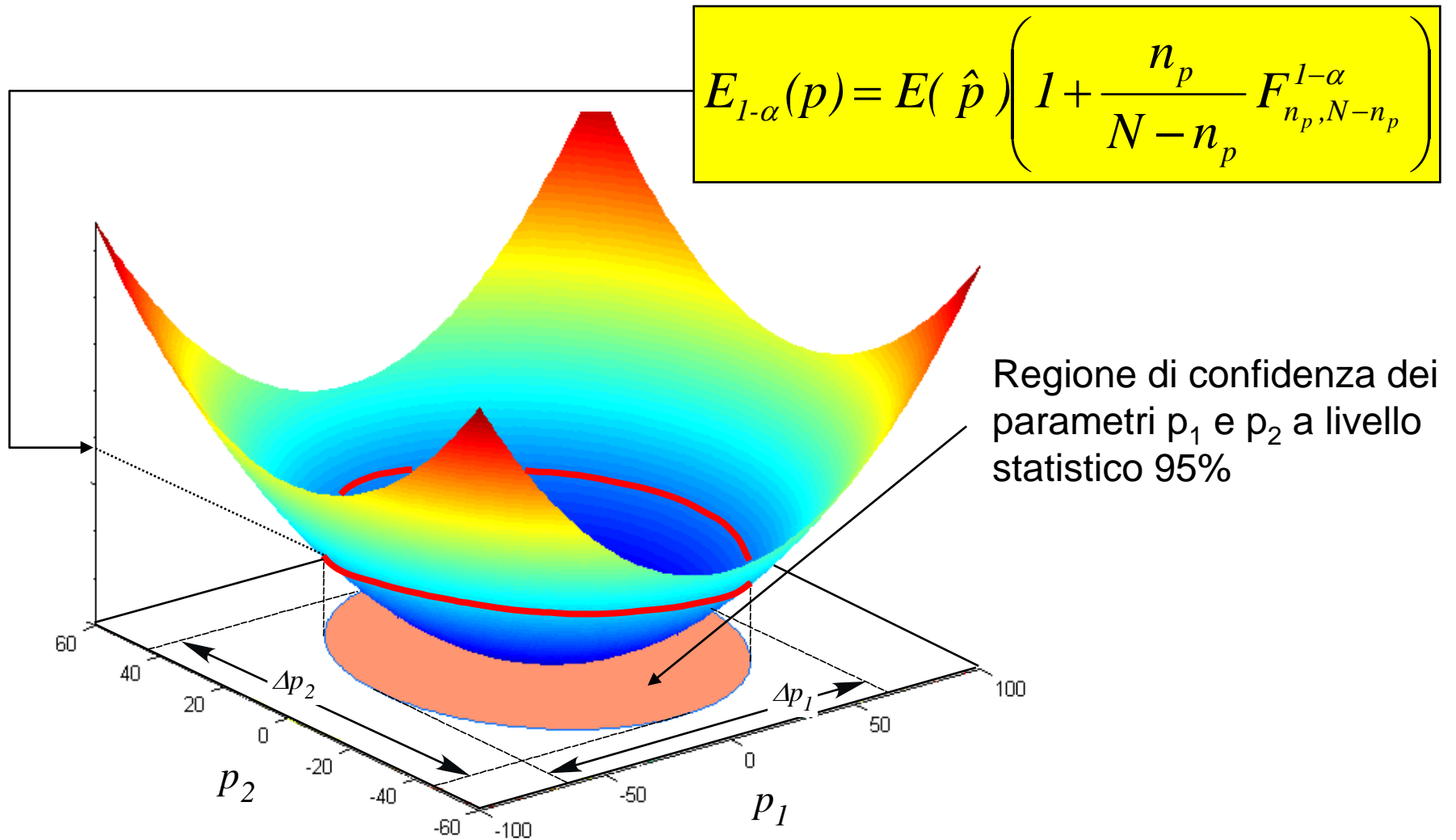


Test sui parametri: regioni di confidenza

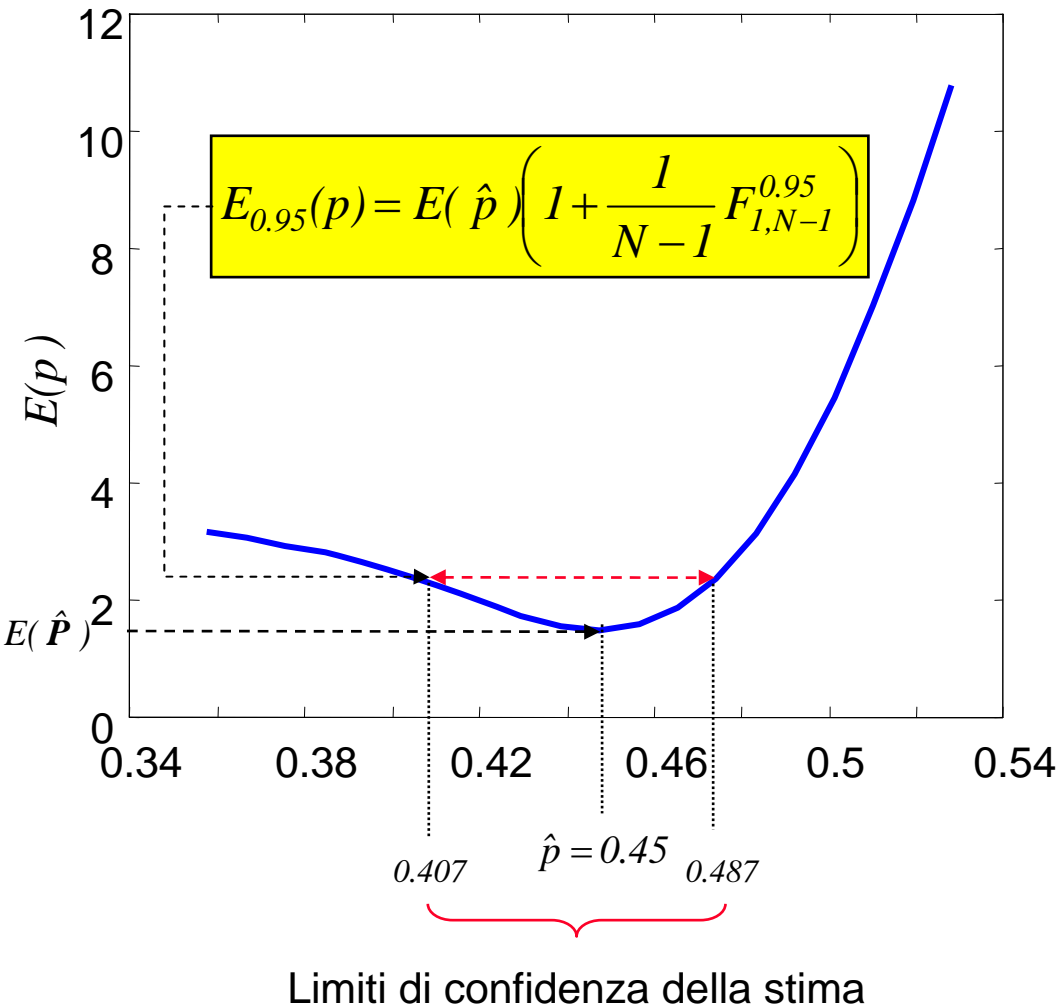
- Ogni incremento di $E(\mathbf{P})$ rispetto al minimo $E(\hat{\mathbf{P}})$ definisce un livello sulla superficie del funzionale di errore
- Se a questo livello è possibile associare un significato statistico, mediante la statistica F
- Tale regione definisce nello spazio dei parametri la regione a livello di confidenza assegnato
- Partendo dal minimo del funzionale di errore $E(\hat{\mathbf{P}})$ si può esprimere il livello di confidenza come incremento dal minimo

$$E_{1-\alpha}(p) = E(\hat{p}) \left(1 + \frac{n_p}{N - n_p} F_{n_p, N - n_p}^{1-\alpha} \right)$$

Regioni di confidenza



Limiti di confidenza del singolo parametro



Il **limite di confidenza** è legato alla sensitività statica, perché essa collega lo scostamento parametrico ad un aumento di $E(P)$.

Se a quest'ultimo si assegna un **significato statistico**, lo scostamento parametrico ha significato di **varianza della stima**.

Nel caso di **un solo parametro stimato**, il livello significativo di $E(p)$ è dato dalla statistica F con $N-1$ gradi di libertà e rappresenta l'incremento di $E(p)$ corrispondente ad una data variazione del parametro rispetto al valore stimato.

*Nota: Tale stima considera la variazione del parametro **da solo** e non tiene conto dell'effetto di variazioni congiunte di più parametri. Perciò si tratta di una stima ottimistica dell'intervallo di confidenza perché trascura le correlazioni fra parametri!*

Matrici di covarianza e regioni di confidenza

- ☞ L'espressione generica della regione di confidenza è basata sulla matrice di covarianza \mathbf{C}

$$\left\{ \mathbf{p} : (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) \leq n_p F_{n_p, N-n_p}^{1-\alpha} \right\}$$

- ☞ Nel caso di modello *lineare*, questa si calcola direttamente dai dati

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{y} = \mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_q) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{C} = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad \text{con } \mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N]^T$$

- ☞ Nel caso nonlineare, la matrice di covarianza \mathbf{C} può essere approssimata dall'inversa della *Matrice Hessiana* \mathbf{H}

$$\mathbf{C}_H = 2 \frac{E(\hat{\mathbf{p}})}{N - n_p} \times \mathbf{H}^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) \quad \text{con} \quad \mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}) = \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{p}^T} \Big|_{\hat{\mathbf{p}}}$$

- ☞ che è formata dalle derivate seconde del funzionale di errore rispetto al vettore dei parametri

Matrice di covarianza e confidenza delle stime

- La matrice di covarianza dei parametri contiene sulla diagonale le varianze degli errori di stima di ciascun parametro e fuori diagonale le correlazioni fra gli errori di copie di parametri

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{p_1}^2 & cov(p_1, p_2) & \dots & cov(p_1, p_{n_p}) \\ cov(p_1, p_2) & \sigma_{p_2}^2 & \dots & cov(p_2, p_{n_p}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cov(p_{n_p}, p_1) & cov(p_{n_p}, p_2) & \dots & \sigma_{p_{n_p}}^2 \end{bmatrix}$$

- La matrice \mathbf{C} può essere usata per costruire le regioni di confidenza dei parametri.
- La regione di confidenza di ogni singolo parametro considerato singolarmente è un intervallo monodimensionale calcolato come

$$\delta_i = \pm t_{N-n_p}^\alpha \times \sqrt{C_{ii}}$$

dove $t_{N-n_p}^\alpha$ è la distribuzione di *t-Student* per un livello di confidenza $1 - \alpha$ e $N - n_p$ gradi di libertà.

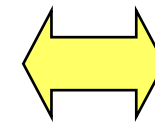
Matrice di correlazione

- ☞ Dalla matrice di covarianza C si può ricavare la matrice dei coefficienti di correlazione R come

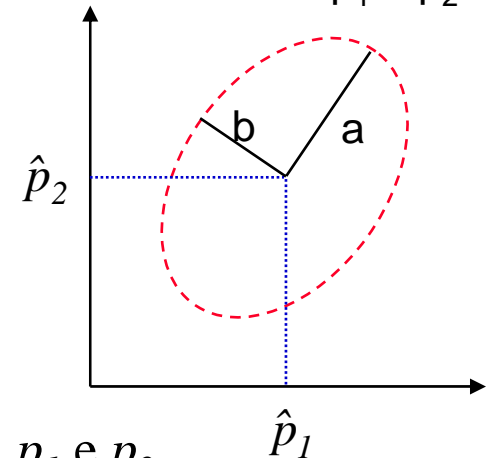
$$\rho_{ij} = \frac{C(i, j)}{\sqrt{C(i, i)C(j, j)}} = \frac{\text{cov}(p_i, p_j)}{\sqrt{\sigma_{p_i}^2 \times \sigma_{p_j}^2}}$$

- ☞ La matrice R è simmetrica ed ha diagonale unitaria, essendo normalizzata alle varianze, mentre i coefficienti fuori diagonale rappresentano la reciproca influenza dei parametri corrispondenti

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1.000 & 0.9734 & 0.125 & -0.213 \\ 0.9734 & 1.000 & 0.232 & 0.316 \\ 0.125 & 0.232 & 1.000 & 0.283 \\ -0.213 & 0.316 & 0.283 & 1.000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{matrix} \end{matrix}$$



il rapporto a/b indica la correlazione fra p_1 e p_2



- ☞ Questa matrice mostra una forte correlazione fra i parametri p_1 e p_2 , mentre le interazioni fra gli altri parametri sono molto più deboli

⇒ Ciò implica che ogni variazione di p_1 si riflette su p_2 e viceversa

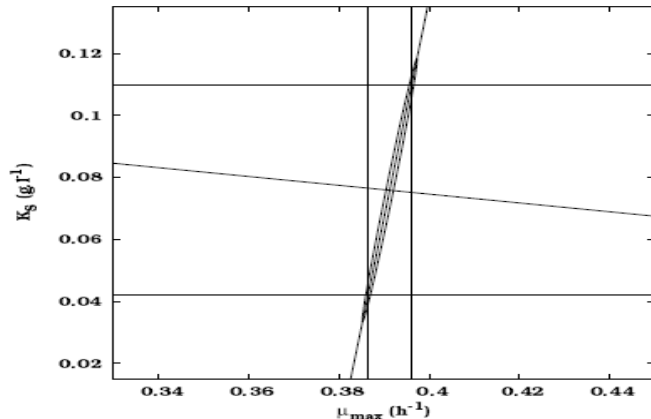
Matrici di correlazione per i parametri di Monod

☞ Dato un certo esperimento batch, si sono stimati i parametri del modello di Monod, ottenendo le seguenti matrici di covarianza, correlazione e intervalli di confidenza dei parametri

$$\delta_i = \pm t_{N-n_p}^\alpha \times \sqrt{C_{ii}}$$

☞ ed errore relativo

$$e_{\hat{p}_i} = 100 \times \frac{\delta_i}{\hat{p}_i}$$



Covariance matrix			
	μ_{max}	K_S	Y
μ_{max}	$5.91E-06$	$4.08E-05$	$1.88E-08$
K_S	$4.08E-05$	$3.22E-04$	$-1.71E-05$
Y	$1.88E-08$	$-1.71E-05$	$8.27E-06$

Correlation matrix			
	μ_{max}	K_S	Y
μ_{max}	1.00	0.93	0.01
K_S	0.93	1.00	-0.33
Y	0.01	-0.33	1.00

95 % confidence intervals and estimation errors			
	Value	Interval (δ)	Error ($e_{\hat{\theta}}$) (%)
μ_{max}	0.391	$\pm 4.92E-03$	1.26
K_S	0.0759	$\pm 3.63E-02$	47.85
Y	0.536	$\pm 5.82E-03$	1.09

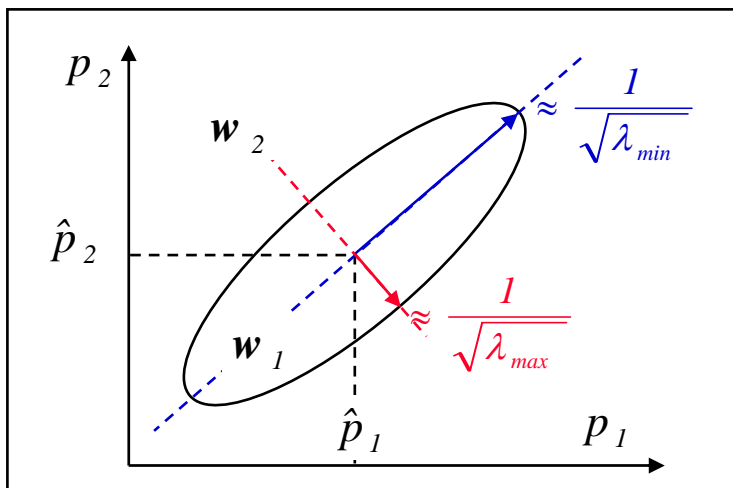
Regioni di confidenza in due dimensioni

- Decomponendo la matrice di covarianza nei suoi autovettori W ed autovalori L

$$C^{-1} = W \times L^{-1} \times W^T \quad W = [w_1 / w_2 / \dots / w_{n_p}] \quad L = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_p})$$

- Le regioni di confidenza in due dimensioni sono rappresentate dalle ellissi definite dalle equazioni parametriche nell'angolo $\phi \in (0, 2\pi)$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \sqrt{n_p \times F^{1-\alpha}_{n_p, N-n_p}} \times \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{bmatrix}$$



- Gli assi dell'ellisse sono inversamente proporzionali a $\sqrt{\lambda}$ mentre gli autovettori determinano l'orientamento dell'ellisse, che ha centro nei parametri stimati.

La Matrice di Informazione di Fisher (FIM)

- Una buona approssimazione della *Matrice Hessiana* \mathbf{H} è fornita dalla *Matrice di Informazione di Fisher*

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{y}_k}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \mathbf{Q}_k \left(\frac{\partial \mathbf{y}_k}{\partial \mathbf{p}} \right) \quad \mathbf{F}^{-1} \approx \mathbf{C}$$

- E' composta da due termini:

➤ l'insieme delle *sensitività* parametriche dell'uscita $\left(\frac{\partial \mathbf{y}_k}{\partial \mathbf{p}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_k}{\partial p_1} & \frac{\partial y_k}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial y_k}{\partial p_{n_p}} \end{bmatrix}$

➤ La matrice inversa di covarianza delle misure \mathbf{Q}_k

- Le sensitività esprimono la dipendenza del modello dai valori dei parametri, perciò la *massimizzazione delle sensitività implica la minimizzazione degli errori di stima*.
- La FIM quantifica il contenuto informativo dell'esperimento rispetto ai parametri del modello, attraverso le *sensitività*, e rispetto ai dati, attraverso \mathbf{Q}_k
- Si può progettare l'esperimento in modo da *massimizzare* $\mathbf{F} \rightarrow$ *minimizzare* \mathbf{C}

Identificabilità pratica e ruolo della FIM

➡ Consideriamo la variazione del funzionale di errore

$$E(\mathbf{P} + \delta\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^N (y_k(\mathbf{P} + \delta\mathbf{P}) - m_k)^T \mathbf{Q}_k (y_k(\mathbf{P} + \delta\mathbf{P}) - m_k)$$

se il vettore dei parametri \mathbf{P} viene perturbato $\hat{\mathbf{P}} \rightarrow \hat{\mathbf{P}} + \delta\mathbf{P}$

➡ l'approssimazione lineare dell'uscita fornisce

$$y_k(\mathbf{P} + \delta\mathbf{P}) \approx y_k(\mathbf{P}) + \left[\frac{\partial y_k(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right] \times \delta\mathbf{P}$$

Sostituendo

$$E(\hat{\mathbf{P}} + \delta\mathbf{P}) \cong E(\hat{\mathbf{P}}) + \delta\mathbf{P}^T \left[\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial y_k}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \mathbf{Q}_k \left(\frac{\partial y_k}{\partial \mathbf{P}} \right) \right] \delta\mathbf{P}$$

➡ Per ottimizzare l'identificabilità pratica, si deve aumentare la variazione del funzionale. Ciò si ottiene **massimizzando** la **Matrice di Informazione di Fisher**.

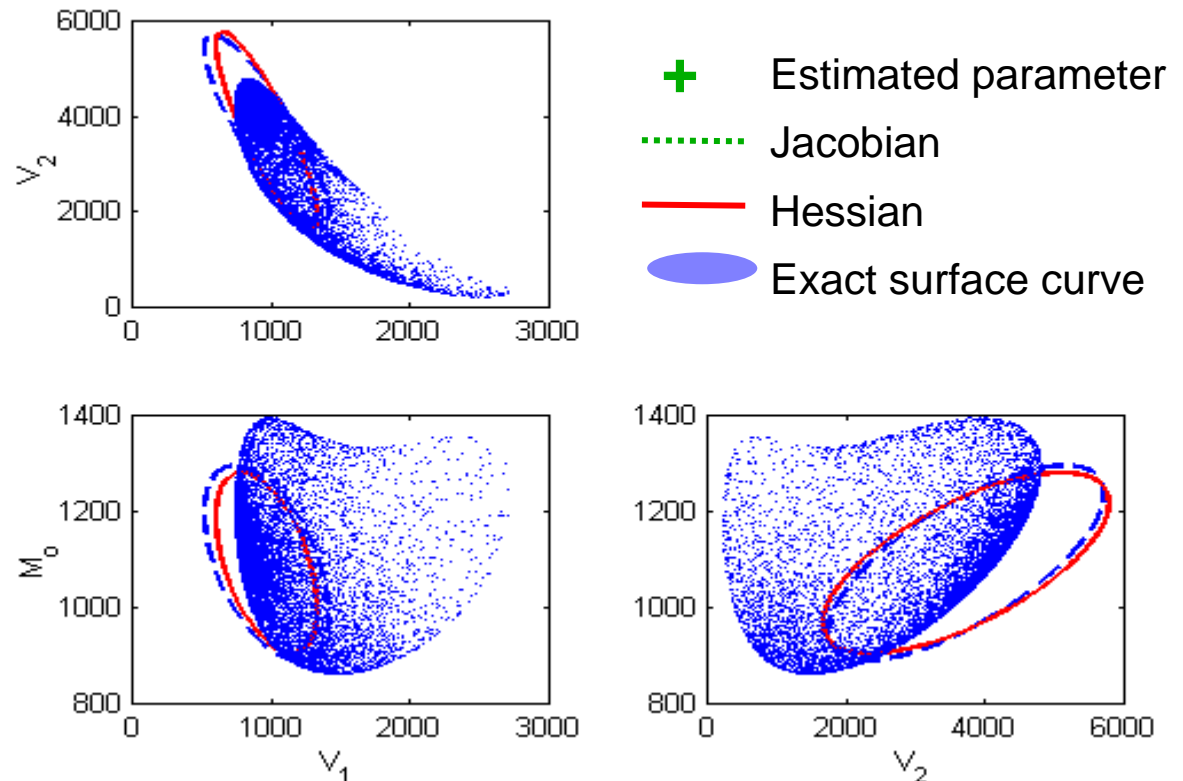
Forma della regione di confidenza

- ☞ Nel *caso nonlineare* la regione di confidenza può avere forma qualsiasi, dovendo solamente soddisfare

$$\left\{ \mathbf{p} : E(\mathbf{p}) \leq \left(1 + \frac{n_p}{N - n_p} F_{n_p, N - n_p}^{1-\alpha} \right) E(\hat{\mathbf{p}}) \right\}$$

- ☞ In questo caso l'approssimazione lineare può essere molto diversa dalla regione vera, calcolata per punti dalla relazione precedente

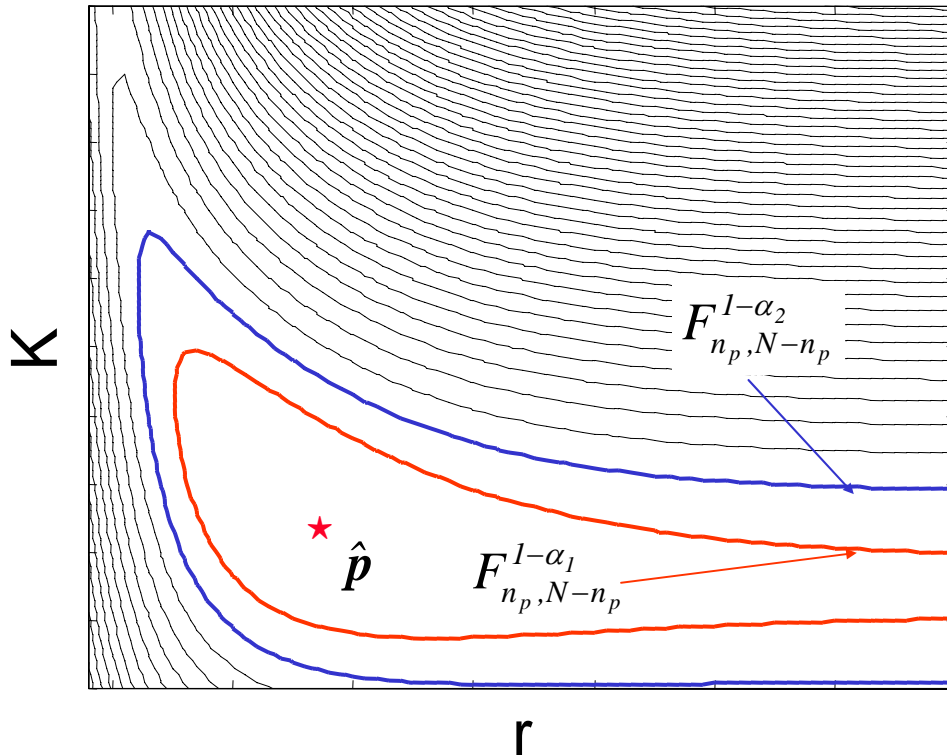
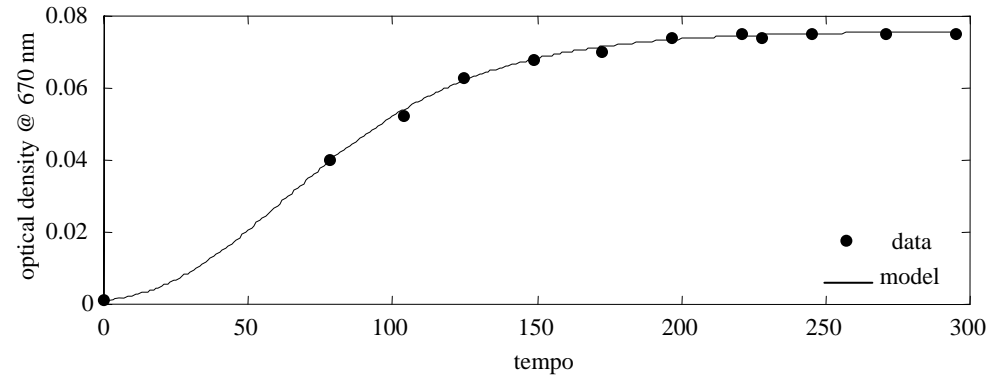
- ☞ La figura mostra due diverse approssimazioni della matrice di covarianza.



Esempio di regioni di confidenza non ellittiche

modello di Richards

$$\frac{dG}{dt} = G \frac{r}{n} \left(1 - \frac{G^n}{K^n} \right)$$



Le regioni di confidenza non sono necessariamente ellissi o comunque forme predefinite.

Nel caso non-lineare possono assumere qualsiasi forma.

Sono semplicemente dei luoghi che soddisfano la relazione

$$\left\{ \mathbf{p} : E(\mathbf{p}) \leq \left(1 + \frac{n_p}{N - n_p} F_{n_p, N-n_p}^{1-\alpha} \right) E(\hat{\mathbf{p}}) \right\}$$

Optimal Experiment Design: OED

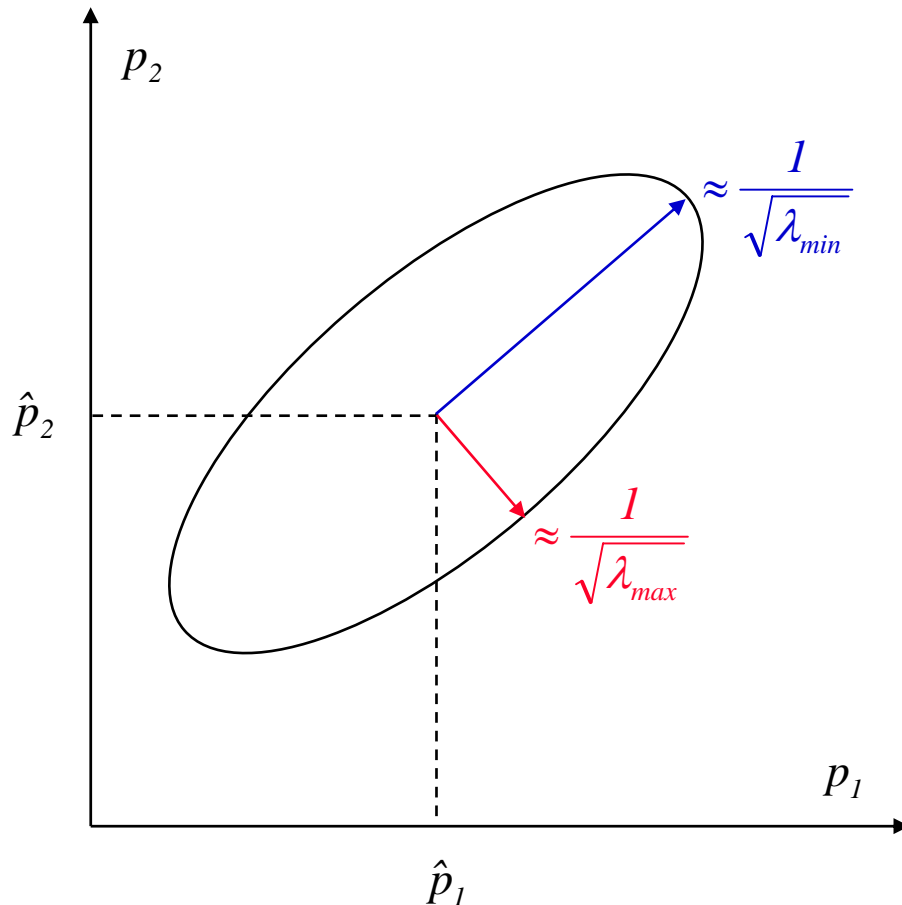
Criteri di ottimizzazione della FIM

<i>Criterio</i>	<i>Obiettivo</i>	<i>Spiegazione</i>
<i>A</i>	$\min(\text{tr}(\mathbf{F}^{-1}))$	Minimizzazione della media aritmetica degli errori sui parametri
<i>modA</i>	$\max(\text{tr}(\mathbf{F}))$	Come A. ma non individua eventuali problemi di malcondizionamento
<i>D</i>	$\max(\det(\mathbf{F}))$	Minimizza il volume dell'ellissoide di confidenza (e la media geometrica degli errori sui parametri)
<i>E</i>	$\max(\lambda_{\min})$	Minimizza la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellissoide di confidenza
<i>modE</i>	$\min(\lambda_{\max} / \lambda_{\min})$	Minimizza il numero di malcondizionamento

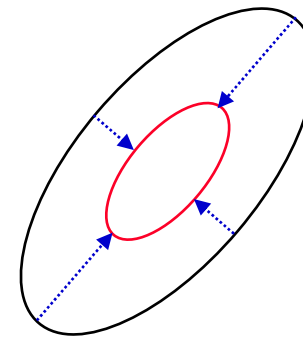
Solo **D** ha la proprietà di essere invariante rispetto a qualsiasi cambiamento di scala o unità di misura. Gli altri 4, soprattutto **modE**, ne risentono.

FIM e regioni di confidenza

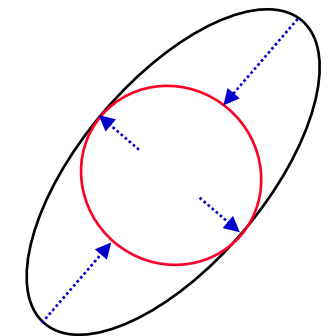
La lunghezza dei semiassi dell'ellissoide di confidenza è inversamente collegata agli autovalori massimo e minimo della FIM



I criteri di minimizzazione della varianza possono tendere alla riduzione del **volume** dell'ellissoide (*D-optimality*) o al suo "**arrotondamento**" (*E-optimality*)



D-optimality
minimizza l'errore di stima
 $\max(\lambda_{\min})$



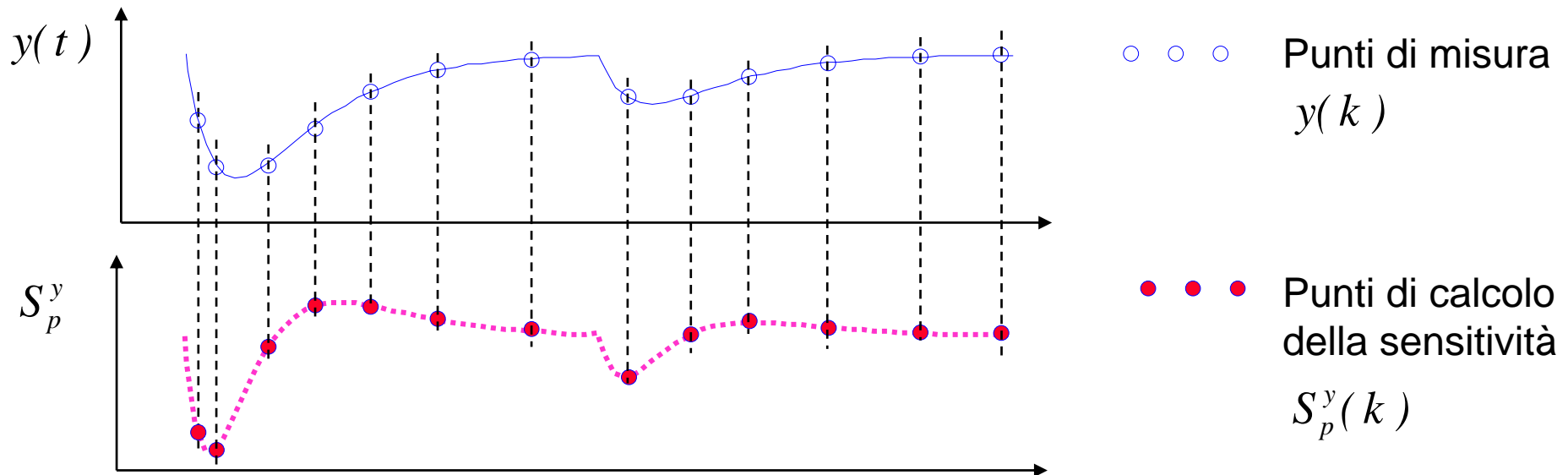
E-optimality
minimizza la correlazione fra parametri
 $\max(\lambda_{\min})$

Calcolo pratico della FIM

- Applicando la definizione di Matrice di Informazione di Fisher, essa è formata dalle sensitività parametriche dell'uscita

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial y_k}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \mathbf{Q}_k \left(\frac{\partial y_k}{\partial \mathbf{p}} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\mathbf{S}_p^y(k) \right)^T \mathbf{Q}_k \left(\mathbf{S}_p^y(k) \right) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{Q}_k = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} \frac{1}{\sigma_2^2} \dots \frac{1}{\sigma_q^2} \right) \\ \mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1} \end{cases}$$

- Perciò \mathbf{F} può essere ottenuta direttamente calcolando le traiettorie di sensitività del sistema lungo un certo numero di punti della traiettoria scelta per l'



Calcolo della FIM in pratica

Si supponga ad es.
di avere:

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial y_k}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \mathbf{Q}_k \left(\frac{\partial y_k}{\partial \mathbf{p}} \right)$$

- 1 uscita ($q = 1$)
- 2 parametri ($n_p = 2$)
- 3 misure ($N = 3$)

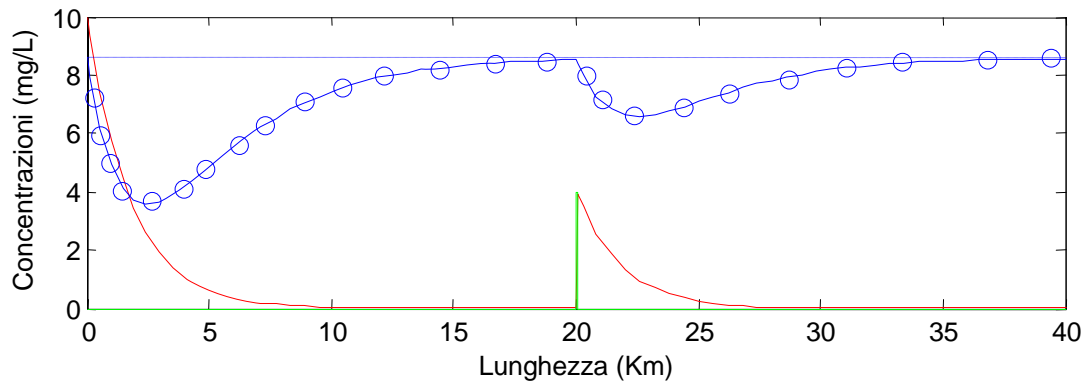
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial p_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial p_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial p_1} & \frac{\partial y_1}{\partial p_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial p_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial p_1} & \frac{\partial y_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial p_1} \\ \frac{\partial y_3}{\partial p_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial p_1} & \frac{\partial y_3}{\partial p_2} \end{bmatrix}$$

Si suppone inoltre
di non avere
informazioni
sugli errori di
misura, e quindi si
pone $\mathbf{Q}_k = \mathbf{1}$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y_1}{\partial p_1} \right)^2 & \frac{\partial y_1}{\partial p_1} \frac{\partial y_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial p_2} \frac{\partial y_1}{\partial p_1} & \left(\frac{\partial y_1}{\partial p_2} \right)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y_2}{\partial p_1} \right)^2 & \frac{\partial y_2}{\partial p_1} \frac{\partial y_2}{\partial p_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial p_2} \frac{\partial y_2}{\partial p_1} & \left(\frac{\partial y_2}{\partial p_2} \right)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y_3}{\partial p_1} \right)^2 & \frac{\partial y_3}{\partial p_1} \frac{\partial y_3}{\partial p_2} \\ \frac{\partial y_3}{\partial p_2} \frac{\partial y_3}{\partial p_1} & \left(\frac{\partial y_3}{\partial p_2} \right)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_k \left(\frac{\partial y_k}{\partial p_1} \right)^2 & \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial p_1} \frac{\partial y_k}{\partial p_2} \\ \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial p_2} \frac{\partial y_k}{\partial p_1} & \sum_k \left(\frac{\partial y_k}{\partial p_2} \right)^2 \end{bmatrix}$$

Precisione in funzione della FIM: modello di S&P (1)



Caso 1:
Misure precise e distribuite
ugualmente lungo tutto il tratto

$$\sigma_{DO} \cong 0.05 \text{ (mg L}^{-1}\text{)}$$

$$F = \begin{bmatrix} 3.8222 \times 10^2 & -3.0150 \times 10^{-1} \\ -3.0150 \times 10^{-1} & 5.1895 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

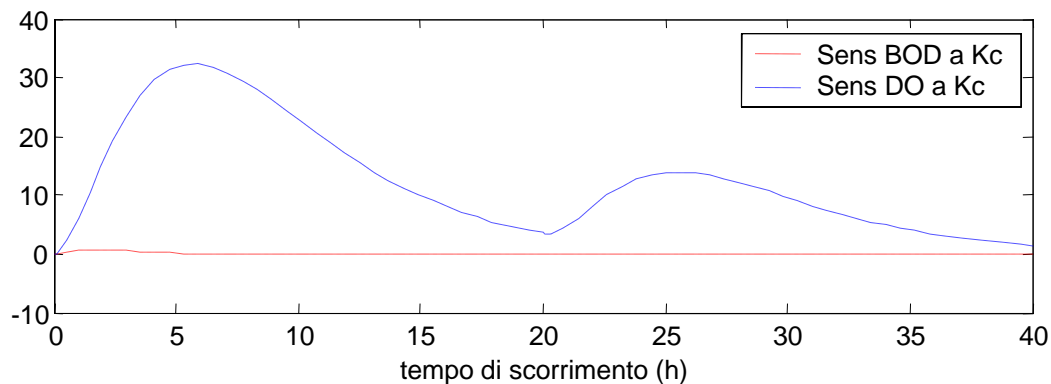
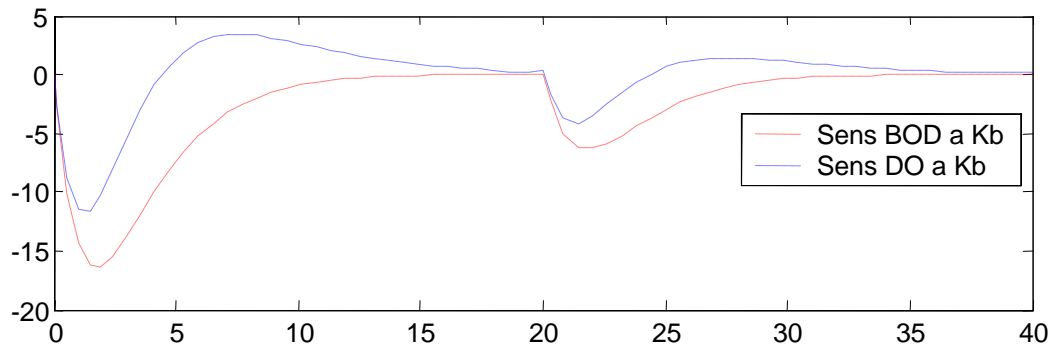
$$C = \begin{bmatrix} 8.0833 \times 10^{-6} & 4.6963 \times 10^{-8} \\ 4.6963 \times 10^{-8} & 5.9536 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\delta K_b = \pm 4.8820 \times 10^{-3}$$

$$\delta K_c = \pm 1.3249 \times 10^{-3}$$

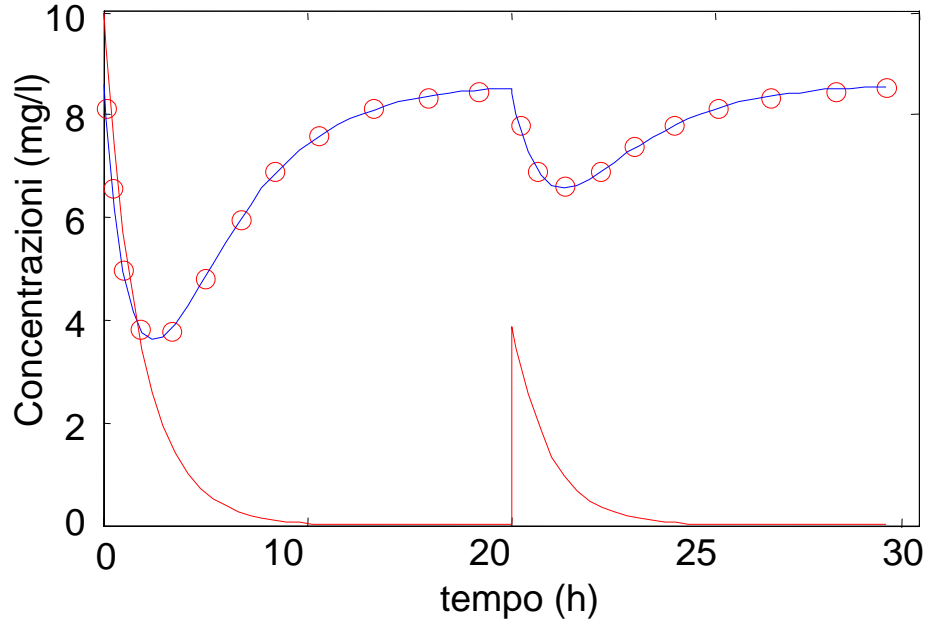
$$S_{K_b}^{DO} = 51.7002$$

$$S_{K_c}^{DO} = 126.8181$$



Precisione in funzione della FIM: modello di S&P (1)

Risultato della calibrazione su misure di DO soltanto



K_b vero =

K_b stimato = 0.19703

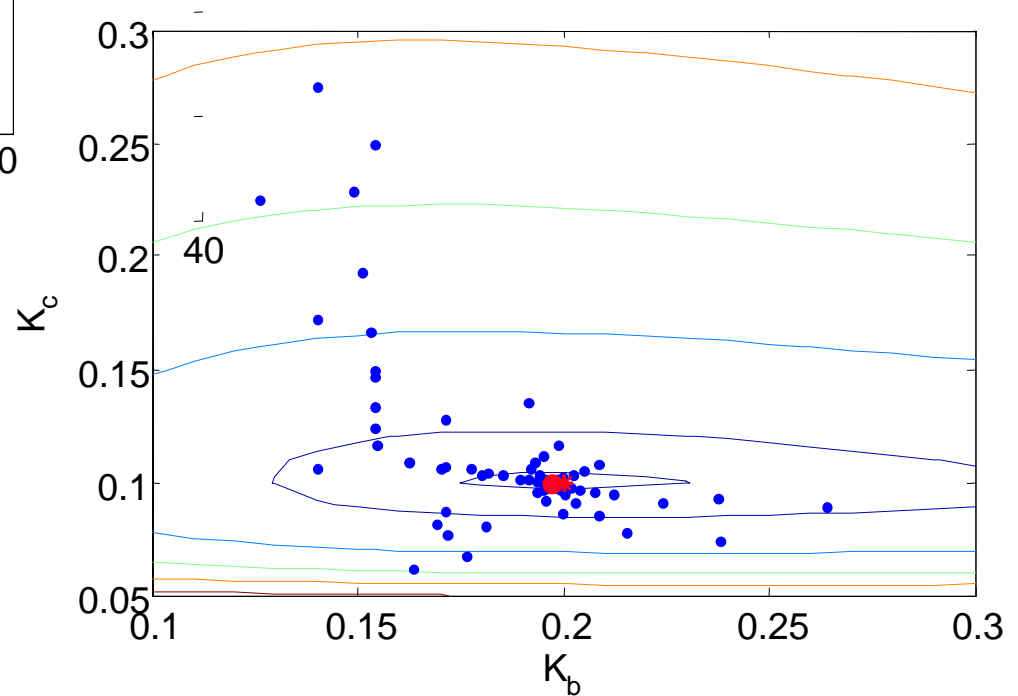
K_c vero =

K_c stimato = 0.099548

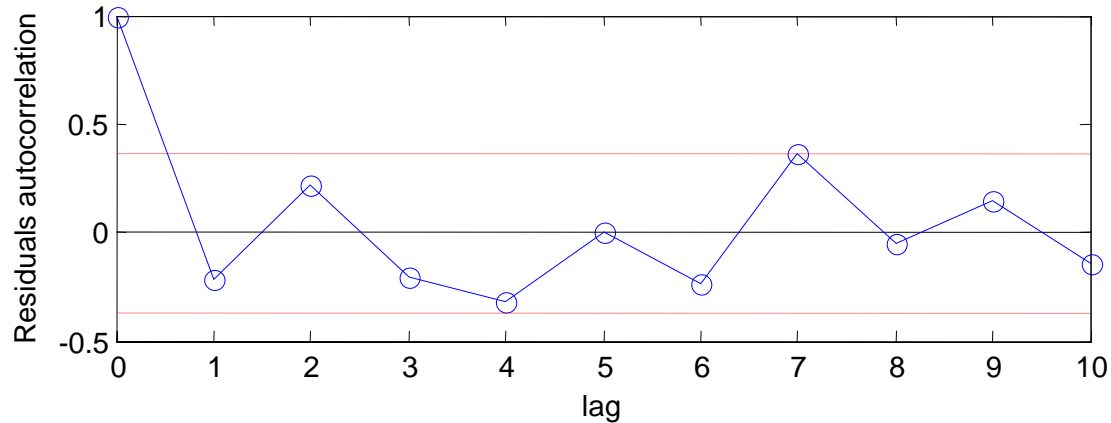
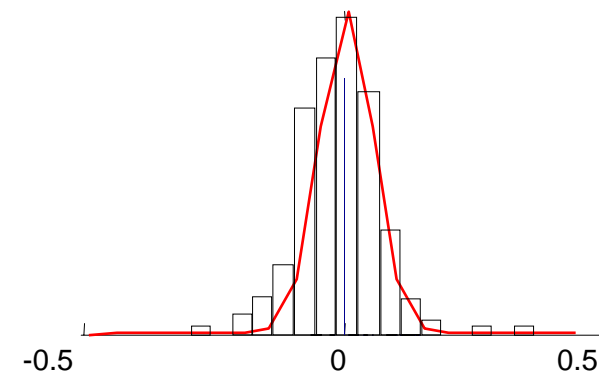
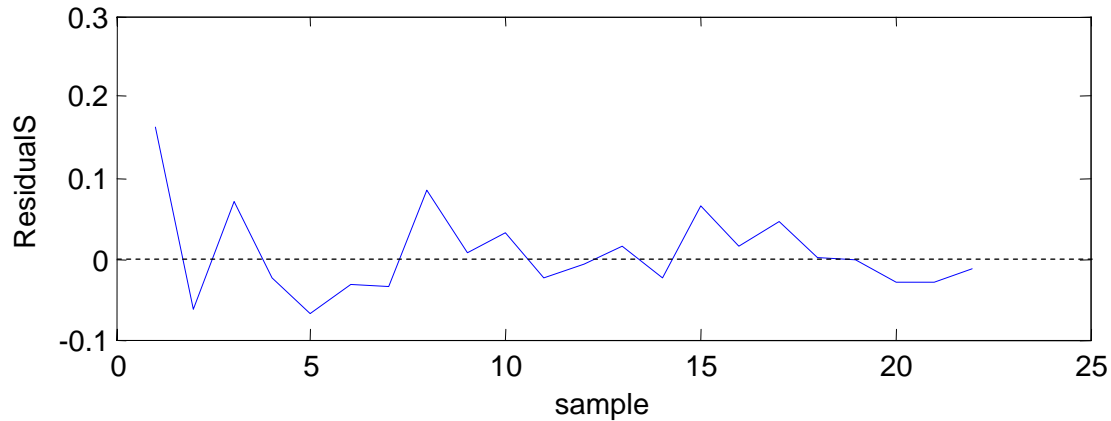
Gli errori di stima sono inferiori ai limiti di confidenza

$$\delta K_b = 3 \times 10^{-3} < 4.8820 \times 10^{-3}$$

$$\delta K_c = 4.52 \times 10^{-4} < 1.3249 \times 10^{-3}$$



Analisi dei residui (S&P 1)

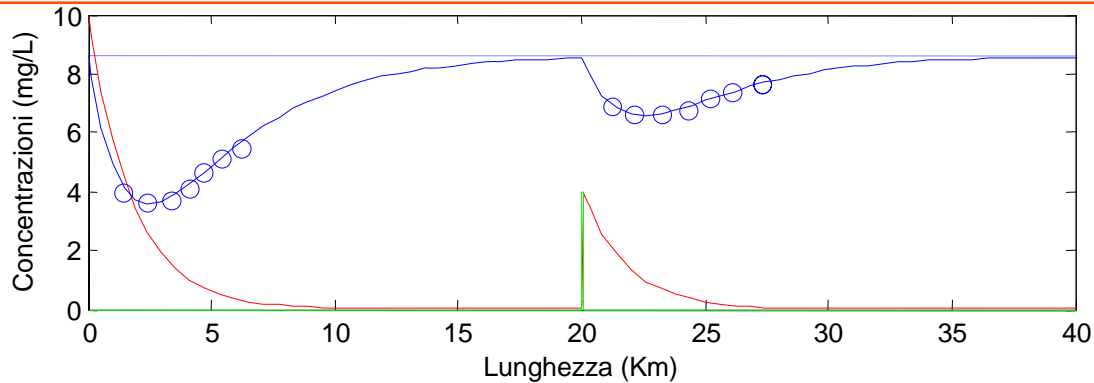


Residui sufficientemente gaussiani
(si può fare un test preciso)

Autocorrelazioni entro i limiti statistici nulli

$$O \cong \pm \frac{t_{N-1}^{\alpha/2}}{\sqrt{N}}$$

Precisione in funzione della FIM: modello di S&P (2)



Caso 2:
Misure precise e limitate alle
zone di alta sensitività

$$\sigma_{DO} \cong 0.09 \text{ (mg L}^{-1}\text{)}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.2662 \times 10^3 & -0.2297 \times 10^3 \\ -0.2297 \times 10^3 & 6.1569 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

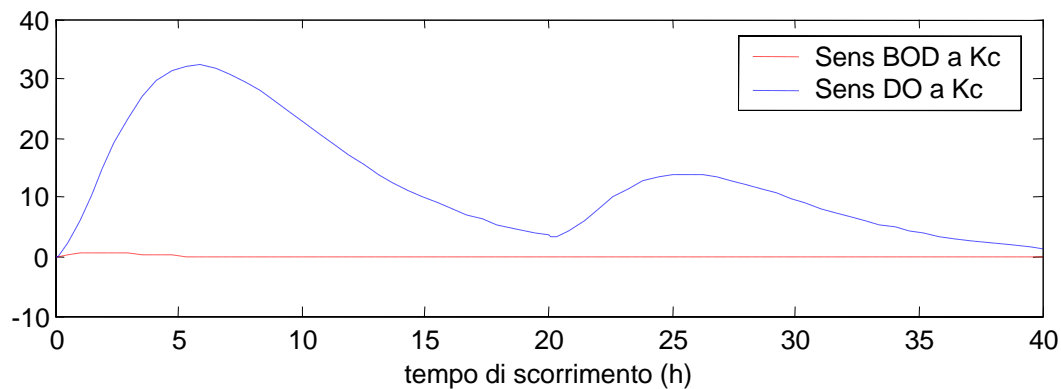
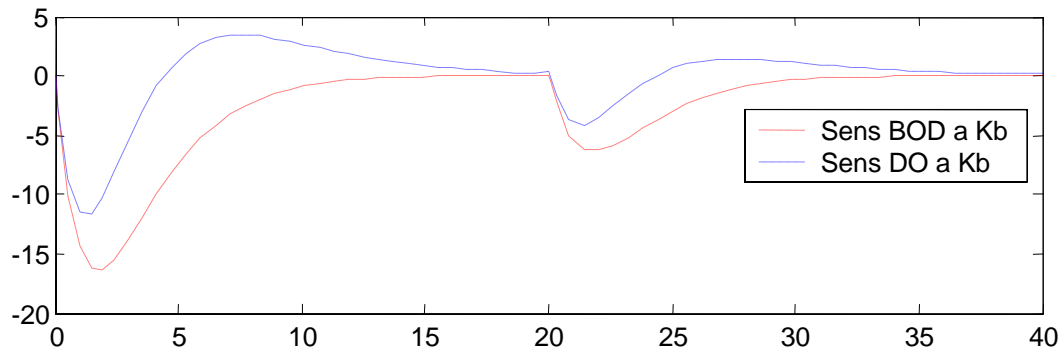
$$C = \begin{bmatrix} 0.3267 \times 10^{-4} & 0.0122 \times 10^{-4} \\ 0.0122 \times 10^{-4} & 0.0141 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\delta K_b = \pm 0.01$$

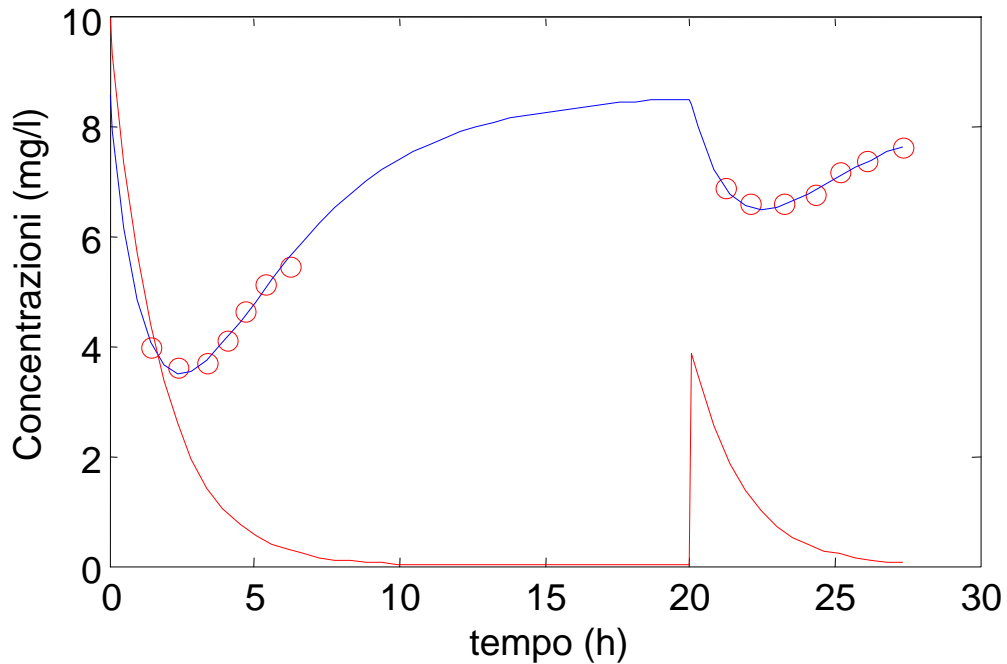
$$\delta K_c = \pm 0.0021$$

$$S_{K_b}^{DO} = 51.7002$$

$$S_{K_c}^{DO} = 126.8181$$



Precisione in funzione della FIM: modello di S&P (2)



Gli errori di stima sono inferiori ai limiti di confidenza

$$\delta K_b = 0.0076 < 0.01$$

$$\delta K_c = 0.0019 < 0.0021$$

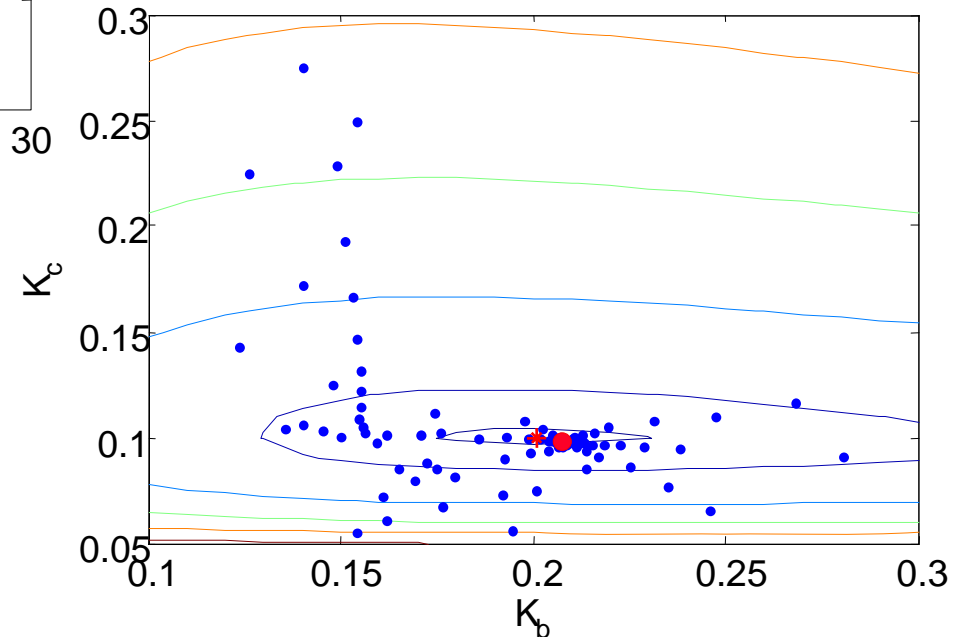
K_b vero =

K_b stimato = 0.20764

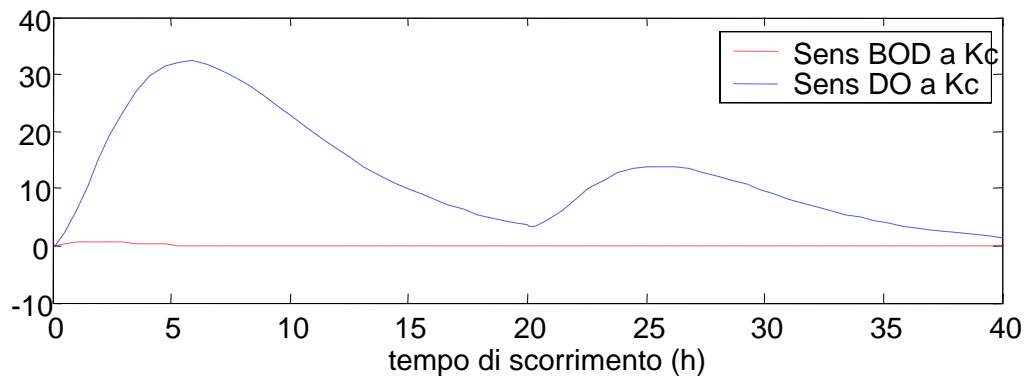
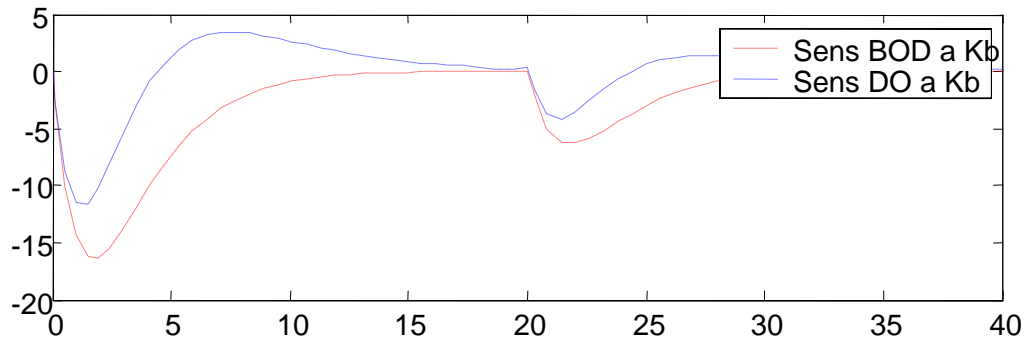
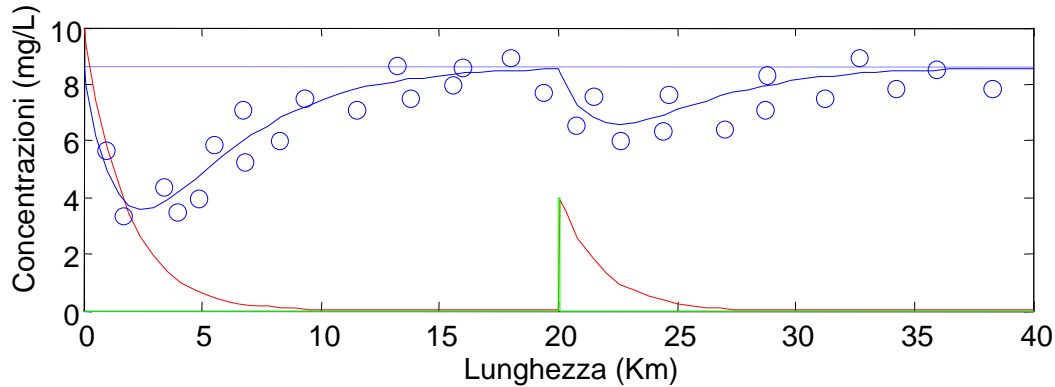
K_c vero =

K_c stimato = 0.098118

VAF = 99.7119



Precisione in funzione della FIM: modello di S&P (2)



Caso 3:

Misure poco precise e distribuite ugualmente lungo tutto il tratto

$$\sigma_{DO} \cong 0.66 \text{ (mg L}^{-1}\text{)}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.3574 \times 10^3 & 0.2155 \times 10^3 \\ 0.2155 \times 10^3 & 9.0589 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.2516 \times 10^{-3} & -2.9775 \times 10^{-5} \\ -2.9775 \times 10^{-5} & 4.9376 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

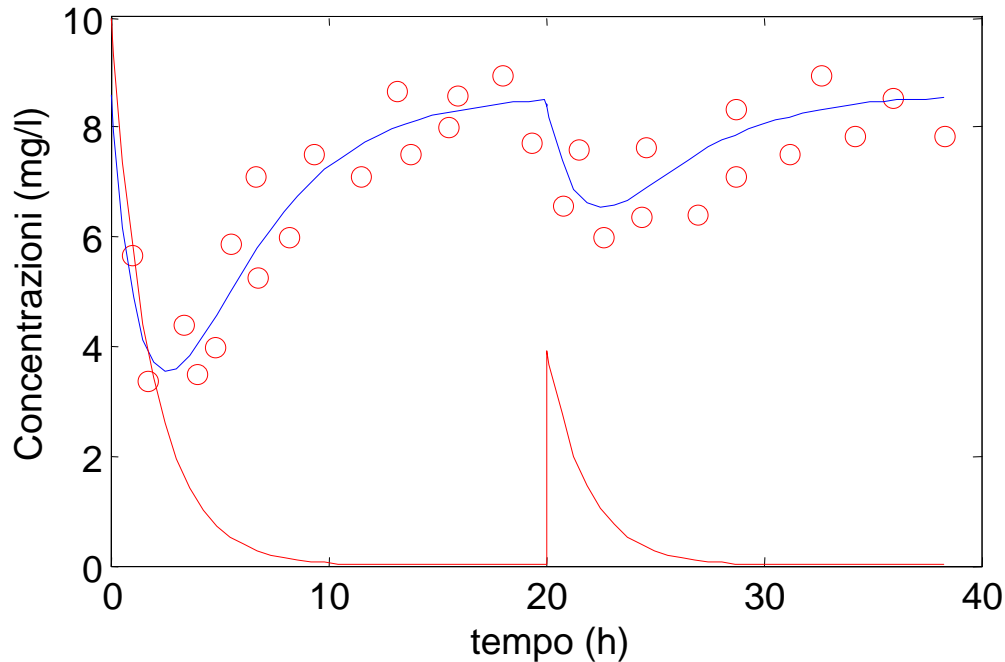
$$\delta K_b = \pm 0.06$$

$$\delta K_c = \pm 0.0119$$

$$S_{K_b}^{DO} = 51.7002$$

$$S_{K_c}^{DO} = 126.8181$$

Precisione in funzione della FIM: modello di S&P (3)



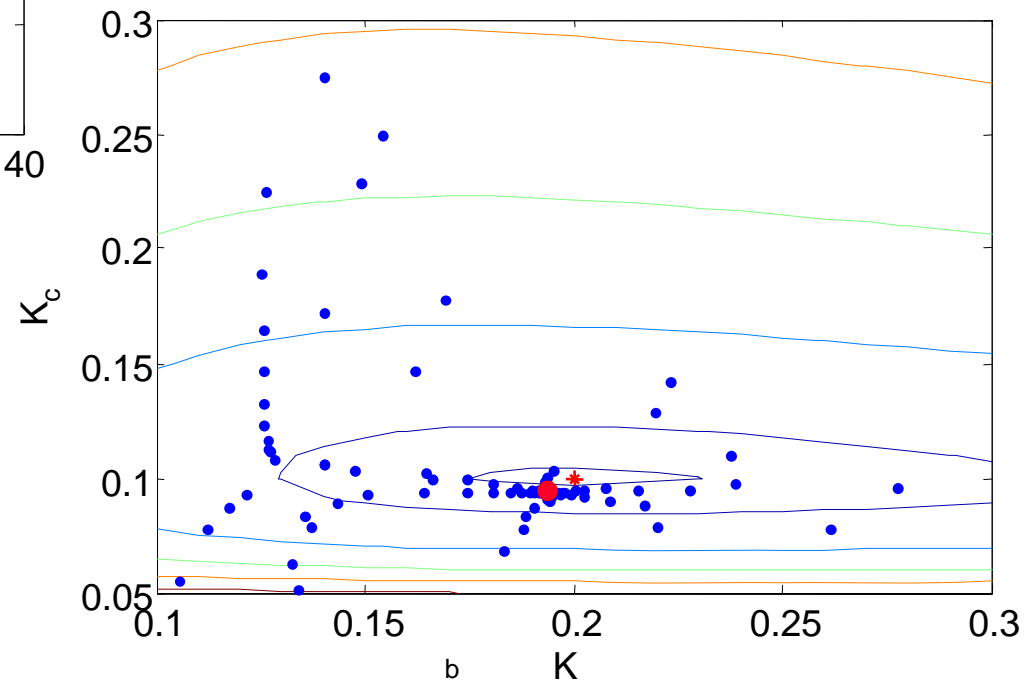
K_b vero = 0.2

K_b stimato = 0.19371

K_c vero = 0.1

K_c stimato = 0.094356

VAF = 81.8637

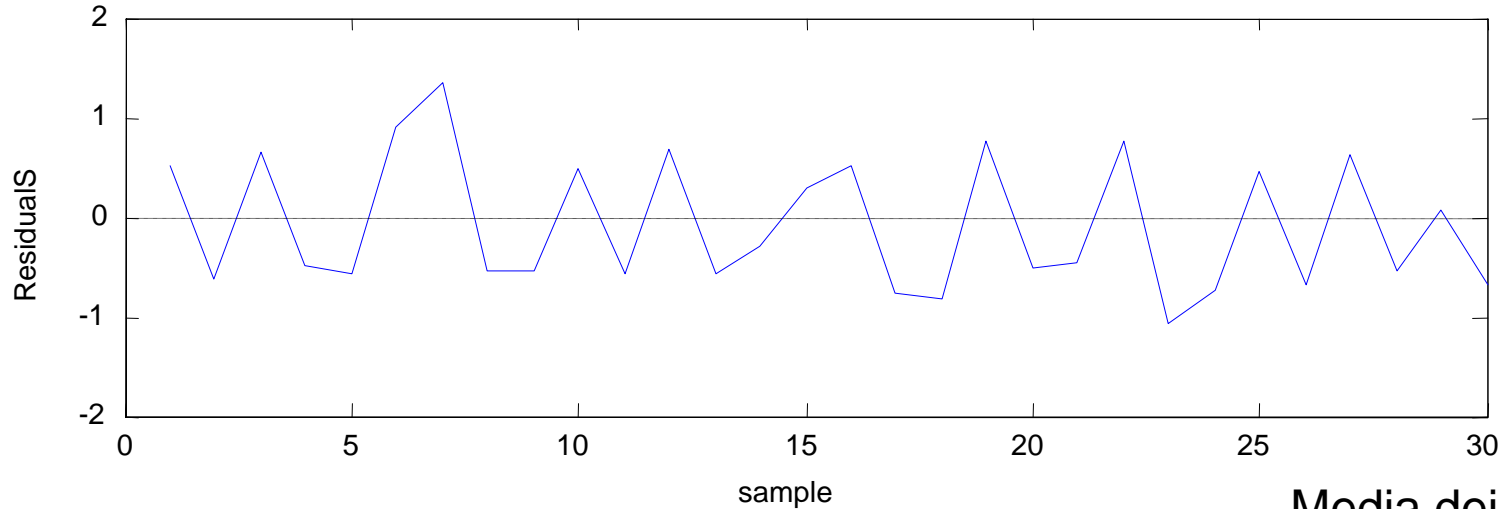


Gli errori di stima sono inferiori ai limiti di confidenza

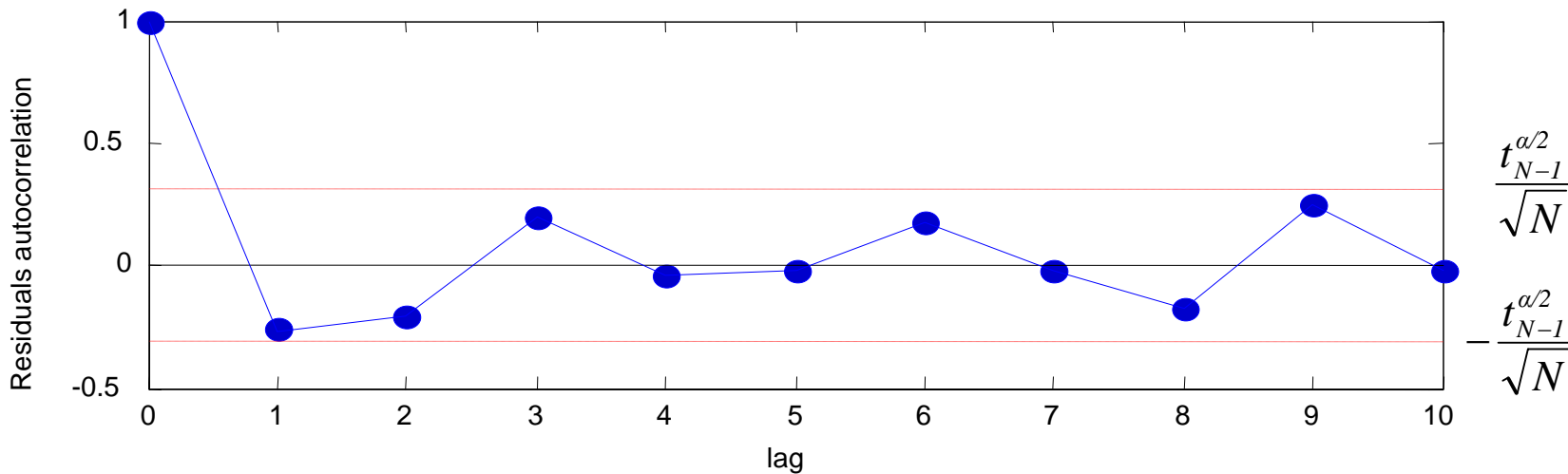
$$\delta K_b = 0.0063 < 0.06$$

$$\delta K_c = 0.0056 < 0.0119$$

Analisi dei residui (3)



Media dei residui = -0.0782
Dev. Std. dei residui = 0.6679



Procedura di calibrazione di un modello fluviale

- ☞ Si definisce la struttura del modello
- ☞ Si adatta la struttura al caso in esame
- ☞ Si esegue una ricognizione del fiume per accertare la posizione e la consistenza degli scarichi (concentrati e distribuiti)
- ☞ Si esegue uno studio di sensitività per classificare i parametri in vista della calibrazione
- ☞ Si sceglie il sottoinsieme di parametri da calibrare considerando soltanto i più sensitivi

Struttura del modello

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dB}{dx} &= -\frac{1}{u(x)} K_b(x) B + B_d(x) \\ \frac{dNH_4}{dx} &= -\frac{1}{u(x)} K_a(x) \cdot NH_4 - \frac{1}{u(x)} \delta \cdot K_{al} \frac{NH_4}{K_f + NH_4} \\ \frac{dNO_3}{dx} &= \frac{1}{u(x)} K_a(x) \cdot NH_4 - \frac{1}{u(x)} (1 - \delta) \cdot K_{al} \frac{NO_3}{K_f + NO_3} - \frac{1}{u(x)} K_o \cdot NO_3 + NO_{3d}(x) \\ \frac{dDO}{dx} &= \frac{1}{u(x)} K_r(u) (DO_{sat} - DO) - \frac{1}{u(x)} K_b(x) B - \frac{1}{u(x)} \frac{(4.57 - Y_a)}{Y_a} K_a(x) \cdot NH_4 + DO_{ph}(x) \end{aligned} \right.$$

riossigenazione funzione della velocità $K_r(u) = K_c \sqrt{\frac{u(x)}{3.6}}$

Strutturazione dei parametri

Sieve

$$K_a(x) = \begin{cases} K_{a_max} \frac{NH_4}{K_{sa} + NH_4} & x > 21 \\ K_{aa} & x < 21 \end{cases}$$

$$K_b(x) = K_{bm} \cdot \begin{cases} 1.802 & 0 < x \leq 12.492 \\ 2.479 & 12.492 < x < 16.859 \\ 0.451 & 16.859 < x < 48.454 \end{cases}$$

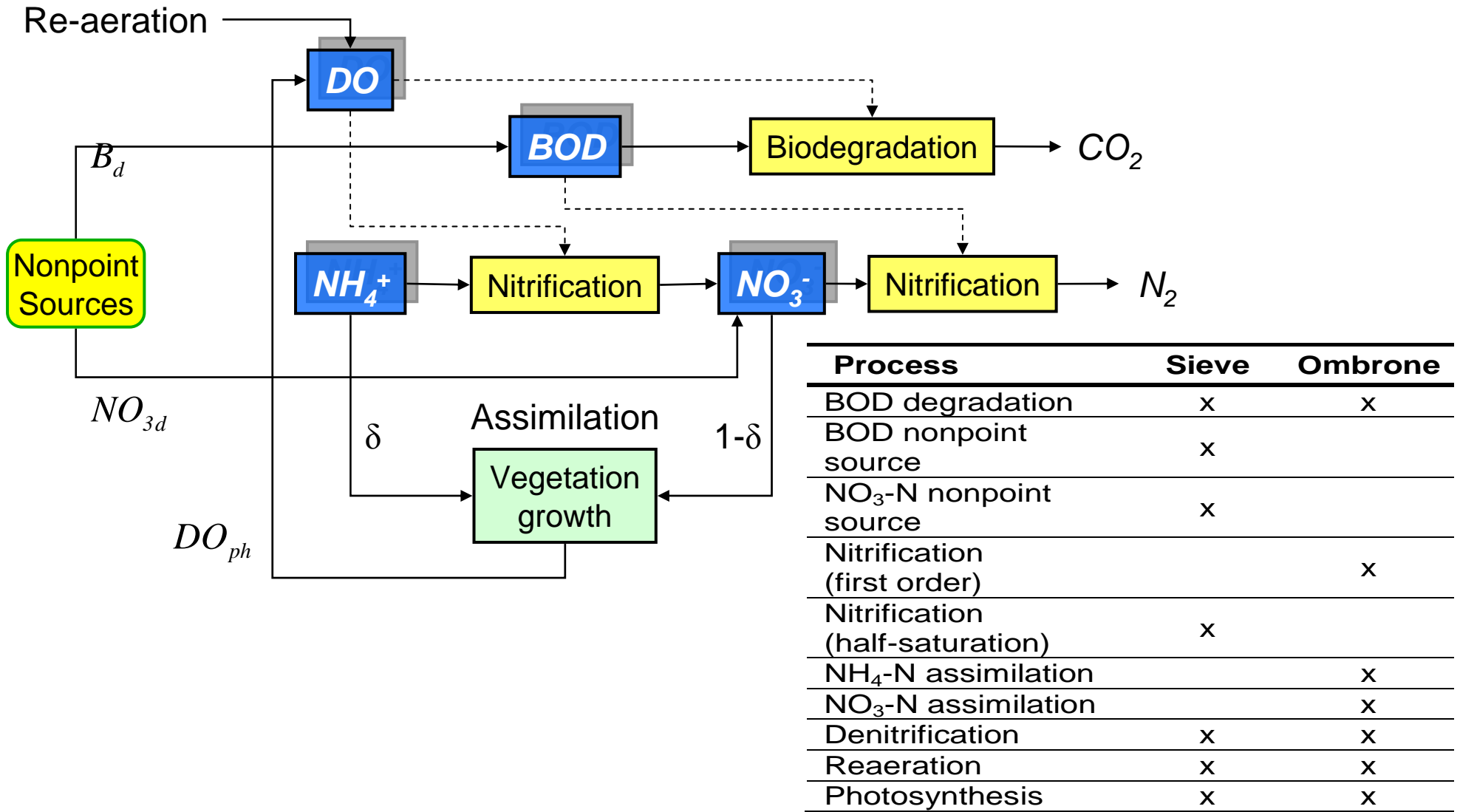
Ombrone

$$K_a(x) = \begin{cases} K_{a_max1} \cdot f(T, pH, DO) & 0 < x < 10.5 \\ K_{a_max2} \cdot f(T, pH, DO) & x > 10.5 \end{cases}$$

$$f(T, pH, DO) = e^{C_T(T(x)-15)} \cdot \frac{1}{1 + 10^{pk_1 - pH(x)} + 10^{pH(x) - pk_2}} \cdot \left(\frac{DO}{K_{os} + DO} \right)$$

$$K_b(x) = \begin{cases} K_{b1} & 0 < x < 10.5 \\ K_{b2} & x > 10.5 \end{cases}$$

Selezione dei processi modellati



Censimento degli scarichi

river	distance (km)	flow (m ³ s ⁻¹)	CBOD (mg L ⁻¹)	DO (mg L ⁻¹)	NH ₄ -N (mg L ⁻¹)	Type of source
Sieve	0.0	3.000	5.0	12.0	0.0	Upstream conditions
	13.5	0.120	70.0	3.0	0.0	Rabatta WWTP discharge
	18.4	0.0125	70.0	5.0	33.0	Point source discharge at Vicchio
	21.0	0.015	20.0	3.0	0.0	Vicchio WWTP discharge
	30.0	0.0126	130.0	5.0	25.0	Point source discharge at Dicomano
	40.5	0.017	50.0	5.0	23.0	Point source discharge at Rufina
Ombrone	0.0	0.3	7	7	1.97	Upstream conditions
	7.1	1.4	6.0	5.0	3.2	Baciacavallo WWTP discharge
	7.9	0.13	4.0	5.0	5.0	Candeli WWTP discharge

Classifica dei parametri secondo la sensitività

river	parameter	S			
Sieve	K_{sa}	791.25	Core parameters	molto sensitivi	
	$K_{a\ max}$	376.76			
	K_b	181.65			
	K_o	69.79			
	B_d	49.49	Nonpoint sources	mediamente sensitivi	
	NO_{3d}	25.29			
	DO_{ph}	10.77			
		K_c	5.28	Literature or euristic values	poco sensitivi
		K_{ao}	0.43		
Ombrone	$K_{a\ max}$	313.68	Core parameters	molto sensitivi	
	K_b	198.46			
	K_{al}	150.98			
	K_o	44.61			
	DO_{ph}	42.38	Nonpoint source	mediamente sensitivo	
		K_c	17.29	Literature or euristic values	poco sensitivi
		K_f	13.68		
		K_{os}	11.12		
	K_{ao}	4.90			

Criterio di scelta dei parametri da stimare

- ☞ Si calcola la sequenza di matrici di Fisher ottenute con un numero crescente di parametri a partire dal più sensitivo

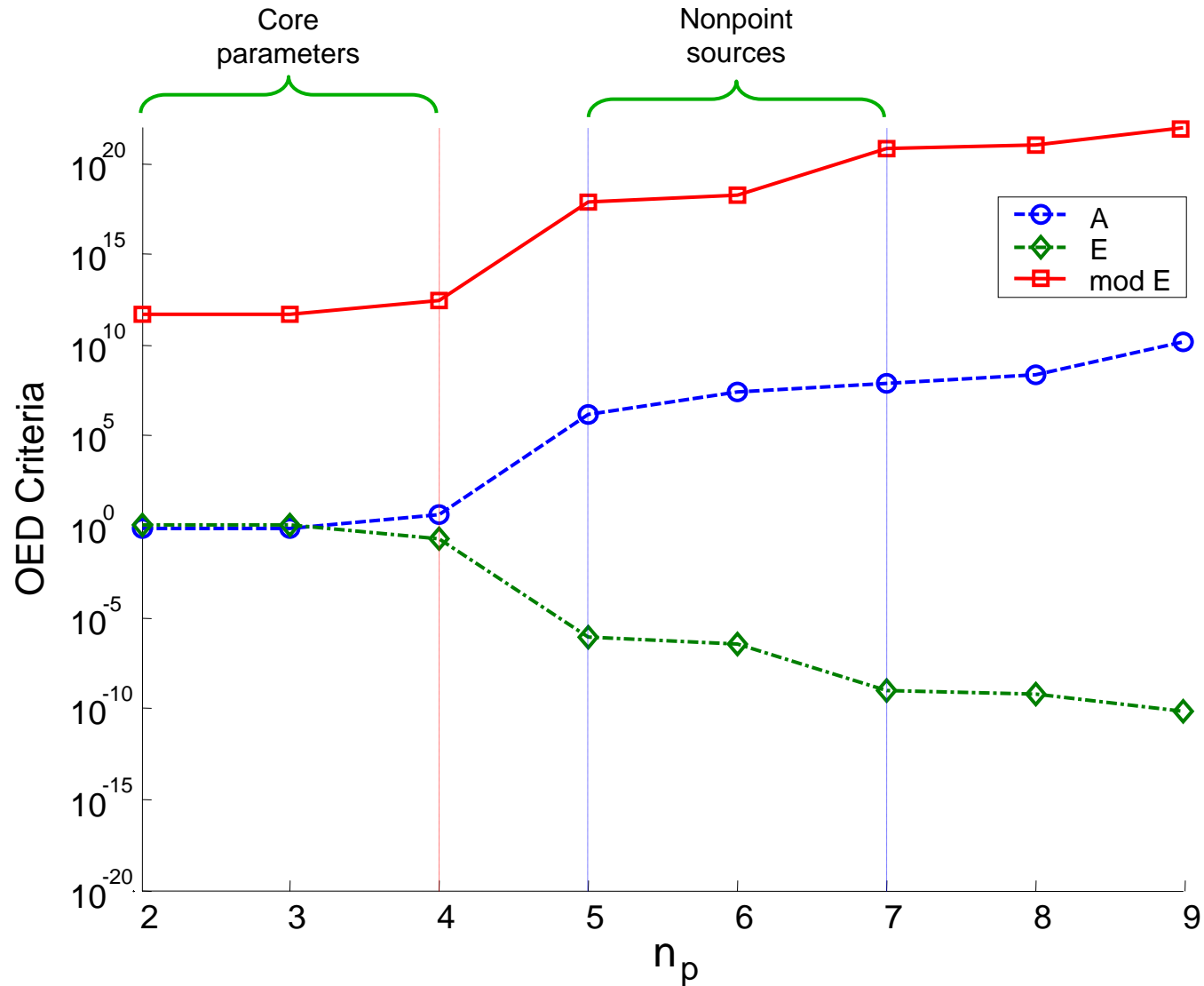
$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} \\ F_{2,1} & F_{2,2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} \\ F_{2,1} & F_{2,2} & F_{2,3} \\ F_{3,1} & F_{3,2} & F_{3,3} \end{bmatrix}$$

.....

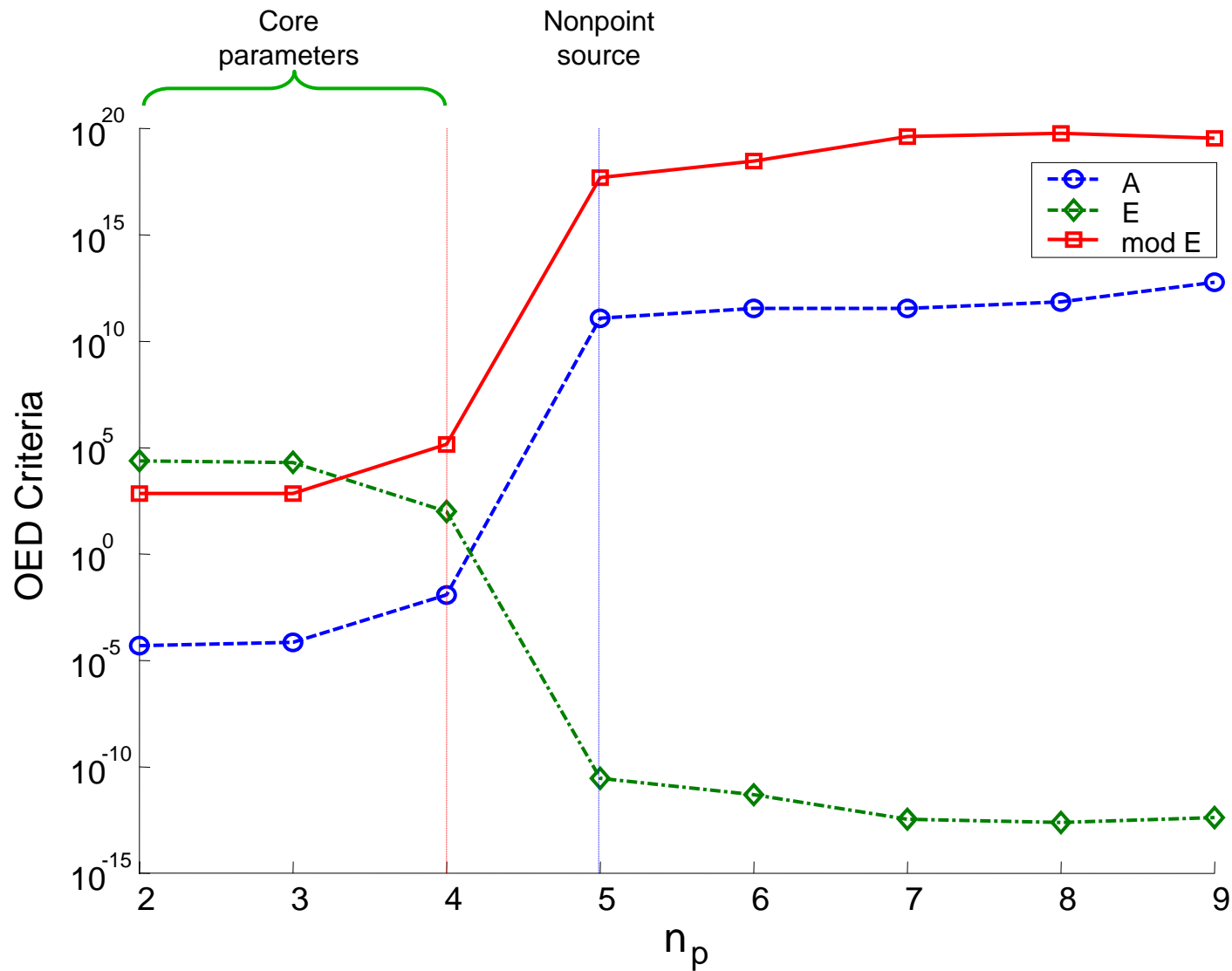
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,i} & \dots & F_{1,n_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{i,1} & \dots & F_{i,i} & \dots & F_{i,n_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n_p,1} & \dots & F_{n_p,i} & \dots & F_{n_p,n_p} \end{bmatrix}$$

- ☞ Si selezionano per la calibrazione i primi i parametri più sensitivi tali che i criteri OED non subiscono un degrado apprezzabile









Andamento degli indici OED per il fiume Sieve



Andamento degli indici OED per il fiume Ombrone



Bibliografia

-  Himmelblau D.M., *Applied nonlinear programming*, McGraw-Hill, 1972.
-  Press, W. H., Flannery B.P., Teukolsky, Vetterling W.T., *Numerical Recipes, the art of Scientific computing*, Cambridge University Press, 1985.
-  Richter O., Söndgerath D., *Parameter estimation in ecology*, VCH, 1990.
-  Seber G.A.F., Wild C.J., *Nonlinear regression*, Wiley, 1989.
-  Marsili-Libelli S., Castelli M., An adaptive search method for numerical optimization, *Appl. Math and Comp.*, **23**: 341 - 357 (1987).
-  Dochain, D. e Vanrolleghem P. Dynamical modelling and estimation in wastewater treatment processes. IWA PUBL. 2001.
-  Marsili-Libelli S., Parameter estimation of ecological models, *Ecological Modelling*, **62**: 233 - 258 (1992).
-  Marsili-Libelli S., Guerrizio S., Checchi N., Confidence regions of estimated parameters for ecological systems. *Ecological Modelling*, **165**: 127 - 146 (2003).