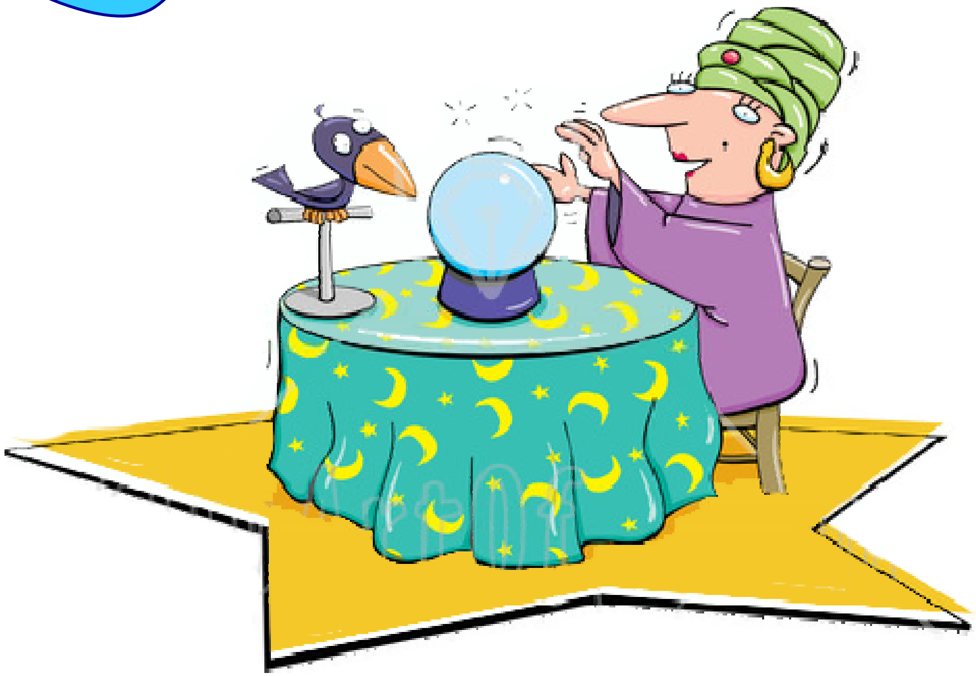
Predittori Bayesiani



Cos'è un predittore Bayesiano?

- Modello statistico per stimare la probabilità di un evento futuro sulla base del verificarsi di alcune condizioni passate ***(imparare dall'esperienza)***

DATI GLI EVENTI ANTECEDENTI		ACCADE IL CONSEGUENTE
$\{A_{1,}\ A_2, \ldots, A_n\}$	$\Rightarrow$	C

- Campo di applicazione:
  - Dati qualitativi (definiti in termini generici, es. alto, basso, poco, molto, caldo, freddo, etc.)
  - Dati quantitativi (definiti in forma numerica)
- Ipotesi di base:
  - Gli antecedenti sono *incorrelati* (l'accadimento di ciascuno è indipendente dagli altri)
  - E' preferibile che un certo evento conseguente C non avvenga mai per una data combinazione di *tutte* le classi degli antecedenti (questa ipotesi verrà poi rilassata).

Teoria di Bayes della probabilità

- Il reverendo Thomas Bayes, 1702-1761, un teologo e matematico britannico elaborò una teoria delle probabilità che prese poi da lui il nome di ***Teorema di Bayes***.

- L'essenza di questa teoria è la possibilità di calcolare la probabilità di un evento condizionatamente al verificarsi di un altro evento.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \times P(B)}{P(A)}$$

- Esempio:
  - A Londra in inverno piove il 50% del tempo ed è nuvoloso 80% del tempo
  - A volte è nuvoloso ma non piove, ma se piove è certamente nuvoloso
  - Domanda: quale è la probabilità che piova se è nuvoloso?
  - Applicando il Teor. di Bayes

$$P(p) = 0.5$$
$$P(n) = 0.8$$

$$P(p \mid n) = \frac{P(p) \times P(n \mid p)}{P(n)}$$
$$= \frac{0.5 \times 1.0}{0.8} = \frac{5}{8} = 62.5\%$$

Stima condizionata di un evento

- Sulla base dell'esperienza si possono definire delle condizioni di accadimento

$$IF\ \{antecedenti\}\ THEN\ \{conseguente\}$$

- Gli oggetti in parentesi sono da intendersi come *probabilità* che l'evento accada

$$\{antecedente\} = Pr(antecedente)$$
$$\{conseguente\} = Pr(conseguente | antecedente)$$

- Il primo termine rappresenta la probabilità *incondizionata* che si verifichi la condizione antecedente

- Il secondo rappresenta la probabilità che si verifichi il conseguente, *condizionatamente al verificarsi dell'antecedente*.

Come realizzare uno stimatore Bayesiano

- ***Cosa serve:*** una tabella che elenca le varie combinazioni osservate degli antecedenti *A* ed il corrispondente evento conseguente *C*. Questo insieme di dati sperimentali è detto *Training Set* e serve per allenare lo stimatore

- ***Cosa si ottiene:*** lo stimatore produce una stima della possibilità di accadimento del conseguente *C**, data una nuova combinazione di antecedenti {*A**} non contenuto nel *Training Set*

- ***La base è il Teorema di Bayes sulla probabilità condizionata:*** data un'ipotesi (il conseguente *C*) e un'evidenza sperimentale da cui dipende (gli antecedenti *A*), la probabilità che si verifichi l'evento *C* condizionato da *A* è data da

$$\boxed{\Pr[C|A] = \frac{\Pr[A|C] \times \Pr[C]}{\Pr[A]}}$$

Elementi del Teorema di Bayes

$$\Pr[C|A] = \frac{\Pr[A|C] \times \Pr[C]}{\Pr[A]}$$

- **Pr[A|C*]** è la combinazione delle probabilità che gli antecedenti assumano valori per i quali il conseguente assume il valore atteso (C*), così come risulta dal *Training Set*
- L'ipotesi di *indipendenza degli antecedenti è cruciale*, perché solo in tal caso la combinazione delle probabilità è data dal prodotto delle probabilità individuali dei vari antecedenti

$$\boxed{\Pr[A|C^*] = \Pr[A_1|C^*] \times \Pr[A_2|C^*] \times \ldots. \times \Pr[A_n|C^*]}$$

- *Nota:* in pratica, le probabilità si stimano con le frequenze relative di accadimento ricavate dal *Training Set.*

Elementi del Teorema di Bayes

$$\Pr[C|A] = \frac{\Pr[A|C] \times \Pr[C]}{\Pr[A]}$$

- **Pr[C]** è la probabilità totale che l'evento C* si verifichi, così come risulta dal *Training Set*, *indipendentemente* dai valori degli antecedenti. Anche questo di ricava dal *training Set* come rapporto fra i casi in cui si verifica C* rispetto a tutti i casi

$$\Pr[C^*] = \frac{\sum C^*}{\sum C}$$

- **Pr[A]** è la probabilità totale che si verifichino gli antecedenti. Non è importante, perché viene poi eliminato nel calcolo delle probabilità relative.

Possibile problema

- Può darsi che un certo evento C* non sia mai associato ad un certo antecedente A_k, cioè $\Pr[A_k|C^*]=0$.
- Dato che il numeratore del Teor. di Bayes è composto dal prodotto di tutte le probabilità antecedenti, Pr[A|C*] si annullerebbe
- ***Possibili rimedi:***
  - Verificare il training set per rimuovere situazioni di questo tipo in quanto poco rappresentative
  - Sommare ad ogni probabilità degli antecedenti un numero arbitrario, ad es. 1, per evitare gli zeri. Per bilanciare, al denominatore si somma un'eguale quantità globale

$$\Pr[A|C^*] = \frac{\left(1+\Pr[A_1|C^*]\right)\times\left(1+\Pr[A_2|C^*]\right)\times\ldots\times\left(1+\Pr[A_n|C^*]\right)}{n}$$

  - In ogni caso questa modifica è consigliabile per irrobustire l'algoritmo.

Stima Bayesiana su dati qualitativi

- Il *Training Set* si compone di un certo numero di *osservazioni* di antecedenti e per ciascuna combinazione di essi, il valore *osservato* del conseguente
- Ogni riga del *Training Set* rappresenta un'*istanza* del processo da stimare: ***Mostra quale evento C si è verificato per una data combinazione di antecedenti***
- Perciò ogni istanza può essere vista come implicazione logica del tipo

$$IF \;\; A_1 = \alpha_1 \;\; AND \;\; A_2 = \alpha_2 \;\; AND .... IF \;\; A_n = \alpha_n \;\; THEN \;\; C = \gamma$$

- L'implicazione IF – THEN va intesa in senso probabilistico: la probabilità di accadimento degli antecedenti condiziona la probabilità dell'evento conseguente.

$$\Pr[\mathrm{A}_1 = \alpha_1] \times \Pr[\mathrm{A}_2 = \alpha_2] \times \ldots \times \Pr[\mathrm{A}_n = \alpha_n] \Rightarrow \Pr[\mathrm{C} = \gamma]$$

Esempio: Gioco o non gioco?

	Antecedents				Consequent
instances	**outlook**	**temp.**	**humidity**	**windy**	**play**
1	sunny	hot	high	false	no
2	sunny	hot	high	true	no
3	overcast	hot	high	false	yes
4	rainy	mild	high	false	yes
5	rainy	cool	normal	false	yes
6	rainy	cool	normal	true	no
7	overcast	cool	normal	true	yes
8	sunny	mild	high	false	no
9	sunny	cool	normal	false	yes
10	rainy	mild	normal	false	yes
11	sunny	mild	normal	true	yes
12	overcast	mild	high	true	yes
13	overcast	hot	normal	false	yes
14	rainy	mild	high	true	no

Utilizzo del Training Set

- Dalle istanze elencate si ricavano le frequenze di accadimento di una data combinazione di antecedenti
- Per prima cosa si contano le occorrenze del conseguente

Play = yes: 9   Play = no: 5

- Poi per ciascun valore di ciascun antecedente si contano le occorrenze del conseguente

		yes	no			yes	no
Outlook	sunny	2	3	Temperature	hot	2	2
	overcast	4	0		mild	4	2
	rainy	3	2		cool	3	1

		yes	no			yes	no
Humidity	high	3	4	Windy	true	3	3
	normal	6	1		false	6	2

Esempio di conteggio delle istanze

instances	outlook	temp.	humidity	windy	play
1	sunny	hot	high	false	no
2	sunny	hot	high	true	no
3	overcast	hot	high	false	yes
4	rainy	mild	high	false	yes
5	rainy	cool	normal	false	yes
6	rainy	cool	normal	true	no
7	overcast	cool	normal	true	yes
8	sunny	mild	high	false	no
9	sunny	cool	normal	false	yes
10	rainy	mild	normal	false	yes
11	sunny	mild	normal	true	yes
12	overcast	mild	high	true	yes
13	overcast	hot	normal	false	yes
14	rainy	mild	high	true	no

Sunny|Yes = 2 $\Rightarrow$ Pr[sunny|yes]=2/9 Sunny/No = 3 $\Rightarrow$ Pr[sunny|no]=3/5

Calcolo delle probabilità *a posteriori*

		Yes	No
	Play	9	5
	Pr[Play]	**9/14**	**5/14**
Pr[Outlook]	sunny	2/9	3/5
	overcast	4/9	0
	rainy	3/9	2/5
Pr[Temp.].	hot	2/9	2/5
	mild	4/9	2/5
	cool	3/9	1/5
Pr[Humidity]	high	3/9	4/5
	normal	6/9	1/5
Pr[Windy]	true	3/9	3/5
	false	6/9	2/5
		$\sum P = 1$	$\sum P = 1$

Le probabilità degli antecedenti si stimano come frequenza relativa fra l'istanza considerata e tutte le istanze per cui il conseguente è quello dato.

Es. Pr[outlook.sunny|yes] = 2/9

Pr[Temp.mild|no] = 2/5

Pr[Humidity.normal|no] = 1/5

Pr[Windy.false|yes] = 6/9

Nota: la somma delle frequenze relative per ciascun antecedente è 1

Validazione con un evento già noto

		Yes	No
Outlook	sunny	2/9	3/5
	overcast	4/9	0
	rainy	3/9	2/5
Temperature	hot	2/9	2/5
	mild	4/9	2/5
	cool	3/9	1/5
Humidity	high	3/9	4/5
	normal	6/9	1/5
Windy	true	3/9	3/5
	false	6/9	2/5
	Play	**9/14**	**5/14**

$$\Pr[day\#|\,yes] = \Pr[sunny\,|\,yes]\times \Pr[cool\,|\,yes]\times \Pr[normal\,|\,yes]\times \Pr[false\,|\,yes]\times \Pr[play\,|\,yes]$$

$$\Pr[day\#|\,no] = \Pr[sunny\,|\,no]\times \Pr[cool\,|\,no]\times \Pr[normal\,|\,no]\times \Pr[tfalse\,|\,no]\times \Pr[play\,|\,no]$$

$$\Pr[yes\,|\,day\#] = \frac{\Pr[day\#|\,yes]}{\Pr[day\#|\,yes]+\Pr[day\#|\,no]}$$

$$\Pr[no\,|\,day\#] = \frac{\Pr[day\#|\,no]}{\Pr[day\#|\,yes]+\Pr[day\#|\,no]}$$

Come saranno le probabilità di un evento già noto (day#)?

	Outlook	Temp.	Humidity	Windy	Play
day#	**sunny**	**cool**	**normal**	**false**	**yes**

← Istanza #9

Calcolo delle probabilità per la validazione

$$\Pr[\text{Play} \mid \text{yes}] = \Pr[\text{sunny} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{cool} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{normal} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{false} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{yes}]$$

$$\Pr[\text{day\#} \mid \text{yes}] = \left(\frac{2}{9}\right) \times \left(\frac{3}{9}\right) \times \left(\frac{6}{9}\right) \times \left(\frac{6}{9}\right) \times \left(\frac{9}{14}\right) = \boxed{0.021164}$$

$$\Pr[\text{Play} \mid \text{no}] = \Pr[\text{sunny} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{cool} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{normal} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{false} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{no}]$$

$$\Pr[\text{day\#} \mid \text{no}] = \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{5}{14}\right) = \boxed{0.003429}$$

$$\Pr[\text{yes} \mid \text{day\#}] = 100 \times \frac{0.021164}{0.021164 + 0.003429} = \boxed{86.06\,\%}$$

$$\Pr[\text{no} \mid \text{day\#}] = 100 \times \frac{0.003429}{0.021164 + 0.003429} = \boxed{13.94\,\%}$$

La probabilità di “yes” (evento ***effettivamente verificatosi***) è molto alta, ***ma non 100%***

Stima di un nuovo evento

		Yes	No
Outlook	sunny	2/9	3/5
	overcast	4/9	0
	rainy	3/9	2/5
Temperature.	hot	2/9	2/5
	mild	4/9	2/5
	cool	3/9	1/5
Humidity	high	3/9	4/5
	normal	6/9	1/5
Windy	true	3/9	3/5
	false	6/9	2/5
	Play	**9/14**	**5/14**

$$\Pr[\text{New day} \mid \text{yes}] = \Pr[\text{sunny} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{cool} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{high} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{true} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{yes}]$$

$$\Pr[\text{New day} \mid \text{no}] = \Pr[\text{sunny} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{cool} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{high} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{true} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{no}]$$

Come saranno le probabilità di un evento non incluso nel training set?

	Outlook	Temp.	Humidity	Windy	Play
New day	**sunny**	**cool**	**high**	**true**	**?**

Calcolo delle probabilità del new day

$$\Pr[\text{Play} \mid \text{yes}] = \Pr[\text{sunny} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{cool} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{high} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{true} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{yes}]$$

$$\Pr[\text{new day} \mid \text{yes}] = \left(\frac{2}{9}\right) \times \left(\frac{3}{9}\right) \times \left(\frac{3}{9}\right) \times \left(\frac{3}{9}\right) \times \left(\frac{9}{14}\right) = \boxed{0.0053}$$

$$\Pr[\text{Play} \mid \text{no}] = \Pr[\text{sunny} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{cool} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{high} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{true} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{no}]$$

$$\Pr[\text{new day} \mid \text{no}] = \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{5}{14}\right) = \boxed{0.0206}$$

$$\Pr[\text{yes} \mid \text{new day}] = 100 \times \frac{0.0053}{0.0053 + 0.0206} = \boxed{20.46\,\%}$$

$$\Pr[\text{no} \mid \text{new day}] = 100 \times \frac{0.0206}{0.0053 + 0.0206} = \boxed{79.54\,\%}$$

La probabilità di “no” è la più alta. Se ne deduce che è molto probabile che non si giochi (l’evento non si verifichi)

Stima di un nuovo evento con Pr = 0

		Yes	No
Outlook	sunny	2/9	3/5
	overcast	4/9	0
	rainy	3/9	2/5
Temperature.	hot	2/9	2/5
	mild	4/9	2/5
	cool	3/9	1/5
Humidity	high	3/9	4/5
	normal	6/9	1/5
Windy	true	3/9	3/5
	false	6/9	2/5
	Play	**9/14**	**5/14**

$$\Pr[\text{New day} \mid \text{yes}] = \Pr[\text{overcast} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{cool} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{high} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{true} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{yes}]$$

$$\Pr[\text{New day} \mid \text{no}] = \Pr[\text{overcast} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{cool} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{high} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{true} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{no}]$$

	Outlook	Temp.	Humidity	Windy	Play
New day	**overcast**	**cool**	**high**	**true**	**?**

Nel caso che Pr = 0

$$\Pr[\text{new day} \mid \text{yes}] = \Pr[\text{overcast} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{cool} \mid \text{yes}] \times$$
$$\Pr[\text{high} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{true} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{yes}]$$

$$\Pr[\text{new day} \mid \text{yes}] = \frac{\left(1+\frac{4}{9}\right)\times\left(1+\frac{3}{9}\right)\times\left(1+\frac{3}{9}\right)\times\left(1+\frac{3}{9}\right)\times\frac{9}{14}}{4} = 0.5503$$

$$\Pr[\text{new day} \mid \text{no}] = \Pr[\text{overcast} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{cool} \mid \text{no}] \times$$
$$\Pr[\text{high} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{true} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{no}]$$

$$\Pr[\text{new day} \mid \text{no}] = \frac{\left(1+\frac{0}{5}\right)\times\left(1+\frac{1}{5}\right)\times\left(1+\frac{4}{5}\right)\times\left(1+\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{14}}{4} = 0.3086$$

$$\Pr[\text{yes} \mid \text{new day}] = 100 \times \frac{0.5503}{0.5503+0.3086} = \boxed{64.07\,\%}$$

$$\Pr[\text{no} \mid \text{new day}] = 100 \times \frac{0.3086}{0.5503+0.3086} = \boxed{35.93\,\%}$$

La probabilità di “yes” è la più alta anche se non schiacciante. Se ne deduce che è molto probabile che si giochi (l’evento si verifichi)

Predizione con attributi misti

☞ I dati possono essere in parte qualitativi e in parte numerici, ad es, nel caso precedente, temperatura e umidità possono essere espressi con valori numerici

Antecedents					Consequent
instances	outlook	temp.	humidity	windy	play
1	sunny	29.44	85	false	no
2	sunny	26.67	90	true	no
3	overcast	28.33	86	false	yes
4	rainy	21.11	96	false	yes
5	rainy	20.00	80	false	yes
6	rainy	18.33	70	true	no
7	overcast	17.78	65	true	yes
8	sunny	22.22	95	false	no
9	sunny	20.56	70	false	yes
10	rainy	23.89	80	false	yes
11	sunny	23.89	70	true	yes
12	overcast	22.22	90	true	yes
13	overcast	27.22	75	false	yes
14	rainy	21.67	91	true	no

Probabilità degli attributi numerici

		Yes	No
	Play	9	5
	Pr[Play]	**9/14**	**5/14**
Pr[Outlook]	sunny	2/9	3/5
	overcast	4/9	0
	rainy	3/9	2/5
Pr[Temp.].	mean	22.78	23.67
	st.dev.	3.42	4.39
Pr[Humidity]	mean	79.11	86.20
	st.dev.	10.22	9.73
Pr[Windy]	true	3/9	3/5
	false	6/9	2/5

La probabilità degli antecedenti numerici (temperatura e umidità) si esprime attraverso e deviazione standard dei media due casi (yes/no), supponendo che questi dati siano distribuiti in modo normale

$$\Pr[temp\,|\,yes] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(temp-22.78)^2}{2\times 3.42^2}}$$

$$\Pr[temp\,|\,no] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(temp-23.67)^2}{2\times 4.39^2}}$$

$$\Pr[hum\,|\,yes] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(hum-79.11)^2}{2\times 10.22^2}}$$

$$\Pr[hum\,|\,yes] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(hum-86.20)^2}{2\times 9.73^2}}$$

Stima di un nuovo evento

		Yes	No
Outlook	sunny	2/9	3/5
	overcast	4/9	0
	rainy	3/9	2/5
Temp..	Pr[temp|yes] = 0.1018		
	Pr[temp|no] = 0.0756		
Humidity	Pr[humidity|yes] = 0.0171		
	Pr[humidity|no] = 0.0048		
Windy	true	3/9	3/5
	false	6/9	2/5
	Play	**9/14**	**5/14**

$$
\begin{aligned}
\Pr[\text{New day} \mid yes] = \Pr[sunny \mid yes] \times & \\
& \boxed{\begin{aligned}&\Pr[21 \mid yes] \times \\ &\Pr[66 \mid yes] \times\end{aligned}} \\
& \Pr[false \mid yes] \times \\
& \Pr[play \mid yes]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr[\text{New day} \mid no] = \Pr[sunny \mid no] \times & \\
& \boxed{\begin{aligned}&\Pr[21 \mid no] \times \\ &\Pr[66 \mid no] \times\end{aligned}} \\
& \Pr[false \mid no] \times \\
& \Pr[play \mid no]
\end{aligned}
$$

$$
\Pr[yes \mid \text{New day}] = \frac{\Pr[\text{New day} \mid yes]}{\Pr[\text{New day} \mid yes] + \Pr[\text{New day} \mid no]}
$$

$$
\Pr[no \mid \text{New day}] = \frac{\Pr[\text{New day} \mid no]}{\Pr[\text{New day} \mid yes] + \Pr[\text{New day} \mid no]}
$$

	Outlook	Temp.	Humidity	Windy	Play
New day	**sunny**	**21**	**66**	**false**	**?**

Calcolo delle probabilità del new day

$$\Pr[\text{Play} \mid \text{yes}] = \Pr[\text{sunny} \mid \text{yes}] \times \Pr[21 \mid \text{yes}] \times$$
$$\Pr[66 \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{true} \mid \text{yes}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{yes}]$$

$$\Pr[\text{New day} \mid \text{yes}] = \left(\frac{2}{9}\right) \times (0.1018) \times (0.0171) \times \left(\frac{3}{9}\right) \times \left(\frac{9}{14}\right) = \boxed{0.000083}$$

$$\Pr[\text{Play} \mid \text{no}] = \Pr[\text{sunny} \mid \text{no}] \times \Pr[21 \mid \text{no}] \times$$
$$\Pr[66 \mid \text{no}] \times \Pr[\text{true} \mid \text{no}] \times \Pr[\text{play} \mid \text{no}]$$

$$\Pr[\text{New day} \mid \text{no}] = \left(\frac{3}{5}\right) \times (0.0756) \times (0.0048) \times \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{5}{14}\right) = \boxed{0.000046}$$

$$\Pr[\text{New day} \mid \text{yes}] = 100 \times \frac{0.000083}{0.000083 + 0.000046} = \boxed{64.25\%}$$

$$\Pr[\text{New day} \mid \text{no}] = 100 \times \frac{0.000046}{0.000083 + 0.000046} = \boxed{35.75\%}$$

Implementazione Excel

Elaborato di Giovanni Frati e Giacomo Scarselli, A.A. 2009/2010

Tabella dei casi noti

Play Game					
	Antecedents				Consequent
instances	outlook	temp.	humidity	windy	play
1	sunny	hot	high	false	no
2	sunny	hot	high	true	no
3	overcast	hot	high	false	yes
4	rainy	mild	high	false	yes
5	rainy	cool	normal	false	yes
6	rainy	cool	normal	true	no
7	overcast	cool	normal	true	yes
8	sunny	mild	high	false	no
9	sunny	cool	normal	false	yes
10	rainy	mild	normal	false	yes
11	sunny	mild	normal	true	yes
12	overcast	mild	high	true	yes
13	overcast	hot	normal	false	yes
14	rainy	mild	high	true	no

Previsione per il futuro (new day)

New day	sunny	hot	high	true	non gioca

		Yes	No
	Play	9	4
	P[Play]	0.69	0.31
P[A/C]		P[outlook/play]	
Outlook	sunny	0.22	0.75
	overcast	0.44	0.00
	rainy	0.33	0.25
		P[temp/play]	
Temp.	hot	0.22	0.50
	mild	0.44	0.25
	cool	0.33	0.25
		P[humidity/play]	
Humidity	high	0.33	0.75
	normal	0.67	0.25
		P[windy/play]	
Windy	true	0.33	0.50
	false	0.67	0.50
Play New day		**0.46**	**0.53**
Prob.		**46.4%**	**53.6%**

La probabilità di non giocare è maggiore, perciò la decisione è

“non gioca”

Implementazione Matlab

Input delle condizioni per il “new day”