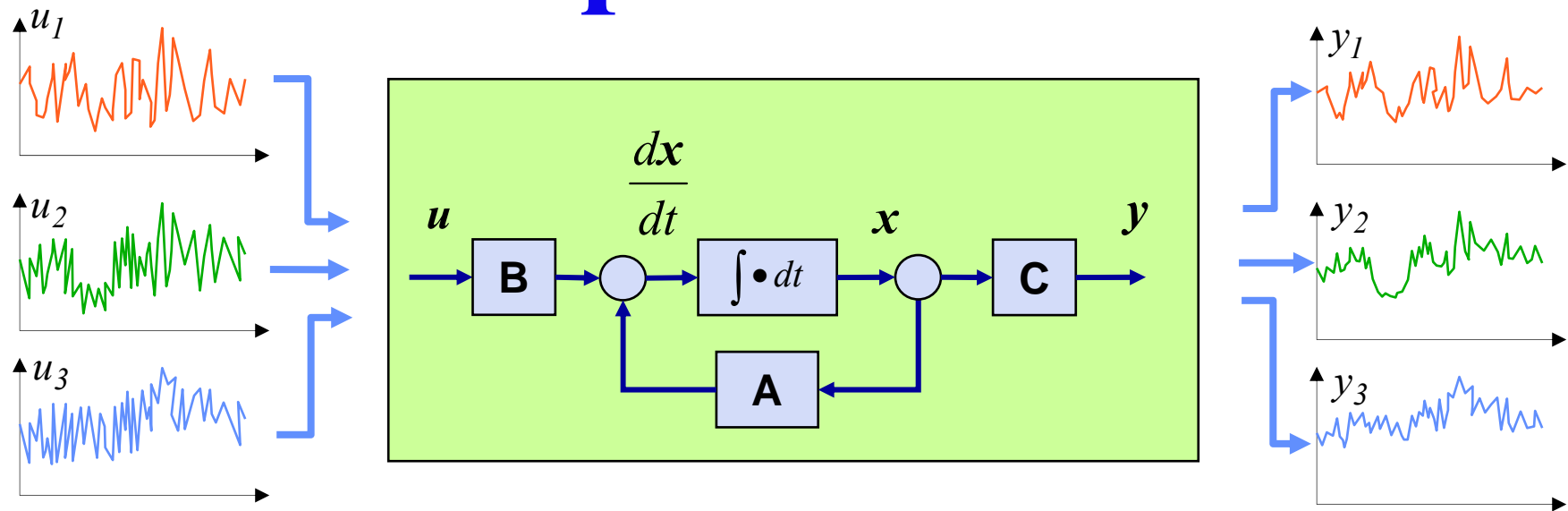
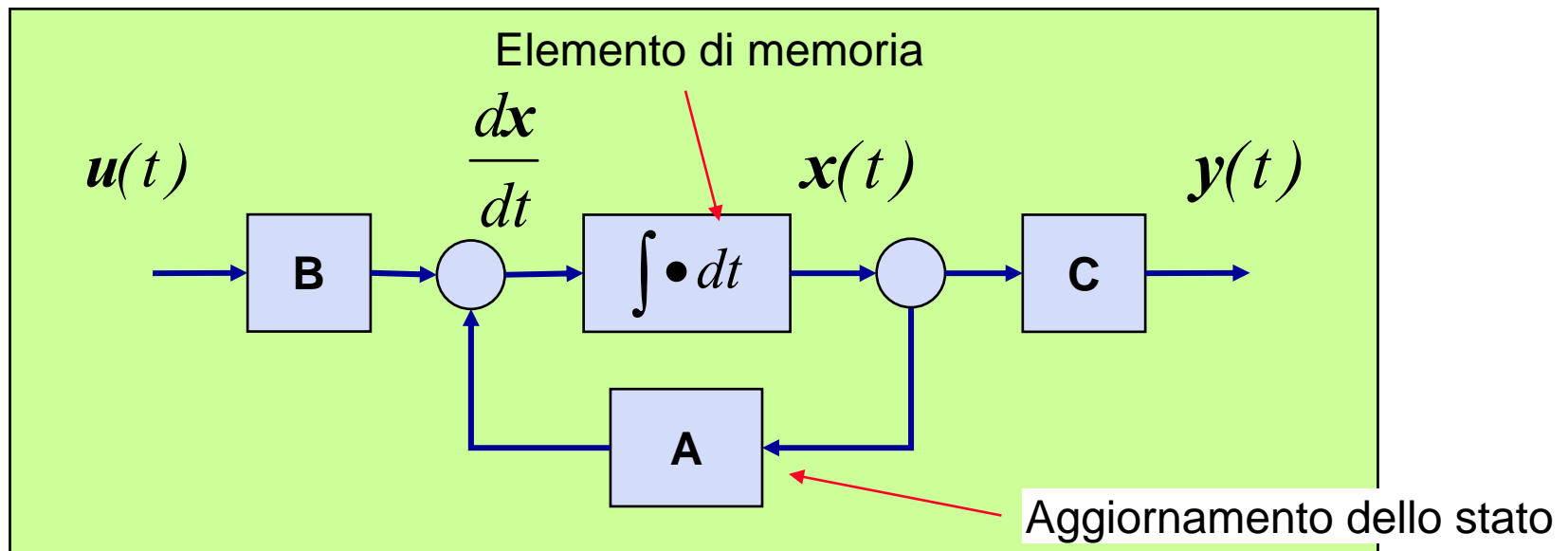


Sistemi Dinamici Lineari tempo-continui



Struttura di un sistema dinamico lineare t-c

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$



Evoluzione di un sistema autonomo

☞ Il sistema è autonomo se evolve senza contributo degli ingressi ($u = 0$)

☞ L'equazione di stato si riduce a $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

☞ che si può integrare formalmente separando le variabili (con condizione iniziale \mathbf{x}_0)

$$\frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}} = A dt \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = e^{At} \mathbf{x}_0$$

☞ Il termine e^{At} è detto **esponenziale di matrice** e può essere calcolato come sviluppo in serie analogamente al caso scalare (*questo ci servirà più per dimostrare delle proprietà che come calcolo pratico, per il quale ci sono metodi più efficienti*)

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

Proprietà dell'esponenziale di matrice e^{At}

- ☞ Nel tempo continuo la matrice di transizione Φ è l'esponenziale di matrice e^{At}

$$\text{Proprietà di } \Phi(t,s) = e^{A(t-s)}$$

- ☞ **Identità:** $\Phi(t,t) = I$

$$\text{Prova: } e^{A(t-t)} = e^0 = I$$

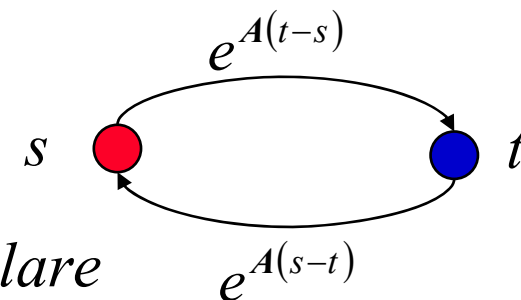
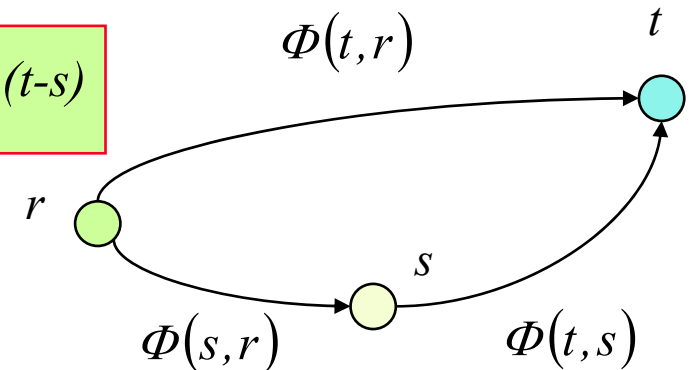
- ☞ **Composizione (time-shift):** $\Phi(t,s) \times \Phi(s,r) = \Phi(t,r)$

$$\text{Prova: } e^{A(t-s)} e^{A(s-r)} = e^{A(t-s+s-r)} = e^{A(t-r)}$$

- ☞ **Inversione:**

$$\text{Prova: } (e^{A(t-s)})^{-1} = e^{A(s-t)}$$

Nota: e^{-At} esiste sempre, anche se A è singolare



Autovalori e matrice esponenziale

☞ Come per i sistemi t-d, l'evoluzione libera può essere espressa in funzione di autovalori ($\lambda_1 \dots \lambda_n$) e autovettori ($\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n$)

☞ La relazione di similitudine $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ (con $\mathbf{\Lambda}$ matrice diagonale degli autovalori) vale anche per la matrice esponenziale

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1} \quad e^{\mathbf{\Lambda}t} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P} \quad \text{con} \quad \mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]$$

☞ Infatti sviluppando in serie e aggiungendo termini intermedi $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{I}$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \dots \quad e^{\mathbf{\Lambda}t} = \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}t + \frac{1}{2!}\mathbf{\Lambda}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{\Lambda}^3t^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P} &= \mathbf{P}^{-1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \dots\right)\mathbf{P} \\ &= \underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P}}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}_{\mathbf{\Lambda}}t + \frac{1}{2!}\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}_{\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}}t^2 + \frac{1}{3!}\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}_{\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}}t^3 + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}t + \frac{1}{2!}\mathbf{\Lambda}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{\Lambda}^3t^3 + \dots = e^{\mathbf{\Lambda}t} \end{aligned}$$

Determinazione degli autovalori della matrice A

👉 Gli autovalori di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si possono trovare in due modi:

👉 Diagonalizzando la matrice A :

$$A = P^{-1} \Lambda P$$

👉 Risolvendo l'equazione ottenuta eguagliando a zero il suo polinomio caratteristico:

$$\Delta_A(s) = \det(sI - A) = 0$$

👉 Essendo $\Delta_A(s)$ a coefficienti reali, le sue radici sono o reali o a coppie complesse coniugate

$$\Delta_A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0$$

Rappresentazioni canoniche per sistemi SISO

- ☞ In generale il sistema è definito da tre matrici
 $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^{n \times 1}$, $c \in R^{1 \times n}$
- ☞ Possono servire perciò fino a $n^2 + n + p$ coefficienti.
- ☞ *Domanda*: esiste una rappresentazione più “economica”?
- ☞ *Risposta*: sì, esistono forme, dette *canoniche*, che minimizzano il numero di coefficienti
- ☞ Sono *due* le forme canoniche di interesse
 1. Forma *canonica controllabile*
Utile per problemi di controllo = progettare un regolatore
 2. Forma *canonica di ricostruzione*
Utile per problemi di ricostruzione dello stato = progettare un osservatore

Forma canonica controllabile (cc)

👉 Nella matrice A i parametri si riducono agli elementi dell'ultima riga, mentre la matrice b ha struttura obbligata (1 nell'ultima riga)

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

👉 Essi sono collegati ai coefficienti del polinomio caratteristico, essendo gli stessi coefficienti con il segno cambiato

$$\Delta_{A_c}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0$$

👉 La matrice c_c non ha alcuna restrizione $c_c = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]$

Forma canonica osservabile (co)

- ☞ Nella matrice A i parametri si riducono agli elementi dell'ultima colonna, mentre la matrice b è libera

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_o \end{bmatrix} \quad b_o = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \dots \\ b_1 \\ b_o \end{bmatrix}$$

- ☞ Vale la stessa relazione fra coefficienti del polinomio caratteristico e coefficienti della matrice A_o

$$\Delta_{A_o}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_o$$

- ☞ La matrice c_o ha solo l'ultima componente pari ad 1

$$c_o = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

Relazione fra le due forme canoniche

☞ Per uno stesso sistema si può passare da una rappresentazione all'altra secondo le seguenti equivalenze

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_c^T \quad \mathbf{b}_o = \mathbf{c}_c^T \quad \mathbf{c}_o = \mathbf{b}_c^T$$

☞ Queste due realizzazioni di uno stesso sistema si dicono *duali*

☞ In ogni caso il polinomio caratteristico è lo stesso

$$\Delta_{\mathbf{A}_c}(s) = \Delta_{\mathbf{A}_o}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0$$

☞ Perciò gli autovalori sono gli stessi

⇒ Radici dell'equazione $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0$

Relazioni fra variabili di stato in forma cc

☞ Un sistema autonomo espresso in forma *canonica controllabile*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

☞ Scritto per componenti è

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

.....

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n$$

- Ciascuna variabile di stato è la derivata della successiva
- La derivata dell'ultima è la combinazione lineare di tutte le variabili

Calcolo degli autovalori in Matlab

☞ Data la matrice A si può trovare il polinomio caratteristico con il comando `poly`

☞ Es. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ `>> poly(A)`
`ans = 1.0000 1.1000 0.3000`

☞ Ottenendo i coefficienti di Δ_A per potenze decrescenti di s . In questo caso

$$\Delta_A(s) = s^2 + 1.1s + 0.3$$

☞ Gli autovalori si possono ottenere come radici di Δ_A mediante il comando `roots`, perciò

```
>> roots(poly(A))  
ans =  
-0.6000  
-0.5000
```

Calcolo degli autovettori in Matlab con eig

- 👉 Nel caso che interessi determinare anche gli autovettori, si può usare il comando `eig`, con la seguente sintassi
1. Se si usa senza assegnazione, e.g. `eig(A)` si ottengono gli autovalori
 2. Se si usa con assegnazione `[P,e]=eig(A)`, la matrice P contiene gli autovettori, mentre e è una matrice diagonale contenente gli autovalori

Gli autovettori sono ordinati come i corrispondenti autovalori, i.e. la prima colonna corrisponde al primo autovettore

La matrice P è la matrice di similitudine necessaria per le trasformazioni di similitudine

```
>> [P,e]=eig(A)
P =
    0.8944   -0.8575
   -0.4472    0.5145
e =
   -0.5000     0
     0   -0.6000
```

Calcolo pratico di e^{At}

- ☞ Se A è diagonalizzabile ed ha autovalori distinti $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- ☞ Per ottenere A in forma canonica controllabile, la matrice di similitudine $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ è composta da potenze degli autovettori disposti per colonne (matrice di Vandermonde)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

da cui si ricava \mathbf{P}^{-1}
e si applica
la similitudine per
ottenere A in forma cc

$$e^{At} = \mathbf{P} e^{\Lambda t} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

Esempio di calcolo pratico di e^{At}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -0.5 \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = -0.6 \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = P e^{At} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-0.5t} & 0 \\ 0 & e^{-0.6t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6e^{-0.5t} - 5e^{-0.6t} & 10e^{-0.5t} - 10e^{-0.6t} \\ -3e^{-0.5t} + 3e^{-0.6t} & -5e^{-0.5t} + 6e^{-0.6t} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Esponenziale di matrice } e^{At}$$

$$\text{se } \mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} 6e^{-0.5t} - 5e^{-0.6t} & 10e^{-0.5t} - 10e^{-0.6t} \\ -3e^{-0.5t} + 3e^{-0.6t} & -5e^{-0.5t} + 6e^{-0.6t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6e^{-0.5t} - 5e^{-0.6t} + 10e^{-0.5t} - 10e^{-0.6t} \\ -3e^{-0.5t} + 3e^{-0.6t} - 5e^{-0.5t} + 6e^{-0.6t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16e^{-0.5t} - 15e^{-0.6t} \\ -8e^{-0.5t} + 9e^{-0.6t} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Evoluzione dello} \\ \text{stato calcolato con} \\ \text{l'esponenziale di} \\ \text{matrice } e^{At} \end{array}$$

Autovalori multipli

☞ Se qualche autovalore ha molteplicità $k > 1$, ma ad esso corrispondono ancora autovettori distinti, la matrice diagonale è composta da **blocchi di Jordan**

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{con } \sum_{i=1}^m \text{rank}(\mathbf{J}_i) = n$$

☞ La matrice di transizione per ciascun sottoblocco \mathbf{J}_i corrispondente ad ogni autovalore λ_i di molteplicità $k > 1$ un sottoblocco \mathbf{J}_i del tipo con potenze crescenti di t

$$\mathbf{J}_i \rightarrow e^{\mathbf{J}_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \dots \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \dots \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}} \right\} k$$

Similarità nel caso di autovalori multipli

Se $A \in R^{n \times n}$ è in forma canonica controllabile ed ha un solo autovalore con molteplicità n , i.e. $\det(sI-A) = (s-\lambda)^n$, il corrispondente blocco di Jordan e la matrice di similitudine sono rispettivamente

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\ \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & 0\dots \\ \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & 0\dots \\ \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda & 1\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

La riga i -esima di \mathbf{P} è lo sviluppo polinomiale di $(\lambda + 1)^{i-1}$ $i = 1, 2, \dots, n$

A questo punto si applica la similitudine

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1}$$

Calcolo pratico di e^{At} nel caso di Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \det(sI - A) = s^2 - 2\lambda s + \lambda^2 = (s - \lambda)^2$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \times e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 - \lambda t & t \\ -\lambda^2 t & 1 + \lambda t \end{bmatrix}$$

$$\text{se } \mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_o = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 - \lambda t & t \\ -\lambda^2 t & 1 + \lambda t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 - \lambda t + t \\ 1 + \lambda t - \lambda^2 t \end{bmatrix}$$
$$= \begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t} (1 - \lambda t + t) \\ x_2(t) = e^{\lambda t} (1 - \lambda^2 t + \lambda t) \end{cases}$$

Evoluzione in funzione degli autovettori (1)

☞ Se la condizione iniziale coincide con un autovettore \mathbf{v}_i l'evoluzione dello stato nel tempo è controllata dal corrispondente autovalore λ_i

☞ Per definizione di autovettore \mathbf{v}_i è

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i \quad \rightarrow \quad A^k\mathbf{v}_i = \lambda_i^k\mathbf{v}_i$$

☞ L'evoluzione del sistema a partire dalla condizione iniziale \mathbf{v}_i si può esprimere attraverso lo sviluppo in serie dell'esponenziale di matrice

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(t) &= e^{At}\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i + A\mathbf{v}_i t + \frac{1}{2!}A^2\mathbf{v}_i t^2 + \frac{1}{3!}A^3\mathbf{v}_i t^3 + \dots \\ &= \mathbf{v}_i + \lambda_i\mathbf{v}_i t + \frac{1}{2!}\lambda_i^2\mathbf{v}_i t^2 + \frac{1}{3!}\lambda_i^3\mathbf{v}_i t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k t^k}{k!} \mathbf{v}_i = e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \end{aligned}$$

☞ Perciò lo stato evolve lungo l'autovettore \mathbf{v}_i , se questo coincide con la condizione iniziale, con dinamica data da λ_i

Evoluzione in funzione degli autovettori (2)

- ☞ Un generico vettore $\mathbf{x} \in R^n$ può essere espresso come combinazione degli autovettori (supposti distinti)

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i$$

- ☞ D'altra parte l'evoluzione dello stato lungo ciascun autovalore è data da

$$\mathbf{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \quad i = 1, \dots, n$$

- ☞ Perciò, sfruttando il principio della sovrapposizione degli effetti

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{x}_i = \beta_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \beta_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + \beta_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n \beta_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$$

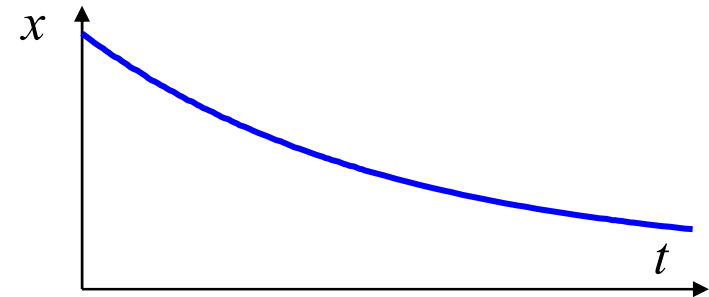
- ☞ **Conclusion:** l'evoluzione del sistema è esprimibile linearmente in termini di autovalori ed autovettori, con i β_i dipendenti dalle condizioni iniziali

Risposta in funzione degli autovalori semplici

☞ Autovalore reale negativo

$$\lambda = -\sigma \Rightarrow e^{\lambda t} = e^{-\sigma t}$$

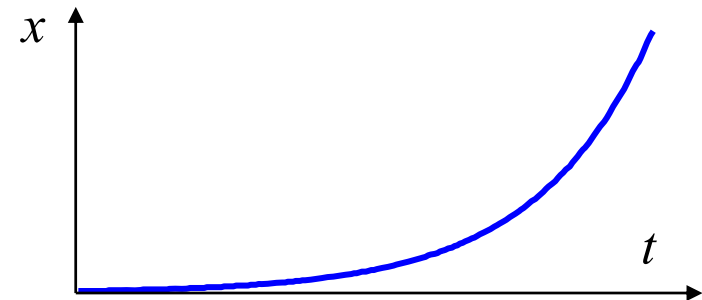
⇒ Termine decrescente esponenzialmente



☞ Autovalore reale positivo

$$\lambda = \sigma \Rightarrow e^{\lambda t} = e^{\sigma t}$$

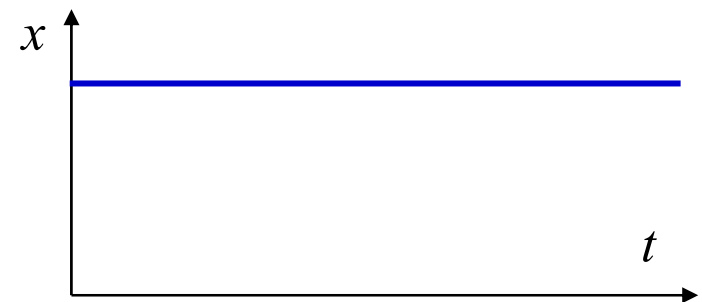
⇒ Termine crescente esponenzialmente



☞ Autovalore nullo

$$\lambda = 0 \Rightarrow e^{0t} = 1 = \text{costante}$$

⇒ Termine stabile semplicemente
(non esponenzialmente)



Risposta in funzione degli autovalori complessi coniugati

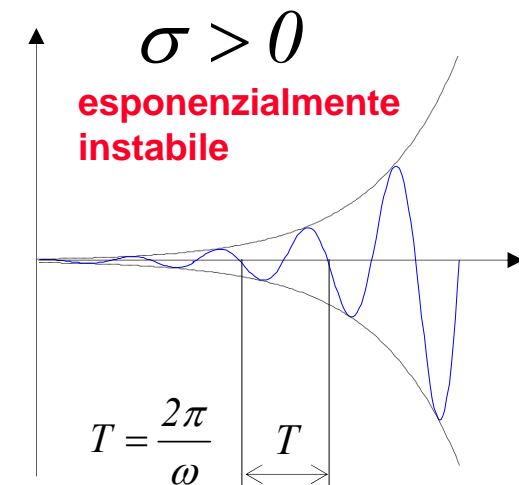
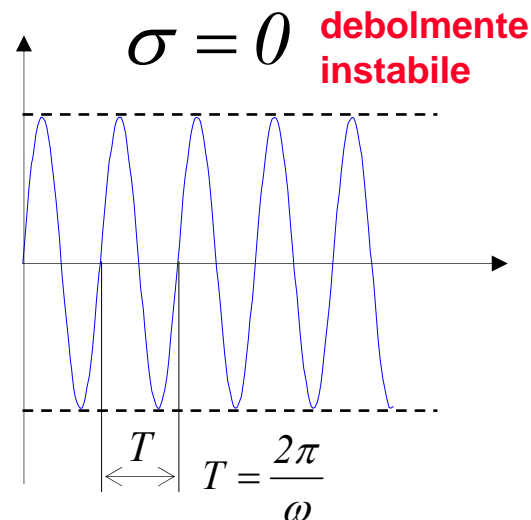
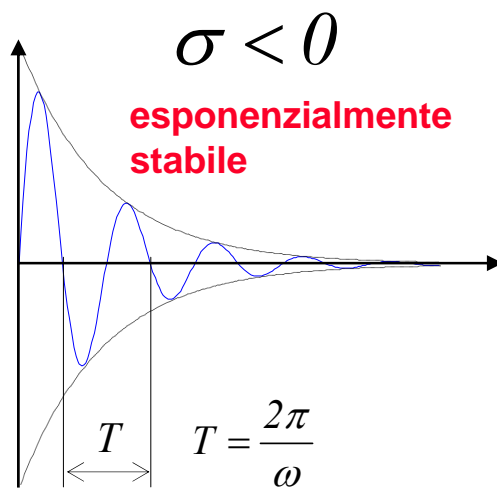
☞ Coppia semplice di autovalori complessi coniugati

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

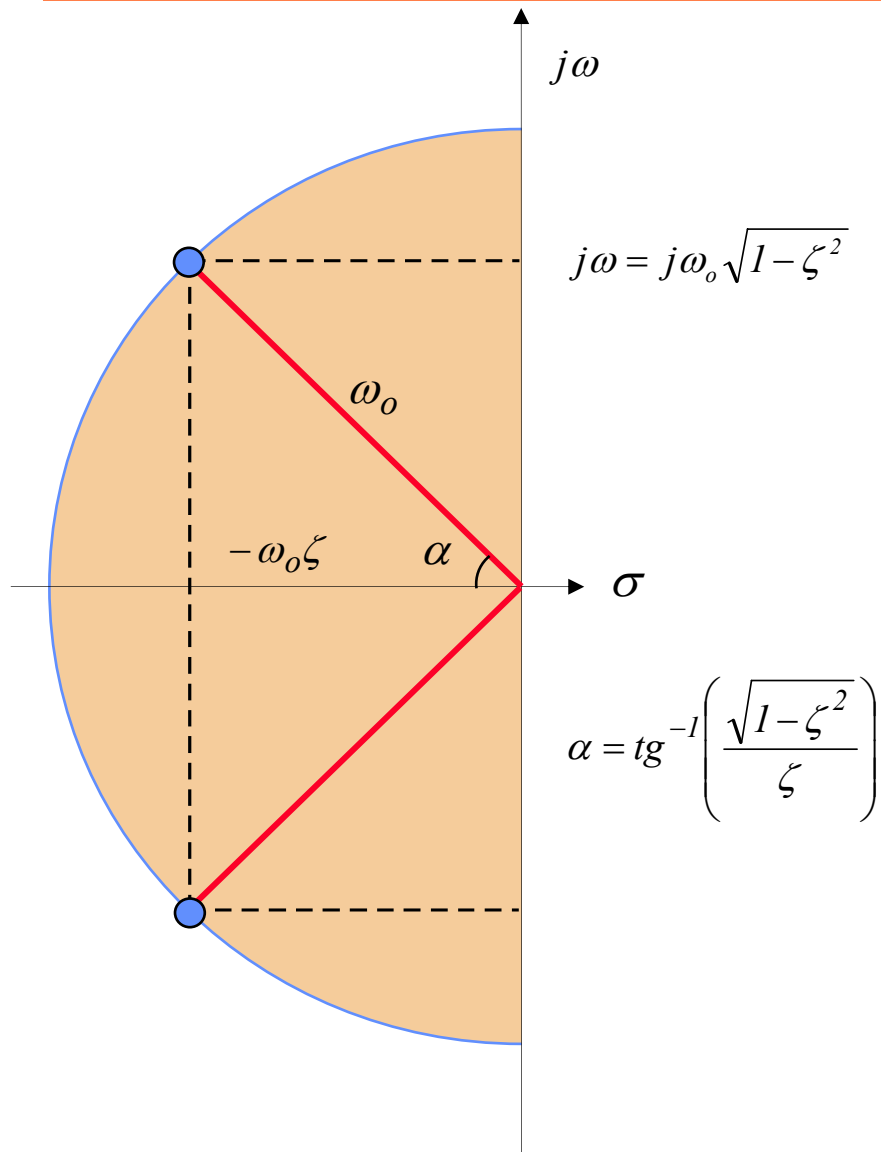
⇒ Termine oscillatorio con pulsazione ω e ampiezza decrescente ($\sigma < 0$), costante ($\sigma = 0$) o crescente ($\sigma > 0$)

$$\begin{aligned}x &= e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} = e^{\sigma t + j\omega t} + e^{\sigma t - j\omega t} \\ &= e^{\sigma t} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = e^{\sigma t} \cdot 2 \cos(\omega t)\end{aligned}$$

utilizzando le formule di trigonometria complessa.....



Autovalori complessi coniugati



Coppie di autovalori complessi coniugati possono essere espressi in funzione dello smorzamento ζ e frequenza naturale ω_0

Essi sono le radici del polinomio caratteristico seguente

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \underbrace{-\omega_0\zeta}_{Re(\lambda)} \pm \underbrace{j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}_{Im(\lambda)}$$

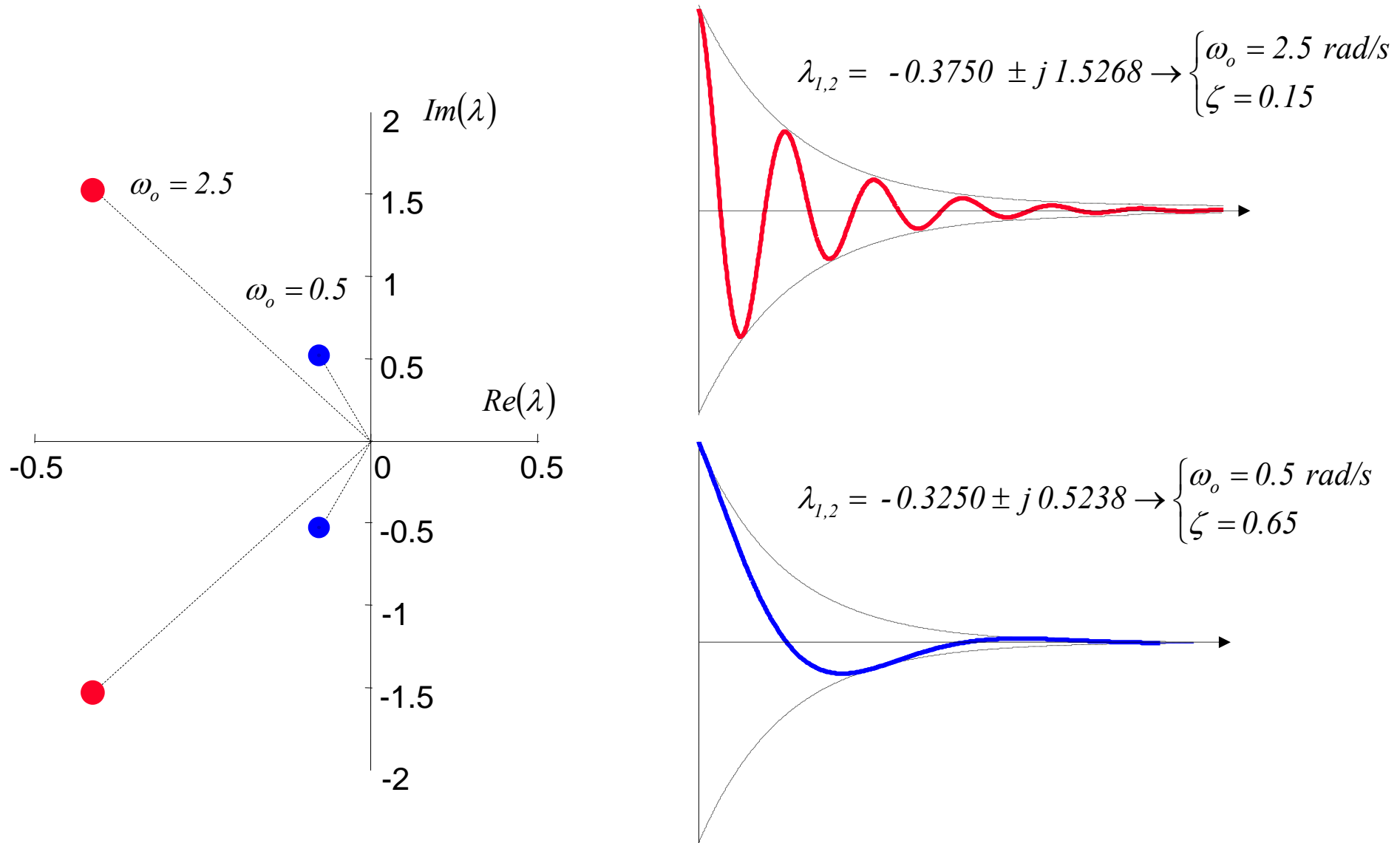
$$x = e^{Re(\lambda_1)t} \cdot e^{Im(\lambda_1)t} + e^{Re(\lambda_2)t} \cdot e^{Im(\lambda_2)t}$$

$$= e^{-\omega_0\zeta t} \cdot e^{j(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t} + e^{-\omega_0\zeta t} \cdot e^{-j(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t}$$

$$= e^{-\omega_0\zeta t} \cdot \left(e^{j(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t} + e^{-j(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t} \right)$$

$$= e^{-\omega_0\zeta t} \cdot 2 \cos\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t\right)$$

Risposte di autovalori complessi coniugati



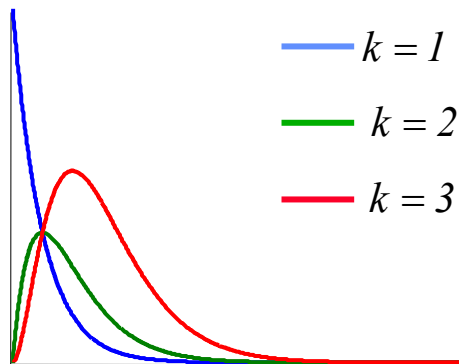
Risposta di autovalori multipli

$$x(t) = t^{k-1} e^{\lambda_i t} \quad k \geq 2$$

se $Re(\lambda_i) < 0$

Risposta
esponenzialmente
stabile

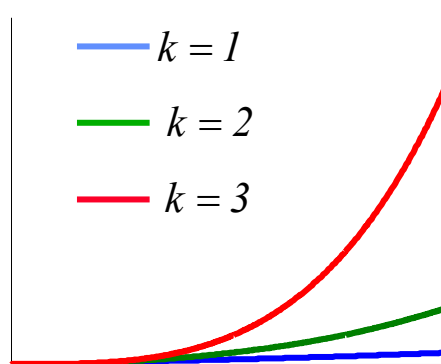
$$t^{k-1} e^{-\sigma t}$$



se $Re(\lambda_i) > 0$

Risposta
esponenzialmente
instabile

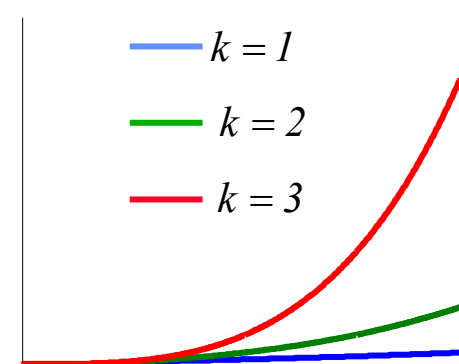
$$t^{k-1} e^{\sigma t}$$



se $Re(\lambda_i) = 0$

Risposta
semplicemente
instabile

$$t^{k-1} e^{0t} = t^{k-1}$$



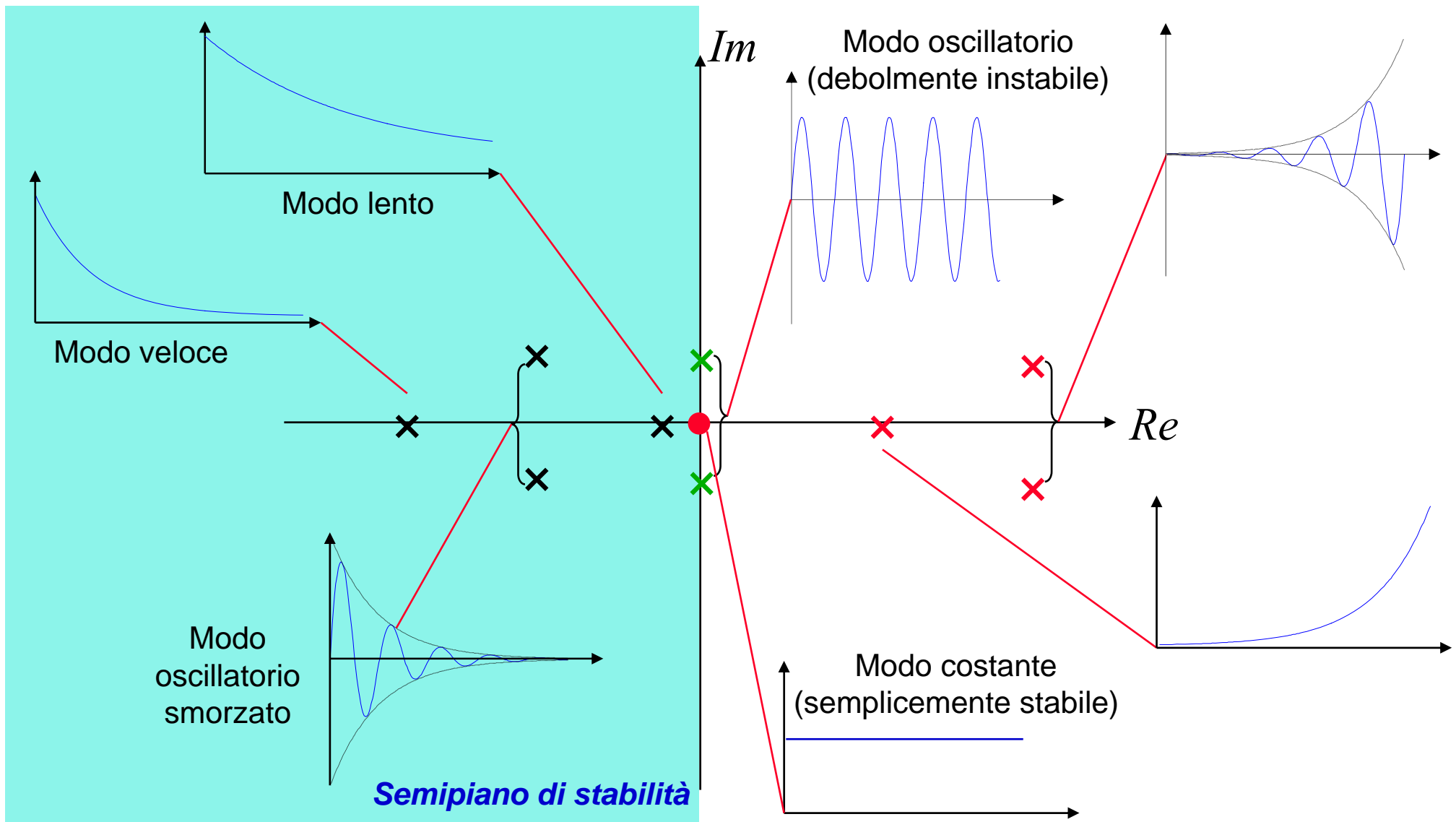
Stabilità e autovalori

- ➡ Ogni autovalore semplice $\text{Re}(\lambda) > 0$ produce un contributo $e^{\lambda t}$ *crescente*
- ➡ Ogni autovalore $\text{Re}(\lambda) < 0$ produce un contributo $e^{-\lambda t}$ *decrescente*
- ➡ Ogni autovalore di molteplicità $k \geq 2$ produce un termine $t^{k-1} e^{\pm \lambda t}$
- ➡ Generalizzando (λ può essere o reale o a coppie complesse coniugate)

$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$	<i>asintoticamente stabile</i>	$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$
$\text{Re}(\lambda_i) > 0 \quad \forall i$	<i>asintoticamente instabile</i>	$\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty$
$\text{Re}(\lambda_i) = 0$ radici semplici	<i>semplicemente stabile</i>	
$\text{Re}(\lambda_i) = 0$ almeno una radice multipla	<i>debolmente instabile</i>	

- ➡ Nei primi due casi il sistema si dice *asintoticamente* stabile o instabile perché ogni componente dello stato decresce o cresce per $t \rightarrow \infty$

Posizione degli autovalori e tipo di risposta



Inclusione degli ingressi

👉 Finora si sono considerati sistemi autonomi ($dx/dt = A x_t$)

👉 Se consideriamo il sistema completo, con ingressi esterni

$$dx/dt = A x + B u$$

👉 *Cosa cambia?*

👉 Cose che non cambiano:

➤ La **Stabilità**: è una proprietà interna

👉 Ciò non impedisce al sistema con ingressi di raggiungere uno stato illimitato se l'ingresso è illimitato...

👉 Cose che cambiano:

➤ La **risposta globale**: bisogna includere il contributo degli ingressi

➤ L'**equilibrio**: dipende dal valore degli ingressi

👉 Ha senso solo per ingressi stazionari

Evoluzione di un sistema forzato (con ingressi)

- ☞ Introducendo nuovamente il termine forzante $u(t)$ attraverso la matrice ingresso \rightarrow stato \mathbf{b} , l'evoluzione del sistema (*rappresentazione globale*) è data da

$$\mathbf{x} = e^{At} \mathbf{x}_o + \int_0^t e^{A(t-\sigma)} \mathbf{b}u(\sigma) d\sigma$$

Evoluzione libera
esprime l'influenza dalla
condizione iniziale \mathbf{x}_o

Integrale di convoluzione
esprime il modo
in cui l'ingresso $u(t)$
influenza l'evoluzione
dello stato

Come trattare l'integrale di convoluzione

- ☞ L'integrale è importante perché esprime il legame formale con cui l'ingresso $u(t)$ entra nell'evoluzione dello stato
- ☞ E' risolvibile in pratica solo nei casi in cui $u(t)$ ha una forma elementare, ad es. *ingresso costante* $u = u_0$

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{A(t-\sigma)} \mathbf{b} u_0 d\sigma &= \int_0^t e^{At} e^{-A\sigma} \mathbf{b} u_0 d\sigma = e^{At} \int_0^t e^{-A\sigma} \mathbf{b} u_0 d\sigma \\ &= e^{At} \int_0^t \left(\mathbf{I} - A\sigma + \frac{A^2 \sigma^2}{2!} - \frac{A^3 \sigma^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{b} u_0 d\sigma \\ &= e^{At} \left(\int_0^t \mathbf{I} d\sigma - \int_0^t A\sigma d\sigma + \int_0^t \frac{A^2 \sigma^2}{2!} d\sigma - \int_0^t \frac{A^3 \sigma^3}{3!} d\sigma + \dots \right) \mathbf{b} u_0 \\ &= e^{At} \left(\mathbf{I} - \frac{A}{2!} t + \frac{A^2}{3!} t^2 - \frac{A^3}{4!} t^3 \right) \mathbf{b} u_0 t\end{aligned}$$

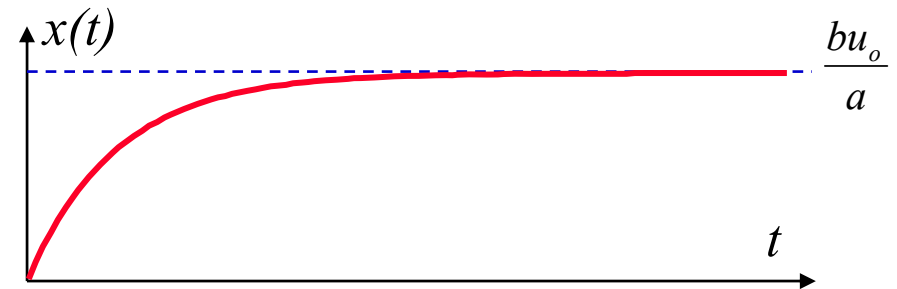
Ingresso costante nel caso scalare

Supposto $A = -a$ e b scalare, oltre a condizioni iniziali nulle $x_0 = 0$

$$\dot{x} = -ax + bu_0$$

$$x(t) = \int_0^t e^{-a(t-\sigma)} bu_0 d\sigma = e^{-at} bu_0 \int_0^t e^{a\sigma} d\sigma$$

$$= e^{-at} bu_0 \left. \frac{e^{a\sigma}}{a} \right|_0^t$$



$$= e^{-at} bu_0 \left(\frac{e^{at} - 1}{a} \right) = bu_0 \left(\frac{1 - e^{-at}}{a} \right)$$

Ingresso impulsivo

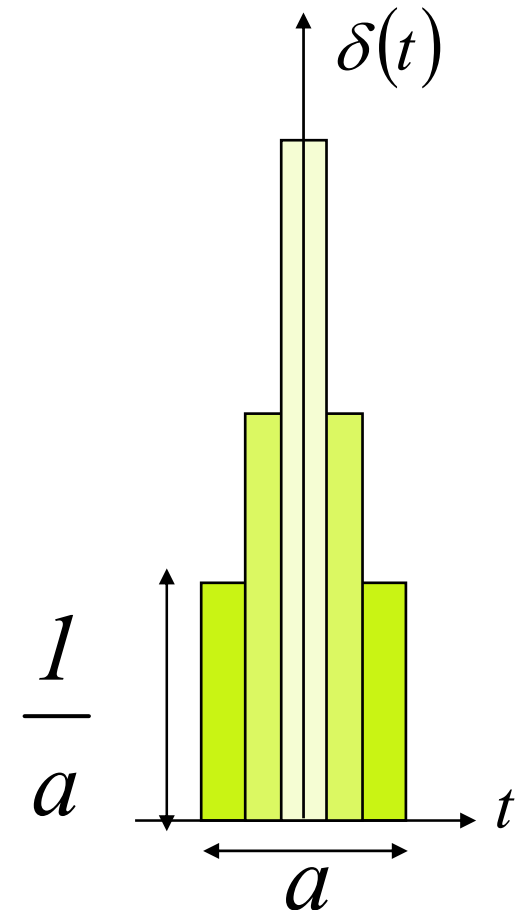
- ☞ Si suppone di applicare un impulso $\delta(t)$ all'istante $t = 0$
- ☞ Esso è un ingresso “ideale” (*Delta di Dirac*) con le seguenti proprietà:

i) $\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$

ii) $\delta(0) = \infty$

iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^{0+} \delta(t) dt = 1$

- ☞ L'impulso può essere visto come limite di una *distribuzione* di segnali di durata 'a' ed ampiezza '1/a'.
- ☞ Quando $a \rightarrow 0$ l'ampiezza $\rightarrow \infty$ ma l'area rimane pari ad 1



Integrale di convoluzione con ingresso $\delta(t)$

- ☞ Supposte condizioni iniziali nulle, se l'ingresso è un impulso $\delta(t)$, la funzione integranda è diversa da zero solo per $t = 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \int_0^t e^{A(t-\sigma)} \mathbf{b} \delta(\sigma) d\sigma = e^{At} \mathbf{b} \int_0^{0+} e^{-A\sigma} \delta(\sigma) d\sigma \\ &= e^{At} \mathbf{b} \int_0^{0+} \delta(\sigma) d\sigma = e^{At} \mathbf{b}\end{aligned}$$

- ☞ Perciò se si considera una condizione iniziale nulla ($\mathbf{x}_o = \mathbf{0}$) l'evoluzione dovuta ad un ingresso impulsivo è

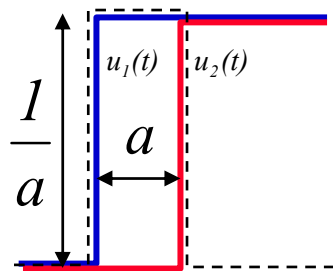
$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad y(t) = \mathbf{c} e^{At} \mathbf{b}$$

- ☞ Perciò l'effetto dell'impulso è quello di trasformarlo in un sistema *ad evoluzione libera* con condizioni iniziali uguali a \mathbf{b}

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{b}$$

Confronto fra realizzazioni di $\delta(t)$

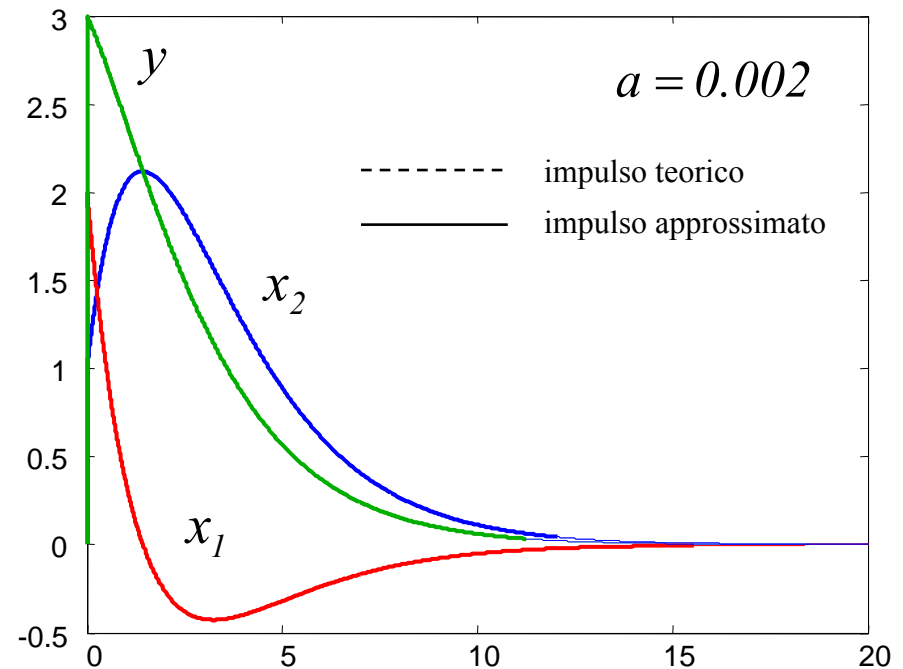
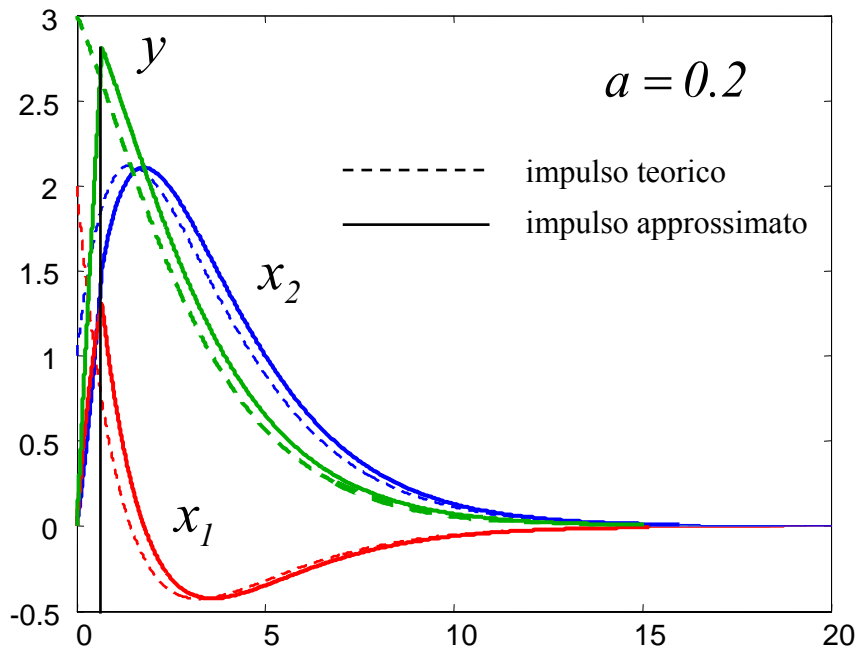
$u_1(t) - u_2(t) = \delta(t)$



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}\delta(t) \\ y = \mathbf{c}\mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{x}_o = \mathbf{0} \quad \cong \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ y = \mathbf{c}\mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{x}_o = \mathbf{b}$$

Approssimazione come
differenza di gradini con $a \rightarrow 0$

Approccio esatto,
cambiando le condizioni iniziali $\mathbf{x}_o = \mathbf{b}$



Risposta impulsiva dall'uscita

☞ Se si considera l'uscita y del sistema con condizioni iniziali nulle

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \delta(t) \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{x}_o = \mathbf{0}$$

☞ applicando la definizione precedente di risposta impulsiva all'uscita

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathbf{c} e^{At} \mathbf{b} = g(t)$$

☞ Perciò la risposta del sistema a un ingresso qualsiasi può essere vista come convoluzione fra l'ingresso $u(t)$ e la risposta impulsiva $g(t)$

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{c} e^{A(t-\sigma)} \mathbf{b} u(\sigma) d\sigma = \int_0^t g(t-\sigma) u(\sigma) d\sigma$$

☞ Anche per sistemi nonlineari è possibile definire una risposta impulsiva $g(t)$, ovviamente non più in termini delle matrici di sistema.

Equilibrio di sistemi t-c con ingresso

- ☞ L'equilibrio dipende dal valore dell'ingresso (costante) attraverso \mathbf{b}
- ☞ La stabilità dipende ancora dagli autovalori di \mathbf{A}
- ☞ Diversamente dai sistemi autonomi, si possono avere equilibri non nulli
- ☞ Se al sistema, supposto stabile, viene applicato un ingresso costante $\bar{\mathbf{u}}$ lo stato si porterà al valore $\bar{\mathbf{x}}$ e la coppia $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ dovrà soddisfare l'equazione

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\bar{\mathbf{u}}$$

- ☞ Da cui noto l'ingresso di equilibrio si può ricavare lo stato di equilibrio

$$\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\bar{\mathbf{u}}$$

Esempio di equilibrio con ingresso

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -0.5$$

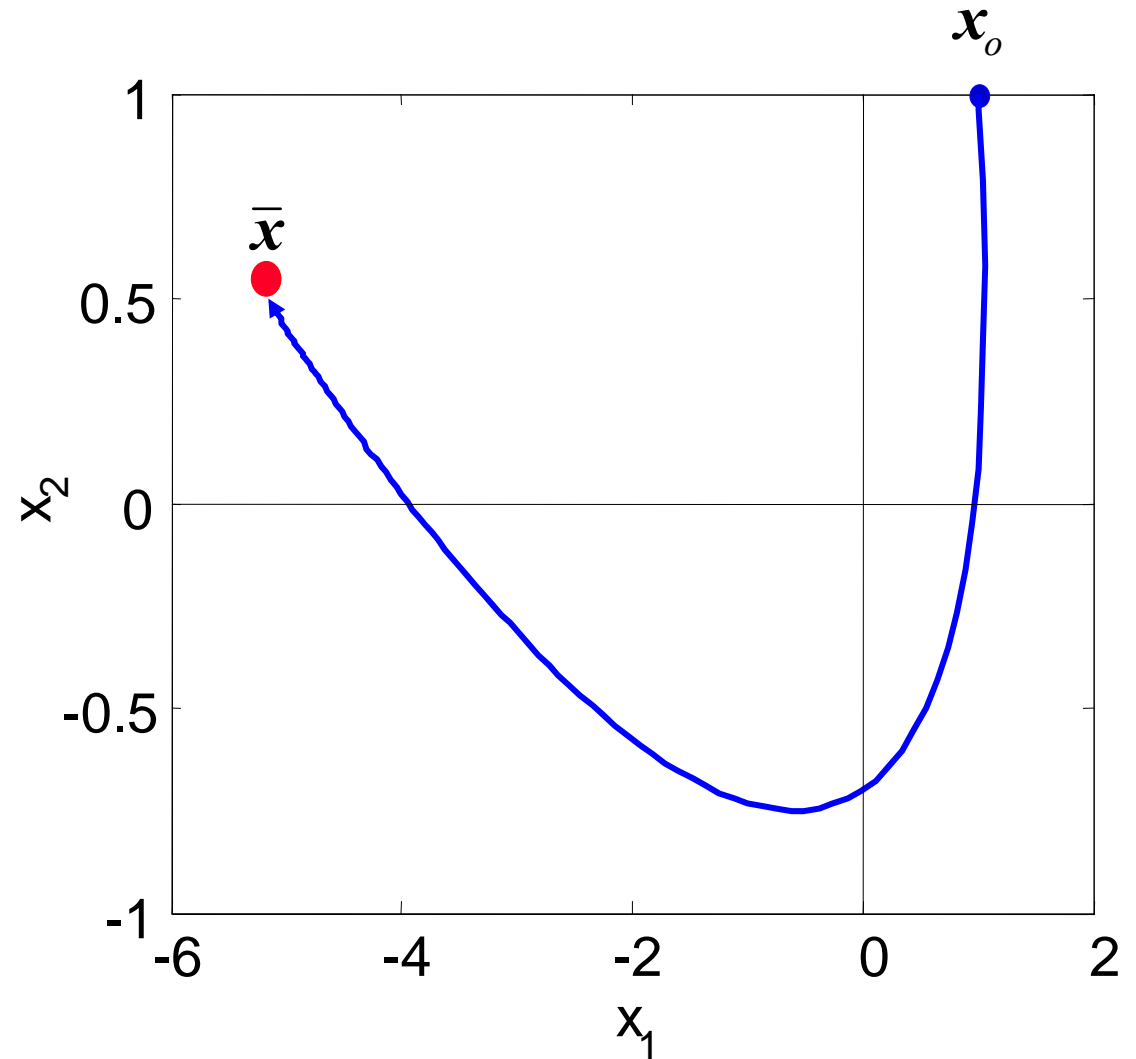
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3.6667 & -3.3333 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = -0.6$$

$$\bar{\mathbf{x}} = -A^{-1}\mathbf{b}u$$

$$= -\begin{bmatrix} -3.6667 & -3.3333 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times (-0.5)$$

$$= \begin{bmatrix} -5.1667 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_o = [1 \quad 1]^T$$



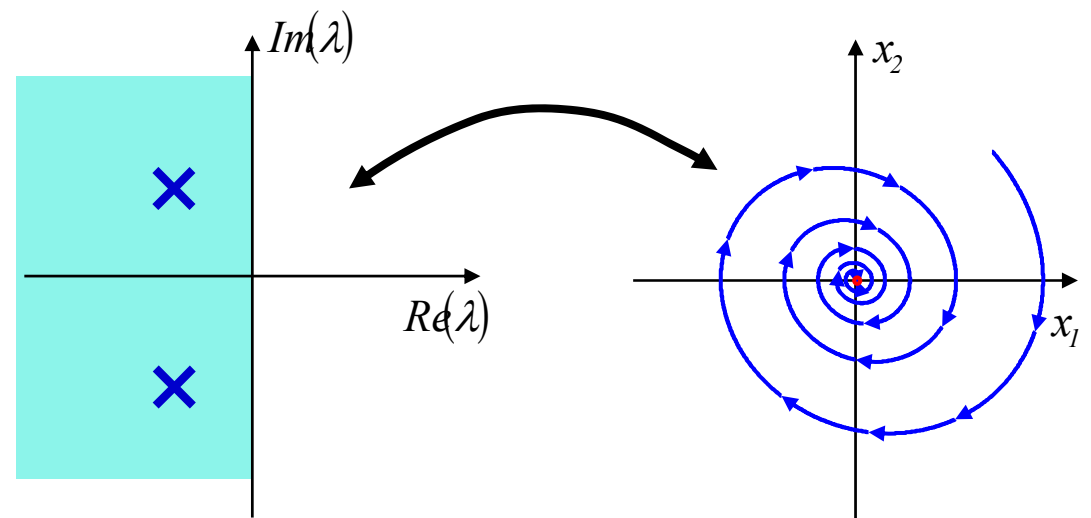
Sistemi di ordine 2

➡ Per un sistema autonomo di ordine 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

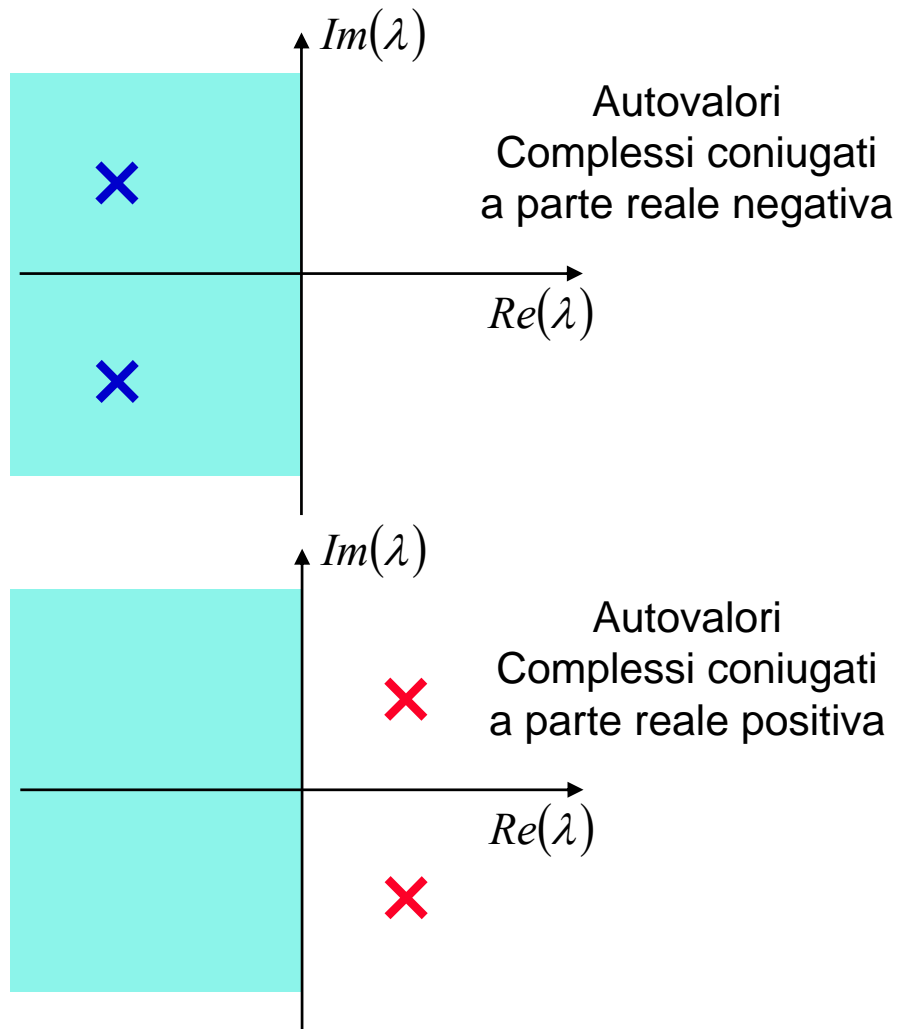
si possono introdurre dei semplici strumenti di analisi grafica

➡ Il *piano di fase* è individuato dalle due componenti dello stato e si possono visualizzare i comportamenti nel tempo del sistema e metterli in relazione alla posizione degli autovalori nel piano complesso s

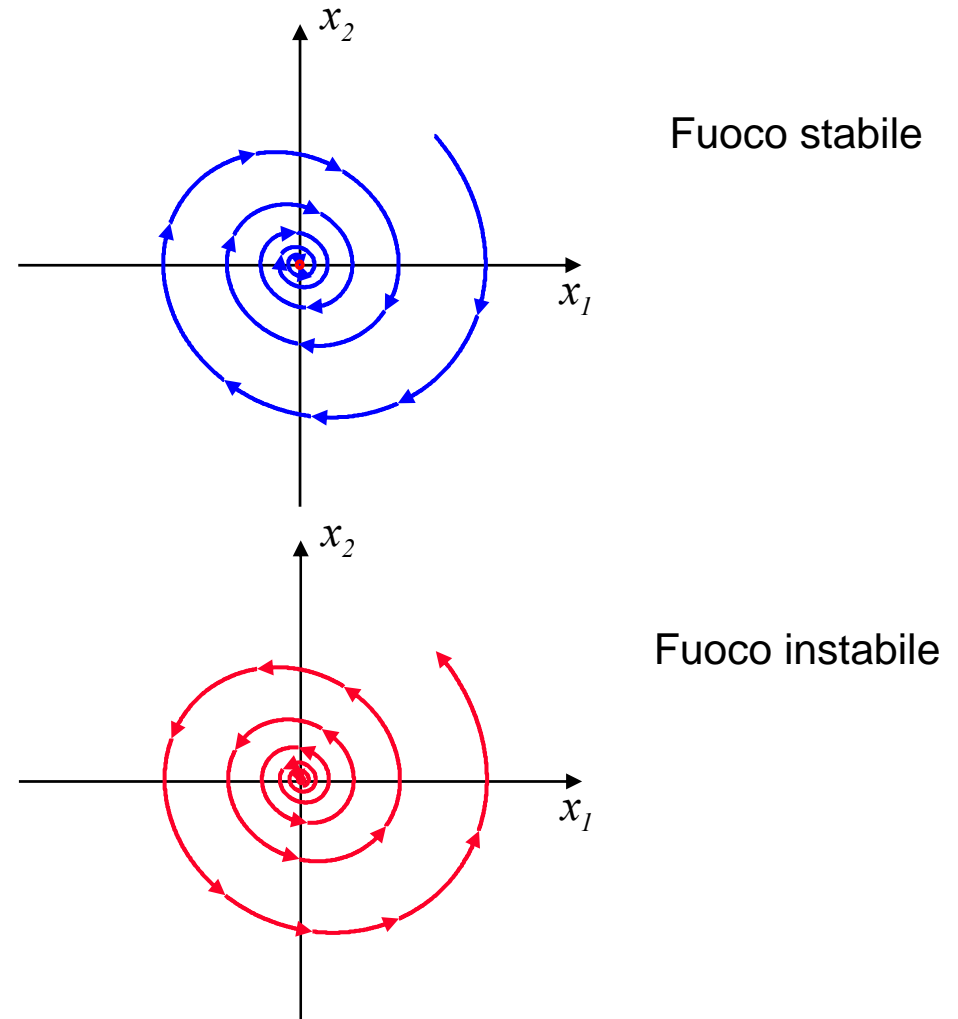


Classificazione degli equilibri per sistemi di ordine 2

Posizione autovalori

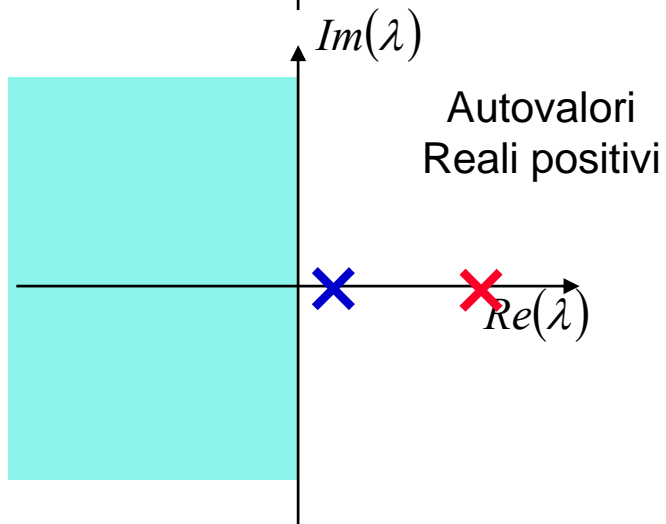
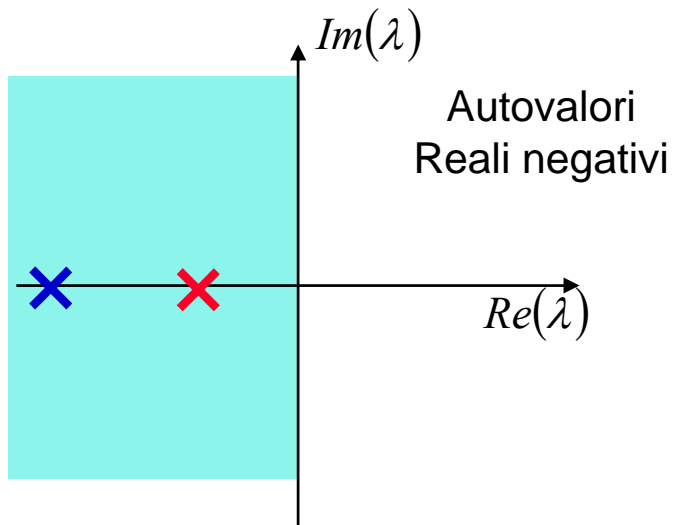


Piano di fase

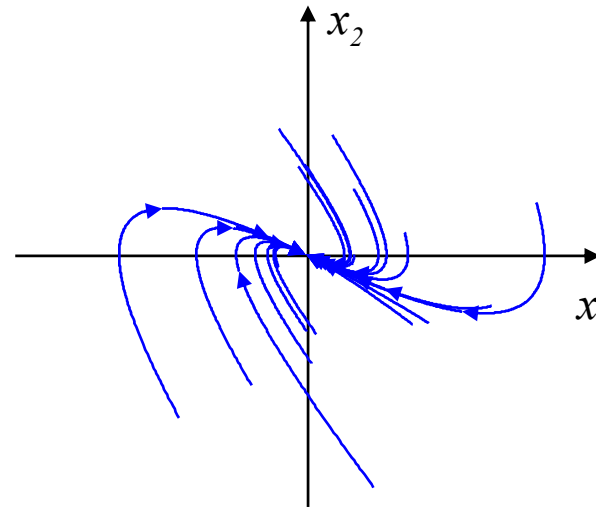


Classificazione degli equilibri per sistemi di ordine 2

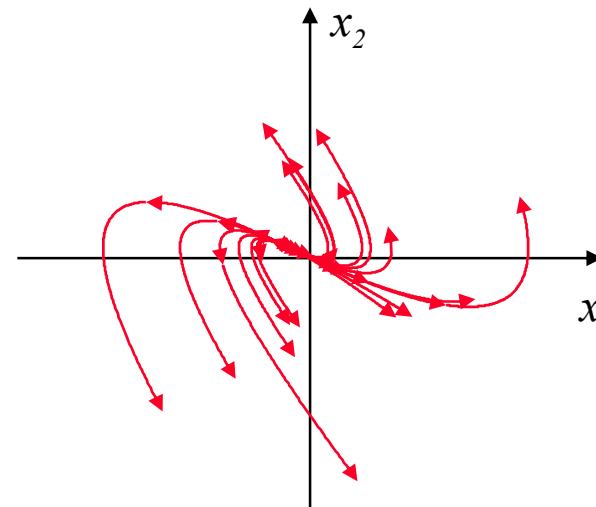
Posizione autovalori



Piano di fase



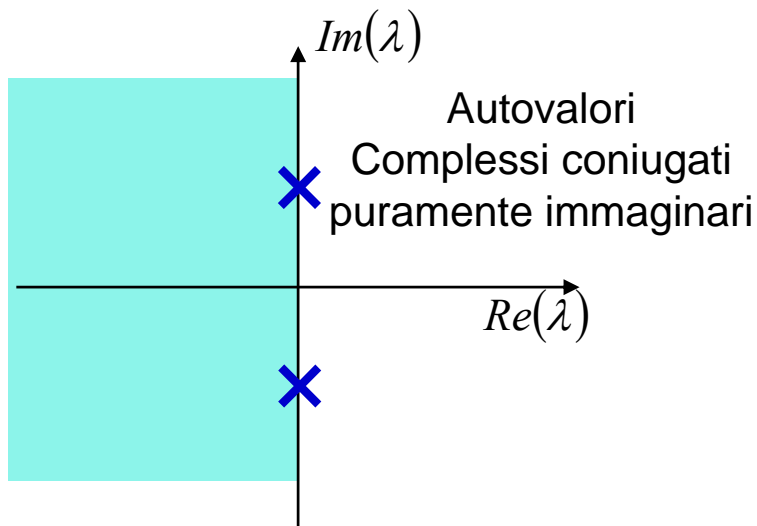
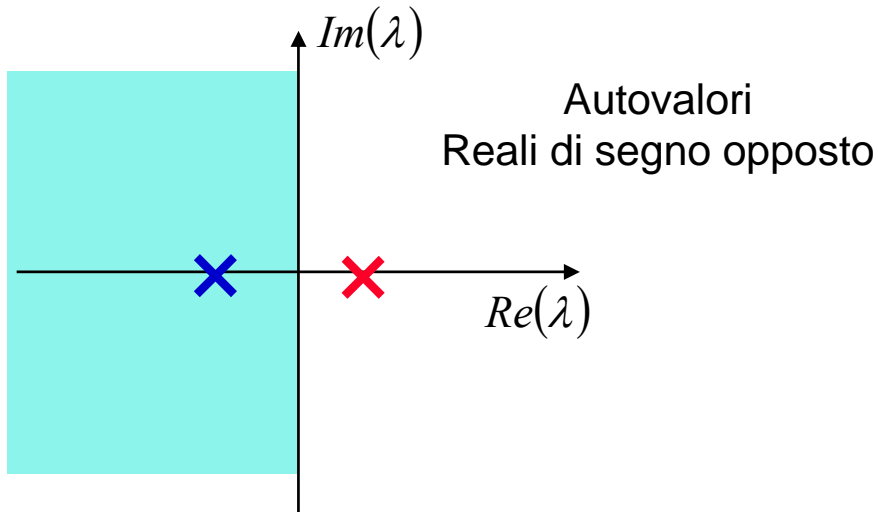
**Nodo
asintoticamente
stabile**
tutte le traiettorie
tendono all'origine
(unico punto stabile)



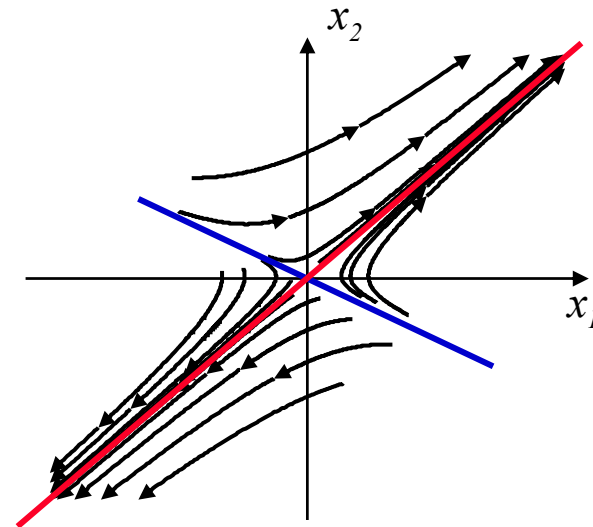
**Nodo
asintoticamente
instabile**
tutte le traiettorie
tendono all'infinito

Classificazione degli equilibri per sistemi di ordine 2

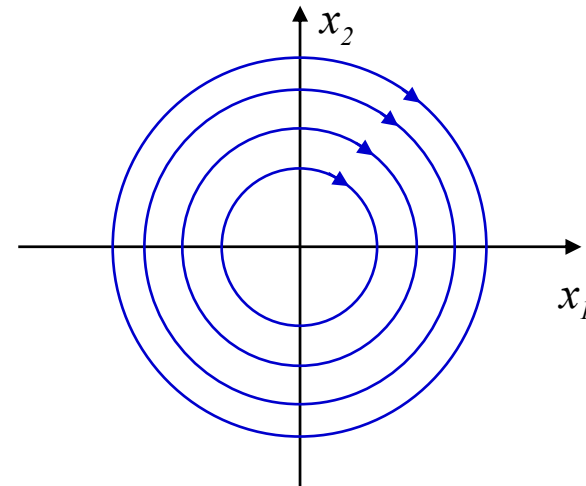
Posizione autovalori



Piano di fase



Sella (instabile)
Le traiettorie risentono solo inizialmente dell'autovettore stabile, ma vengono poi attratte da quello instabile



Centro
(debolmente instabile):
traiettorie chiuse la cui distanza dall'origine dipende dalle condizioni iniziali

Test di stabilità per sistemi 2x2

👉 Il polinomio caratteristico per sistemi di ordine 2

$$\Delta_A(s) = \det \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & 0 \\ 0 & s - \lambda_2 \end{bmatrix} = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$$

👉 Per la regola dei segni di Cartesio, ambedue le radici λ_1 e λ_2 sono a parte reale *negativa* se si hanno due mantenimenti di segno, cioè se

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) > 0 \quad \& \quad \lambda_1\lambda_2 > 0$$

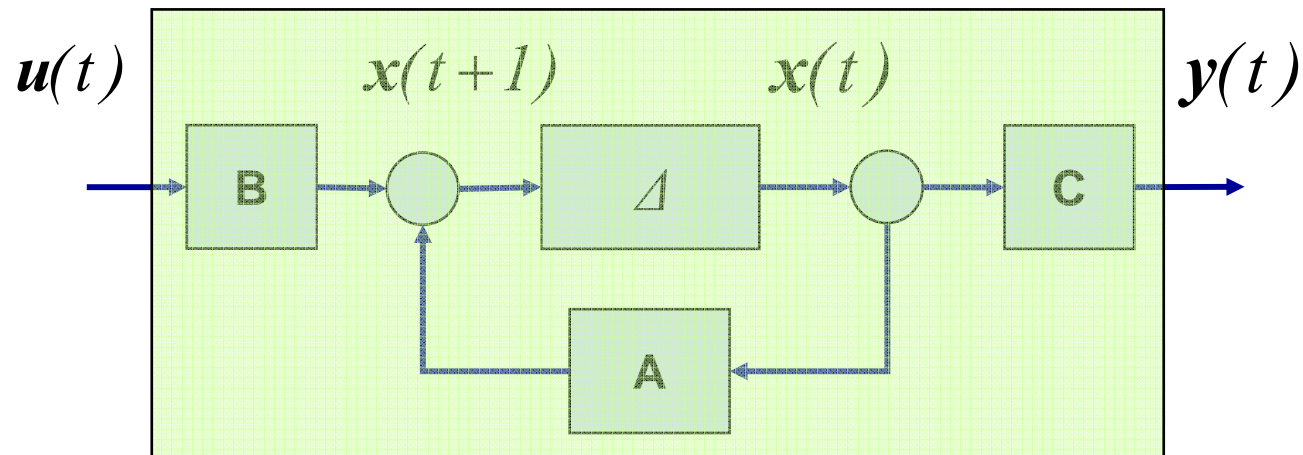
👉 Riconducibili alla matrice A (similare alla diagonale Λ) come

$$\text{tr}A = (\lambda_1 + \lambda_2) \quad \& \quad \det A = \lambda_1\lambda_2$$

👉 Perciò le condizioni di stabilità di un sistema del secondo ordine sono

$$\boxed{\text{tr}A < 0 \quad \& \quad \det A > 0}$$

Rappresentazione esterna



- 👉 **Rappresentazione che lega direttamente gli ingressi alle uscite**
- 👉 Si perde la nozione di *stato* del sistema, come memoria del sistema
- 👉 Per mantenere la dinamica si devono *ricordare* un maggior numero di ingressi ed uscite passate
- 👉 Nel caso tempo continuo la rappresentazione ingresso-uscita si dice **funzione di trasferimento**

Passaggio da rappresentazione interna ad esterna

☞ Dato un sistema SISO in forma di stato (interna)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \\ y = \mathbf{c} \mathbf{x} \end{cases}$$

☞ Introducendo l'operatore derivata s : $s \mathbf{x} = d\mathbf{x}/dt$ si può esprimere l'evoluzione dello stato come

$$s\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b} u \rightarrow \mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} u$$

☞ Introducendo l'uscita $y = \mathbf{c} \mathbf{x}$, si può ricavare un legame diretto ingresso-uscita

$$y = \mathbf{c} \mathbf{x} = \mathbf{c} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} u$$

☞ Questa relazione coinvolge ingressi ed uscite passate a causa della matrice polinomiale

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{P}(s)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{\mathbf{P}(s)}{\Delta_A(s)}$$

Formula di Souriau per il calcolo di $(sI-A)^{-1}$

☞ Si consideri che

- ☞ Il denominatore è, per definizione, il polinomio caratteristico di A , $\Delta_A(s)$
- ☞ Il numeratore è un polinomio di ordine $n-1$ (se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$$(sI - A)^{-1} = \frac{P(s)}{\Delta_A(s)} \quad \begin{cases} P(s) = P_1 s^{n-1} + P_2 s^{n-2} + \dots + P_n \\ \Delta_A(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \end{cases}$$

☞ Schema iterativo per il calcolo simultaneo del numeratore e del denominatore

$P_1 = I$	$\alpha_1 = -tr(P_1 A)$
$P_2 = P_1 A + \alpha_1 I$	$\alpha_2 = -\frac{1}{2} tr(P_2 A)$
$P_3 = P_2 A + \alpha_2 I$	$\alpha_3 = -\frac{1}{3} tr(P_3 A)$
....
$P_n = P_{n-1} A + \alpha_{n-1} I$	$\alpha_n = -\frac{1}{n} tr(P_n A)$

Rappresentazione esterna

- ☞ La rappresentazione esterna (ingresso-uscita) può essere allora scritta come *funzione di trasferimento* (quoziente fra polinomi)

$$y(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} u(s)$$

$$y(s) = \mathbf{c} \frac{\mathbf{P}(s)}{\Delta_A(s)} \mathbf{b} u(s) \rightarrow y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} u(s)$$

- ☞ Con $y(s)$ e $u(s)$ trasformate di Laplace dell'ingresso e dell'uscita rispettivamente
- ☞ Vantaggi di usare la trasformata di Laplace
- ⇒ Il sistema di equazioni differenziali si trasforma in sistema algebrico (in s)
 - ⇒ Data la natura di frequenza complessa di $s = \sigma \pm j\omega$, si possono studiare facilmente le caratteristiche in frequenza del sistema