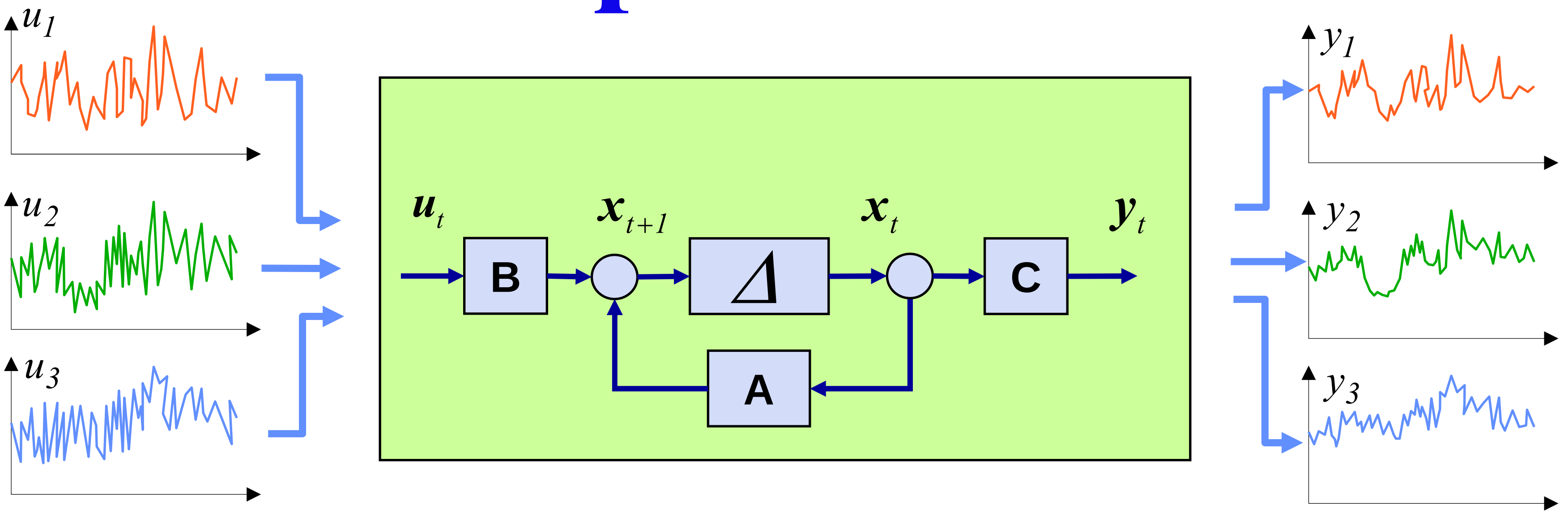
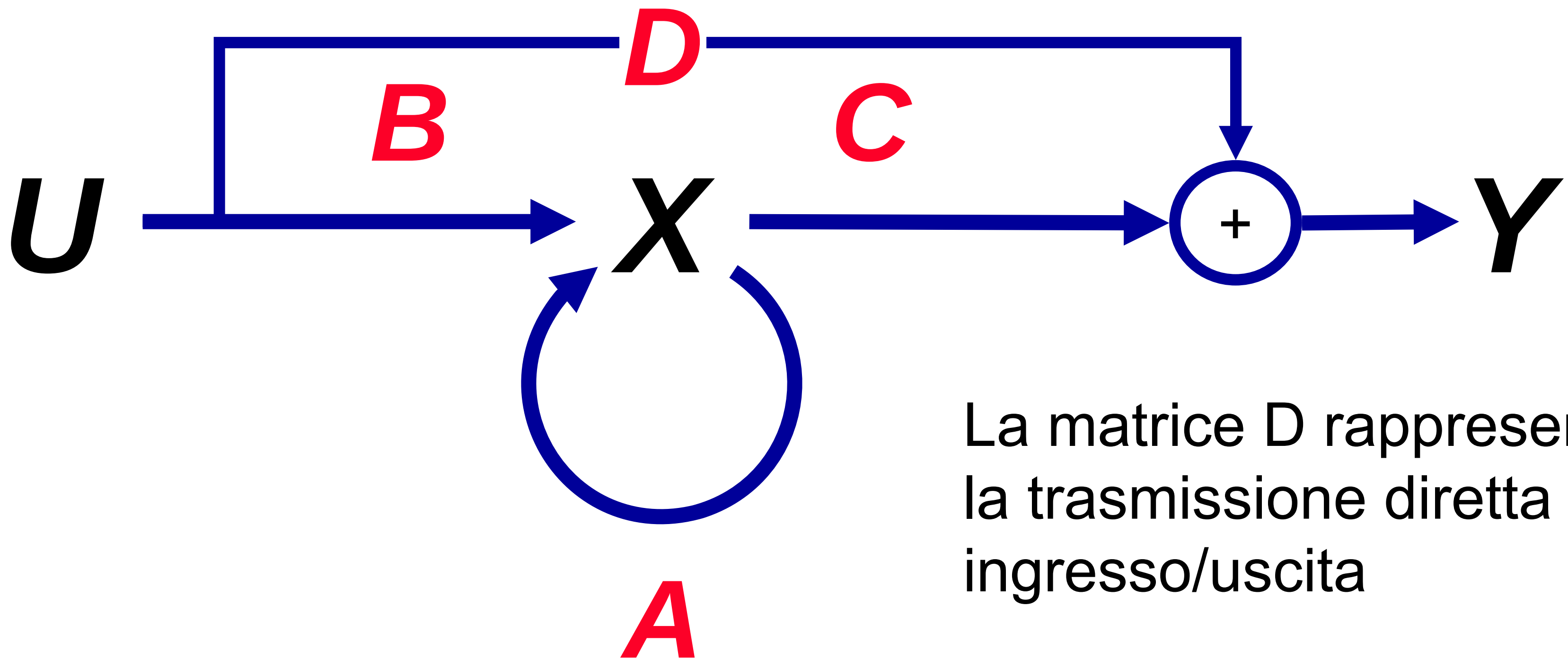
Sistemi Dinamici Lineari tempo-discreti



Definizione di sistema dinamico lineare

- Gli insiemi di ingressi, stati e uscite sono spazi vettoriali
- Vale il principio di sovrapposizione degli effetti
- La relazione Ingresso/Stato/Uscita è lineare
  - La mappa da uno spazio all'altro è data da matrici



La matrice D rappresenta la trasmissione diretta ingresso/uscita

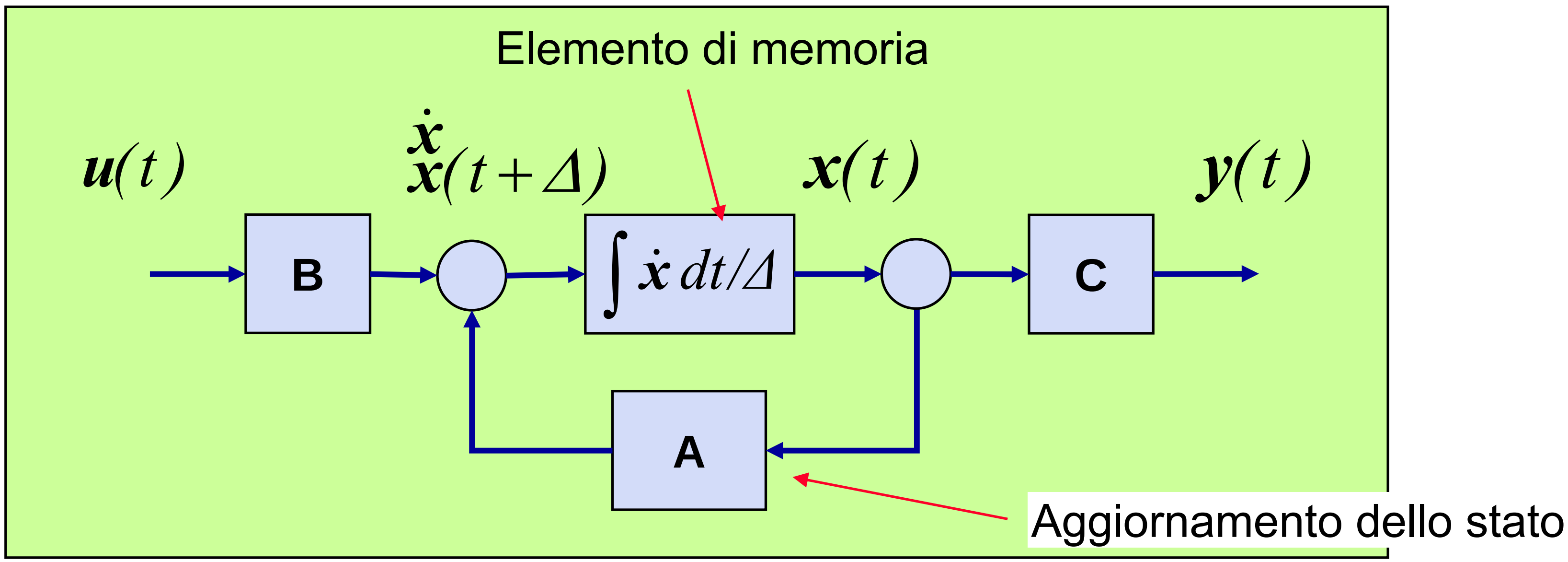
Struttura di un sistema dinamico lineare

Tempo-discreto

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+\Delta) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) + B\,\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

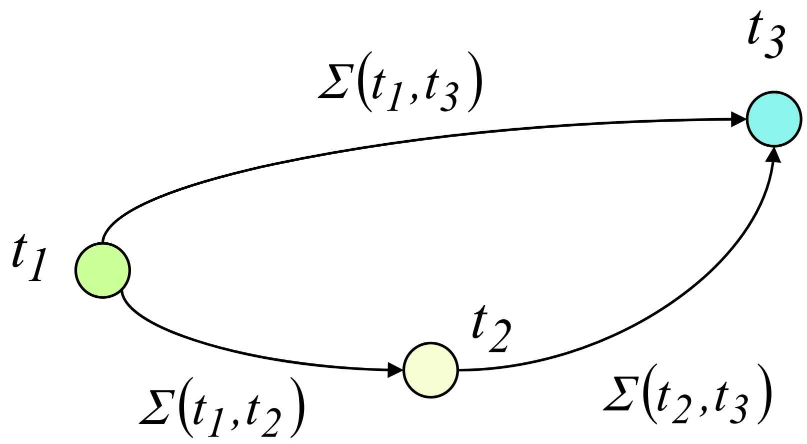
Tempo-continuo

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) + B\,\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

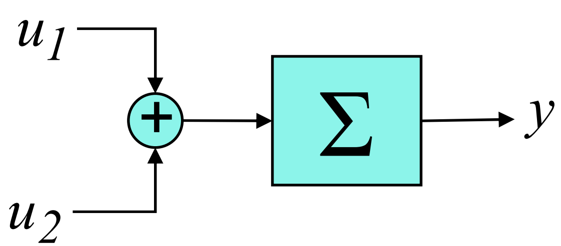


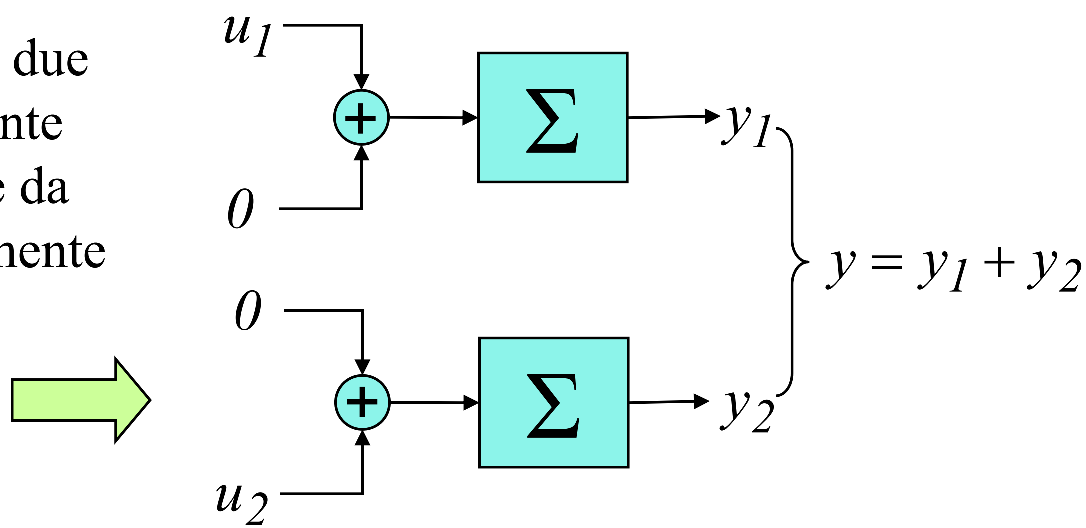
Proprietà di un sistema dinamico lineare

- ***Causalità:*** un sistema dinamico non può essere anticipativo
  - L'uscita non può precedere l'ingresso
- ***Composizione nel tempo***
  - Dati tre istanti di tempo $t_1<t_2<t_3$ l'evoluzione del sistema da t_1 a t_3 può essere scomposta come evoluzione da t_1 a t_2 e da t_2 a t_3



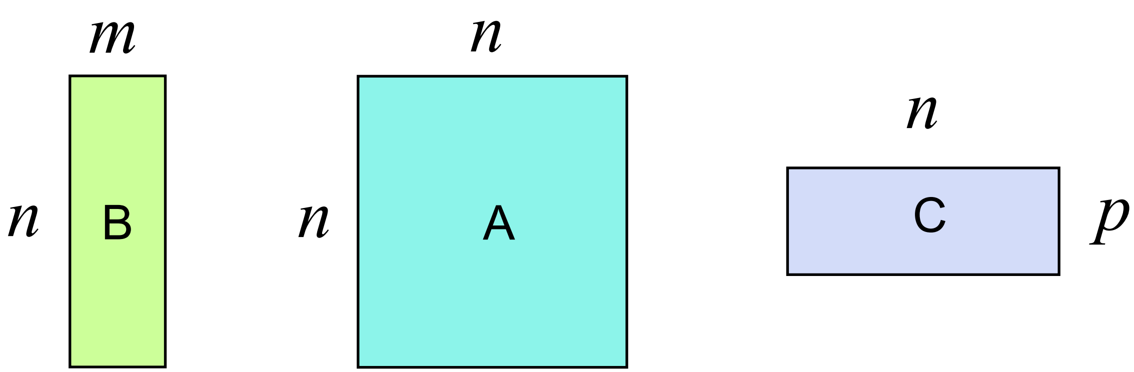
- ***Sovrapposizione degli effetti***
  - L'uscita del sistema provocata da due ingressi agenti contemporaneamente è la somma delle uscite provocate da ciascun ingresso agente separatamente



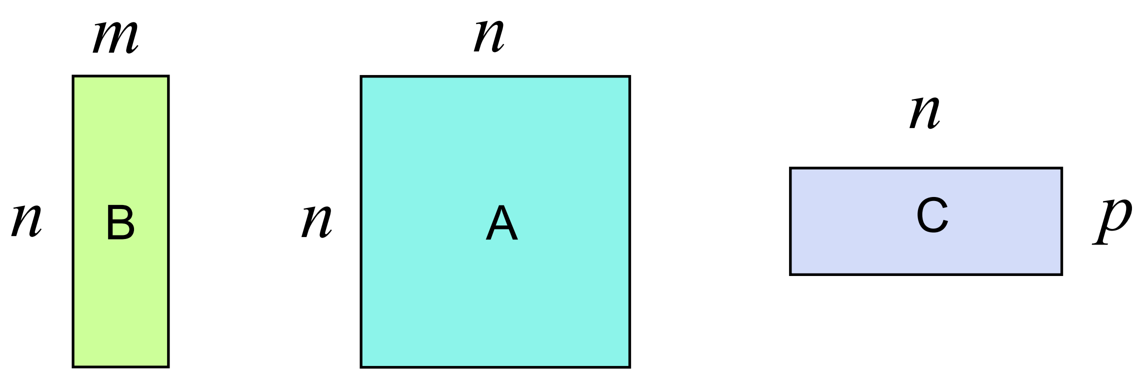


Dimensioni di vettori e matrici

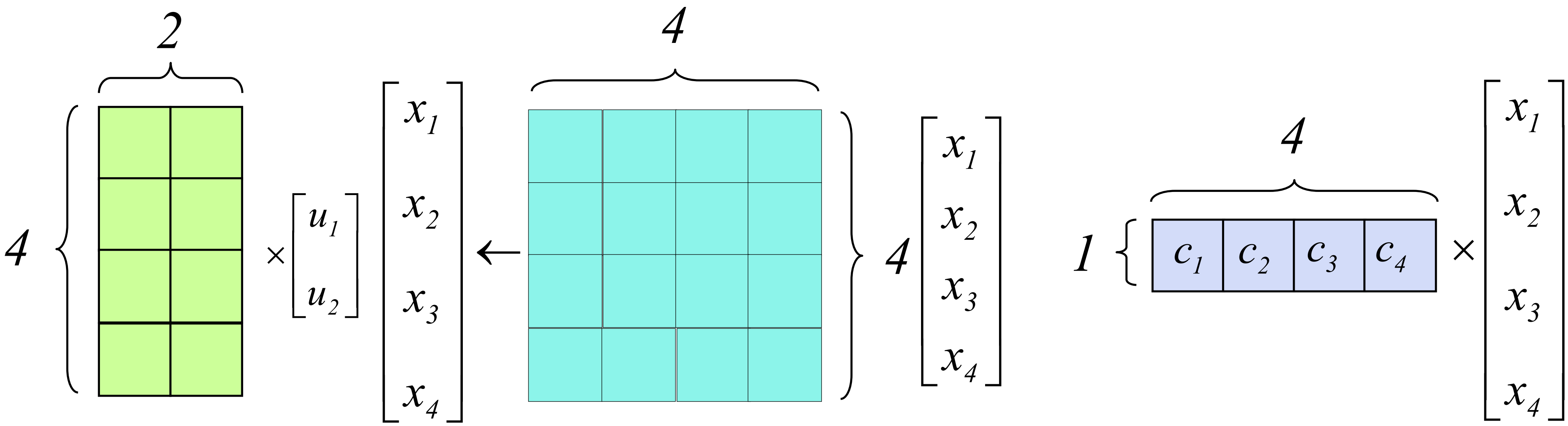
- ***Ingresso u:*** vettore colonna a *m* componenti $\boldsymbol{u} \in R^m$
- ***Stato x:*** vettore colonna a *n* componenti $\boldsymbol{x} \in R^n$
- ***Uscita y:*** vettore colonna a *p* componenti $\boldsymbol{y} \in R^p$
- ***Matrice B ingresso-stato*:** n× m componenti $\boldsymbol{B} \in R^{n \times m}$
- ***Matrice A stato-stato:*** $n \times n$ componenti $\boldsymbol{A} \in R^{n \times n}$
- ***Matrice C stato-uscita:*** $p \times n$ componenti $\boldsymbol{C} \in R^{p \times n}$



Conformabilità di vettori e matrici



Esempio: m=2; n=4; p=1



Dimensionalità del sistema

- ☞ Le dimensioni di Ingresso, Stato e Uscita, possono essere in generale qualsiasi, purché conformabili
  - ✏ ***Matrice B ingresso-stato*:** n× m componenti $\boldsymbol{B} \in R^{n \times m}$
  - ✏ ***Matrice A stato-stato:*** $n \times n$ componenti $\boldsymbol{A} \in R^{n \times n}$
  - ✏ ***Matrice C stato-uscita:*** $p \times n$ componenti $\boldsymbol{C} \in R^{p \times n}$
- ☞ In questo caso il sistema si dice ***Multi-Input-Multi-Output (MIMO)***
  - ✏ Con molti ingressi e molte uscite
- ☞ Nel caso che $m = p = 1$, il sistema si dice ***Single-Input-Single-Output (SISO)***
  - ✏ Con un ingresso ed una uscita
- ☞ Nel seguito ci occuperemo prevalentemente di sistemi ***SISO***

Sistemi a tempo-discreto SISO

☞ Il tempo varia in modo discreto $t \rightarrow t+1$

☞ Rappresentazione interna ***(Ingresso/Stato/Uscita)***

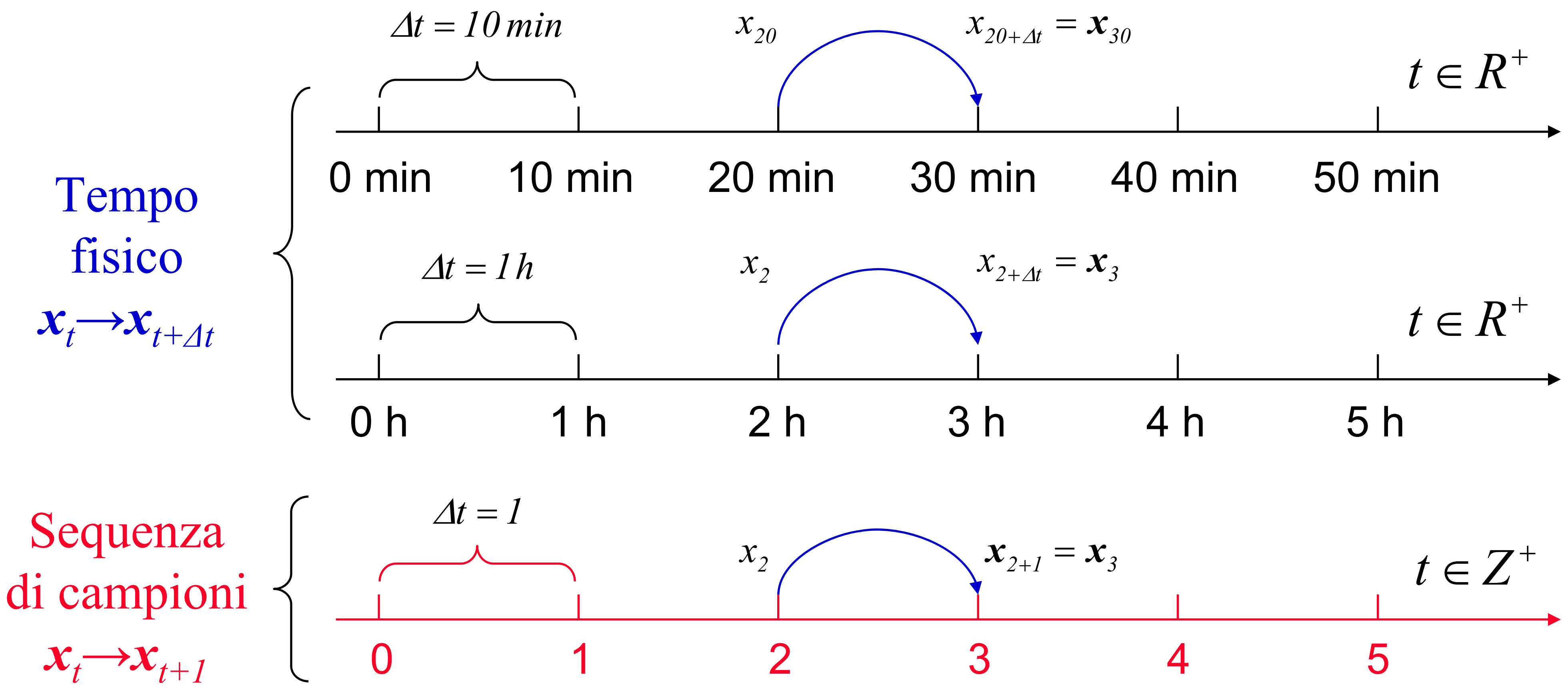
$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{u}(t) \\ \\ y(t) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

☞ Rappresentazione esterna ***(Ingresso/Uscita)***

$$y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_n y_{t-n} = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \ldots + \beta_n u_{t-n}$$

A proposito del tempo nei sistemi tempo-discreti

- Il tempo non ha più un significato fisico (secondi, minuti, ore,...) ma di ***sequenza*** fra un istante di campionamento e il successivo
- Solo in questi istanti il sistema è definito.



Esempio di sistema tempo-discreto MISO

MISO = Multi-Input-Single-Output

$$
\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A} \in R^{4\times 4}
$$

$$
\boldsymbol{B} \in R^{4\times 2}
$$

$$
\boldsymbol{c} \in R^{1\times 4}
$$

Dalla forma matriciale alle singole equazioni

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a_{11} \times x_1(t) + a_{12} \times x_2(t) + a_{13} \times x_3(t) + a_{14} \times x_4(t) + b_{11} \times u_1(t) + b_{12} \times u_2(t) \\ x_2(t+1) = a_{21} \times x_1(t) + a_{22} \times x_2(t) + a_{23} \times x_3(t) + a_{24} \times x_4(t) + b_{21} \times u_1(t) + b_{22} \times u_2(t) \\ x_3(t+1) = a_{31} \times x_1(t) + a_{32} \times x_2(t) + a_{33} \times x_3(t) + a_{34} \times x_4(t) + b_{31} \times u_1(t) + b_{32} \times u_2(t) \\ x_4(t+1) = a_{41} \times x_1(t) + a_{42} \times x_2(t) + a_{43} \times x_3(t) + a_{44} \times x_4(t) + b_{41} \times u_1(t) + b_{42} \times u_2(t) \end{cases}$$

$$\boxed{x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \times u_k(t)}$$

$$y(t) = c_1 \times x_1(t) + c_2 \times x_2(t) + c_3 \times x_3(t) + c_4 \times x_4(t)$$

$$\boxed{y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \times x_i(t)}$$

Evoluzione di un sistema autonomo

☞ Il sistema è autonomo se evolve senza contributo degli ingressi ($u = 0$)

☞ L'equazione di stato si riduce a

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$

che si può risolvere iterativamente

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{x}(0)$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{x}(0)$$

....

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t-1) = \underbrace{\boldsymbol{A} \times \ldots \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}}_{t} \times \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}^{t} \times \boldsymbol{x}(0)$$

Rappresentazione locale e globale

- L'equazione di stato alle differenze è una rappresentazione locale
  - Da t si va in $t+1$ $$\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$
- L'evoluzione ottenuta risolvendo questa iterativamente è una rappresentazione globale
  - Da $t=0$ si va avanti in un qualunque t

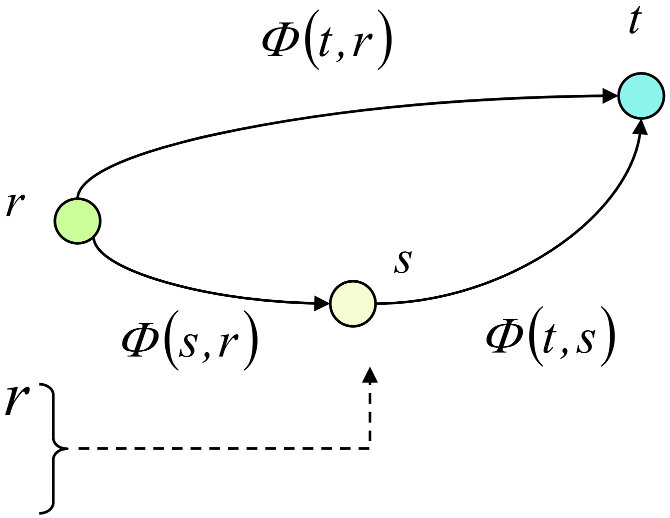
$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}^{t}\boldsymbol{x}(0)$$

- La matrice $\boldsymbol{A}^t$ si dice ***matrice di transizione***, perché trasporta lo stato dalla condizione iniziale $\boldsymbol{x}(0)$ a quella finale $\boldsymbol{x}(t)$
- Si può generalizzare, scegliendo due istanti qualsiasi di tempo $t > s$

$$\boldsymbol{x}(t+s)=\boldsymbol{A}^{(t-s)}\boldsymbol{x}(s)$$

Matrice di transizione

- Si definisce matrice di transizione $\boldsymbol{\Phi}$ l'operatore lineare che trasporta lo stato $\boldsymbol{x}_s$ nello stato $\boldsymbol{x}_t$ con $t > s$



Proprietà di $\boldsymbol{\Phi}(t,s) = \boldsymbol{A}^{t-s}$

- ***Identità:*** $\boldsymbol{\Phi}(t,t) = \boldsymbol{I}$

  Prova: $\boldsymbol{A}^{t-t} = \boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$

- ***Composizione:*** $\boldsymbol{\Phi}(t,s)\,\boldsymbol{\Phi}(s,r) = \boldsymbol{\Phi}(t,r) \quad t > s > r$

  Prova: $\boldsymbol{A}^{t-s}\,\boldsymbol{A}^{s-r} = \boldsymbol{A}^{t-s+s-r} = \boldsymbol{A}^{t-r}$

- ***Inversione:*** *se* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *esiste,* $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,s) = \boldsymbol{\Phi}(s,t)$

  Prova: $(\boldsymbol{A}^{t-s})^{-1} = \boldsymbol{A}^{s-t}$

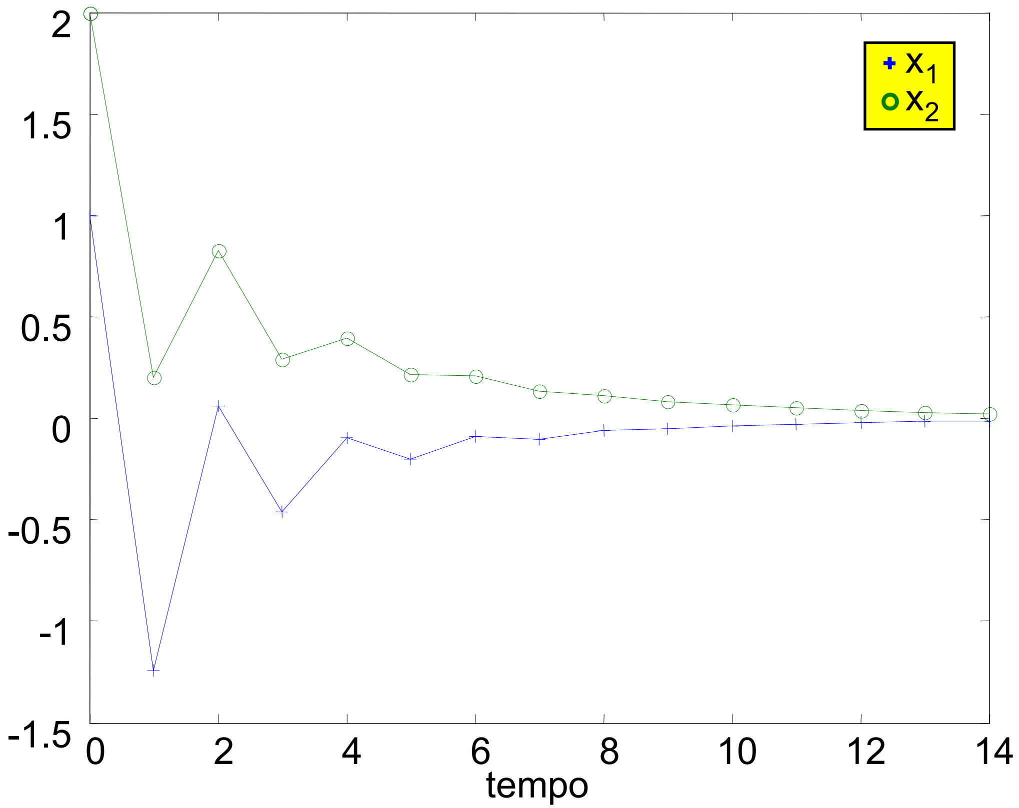
- *Commutazione:* $\boldsymbol{A\Phi}(t,s) = \boldsymbol{\Phi}(t,s)\,\boldsymbol{A}$

  Prova: $\boldsymbol{AA}^{t-s} = \boldsymbol{A}^{t-s+1} = \boldsymbol{A}^{t-s}\,\boldsymbol{A}$

Un esempio numerico

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.14 & -0.55\\ -0.6 & 0.4\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

Ambedue gli stati tendono a zero: ***sistema stabile***



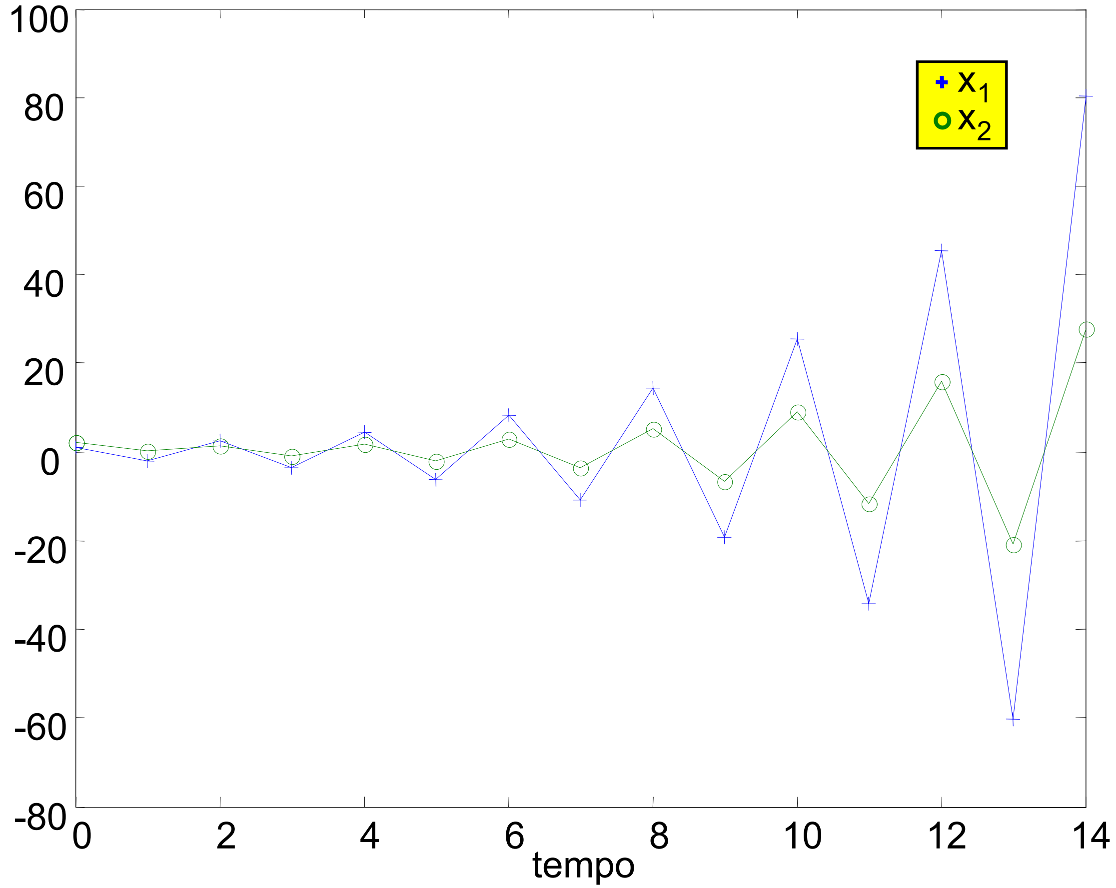
t

x_1	x_2
1	2
-1,24	0,2
0,0636	0,824
-0,4621	0,2914
-0,0955	0,3938
-0,2032	0,2148
-0,0897	0,2078
-0,1017	0,1370
-0,0611	0,1158
-0,0551	0,0830
-0,0379	0,0663
-0,0311	0,0492
-0,0227	0,0384
-0,0179	0,0290
-0,0134	0,0223

Un esempio numerico

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{-1.14} & -0.55 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ambedue gli stati tendono a crescere senza limite: ***sistema instabile***



t ↓

x_1	x_2
1.0000	2.0000
-2.2400	0.2000
2.4436	1.4240
-3.5689	-0.8966
4.5617	1.7827
-6.1808	-2.0239
8.1592	2.8989
-10.8959	-3.7360
14.4762	5.0432
-19.2766	-6.6684
25.6429	8.8986
-34.1271	-11.8263
45.4094	15.7458
-60.4269	-20.9474
80.4077	27.8772

Prima definizione di Stabilità

☞ Un sistema lineare ***autonomo*** si dice ***asintoticamente stabile*** se

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$$

☞ Ciò implica che ogni componente del vettore di stato tenda individualmente a zero

☞ La "*asintotica*" stabilità non dice *in che modo* e *dopo quanto tempo* si verifica la condizione $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

- Vedremo più avanti definizioni più restrittive di stabilità

☞ Questa nozione di stabilità coinvolge solamente il comportamento intrinseco del sistema

☞ Nel caso di sistema con ingressi, si avrà una nuova versione di stabilità.

Chi comanda nel sistema?

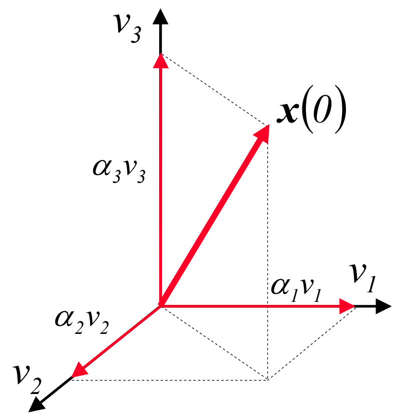
- ☞ Cosa influenza il comportamento del sistema?
- ☞ Come è possibile prevedere il suo comportamento senza effettuare una simulazione o risolvere analiticamente il sistema?
- ☞ Il comportamento del sistema è definito da autovalori (λ) e autovettori (**v**) della matrice $\boldsymbol{A}$, definiti dall'equazione

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\,\boldsymbol{v}_i$$

- ☞ Gli autovettori sono *direzioni privilegiate* nello spazio $\boldsymbol{X} \in R^n$
- ☞ Se lo stato iniziale $\boldsymbol{x}(0)$ coincide con un autovettore, lo stato agli istanti successivi rimane lungo tale autovettore, variando solamente di scala secondo il valore del corrispondente autovalore
- ☞ Il comportamento del sistema è esprimibile come funzione lineare degli autovettori.

Autovettori

- Sono un insieme linearmente indipendente e perciò formano una base in R^n
- Ogni vettore $\boldsymbol{x} \in R^n$ può essere espresso come combinazione lineare degli autovettori $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ per ora supposti distinti
- In particolare, per lo stato iniziale



$$\boldsymbol{x}(0) = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$$

- Ricordando l'espressione dell'evoluzione globale

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}^t \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}^t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{A}^{t-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{A}^{t-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

$$= \boldsymbol{A}^{t-2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^2 \boldsymbol{v}_i = \ldots = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^t \boldsymbol{v}_i$$

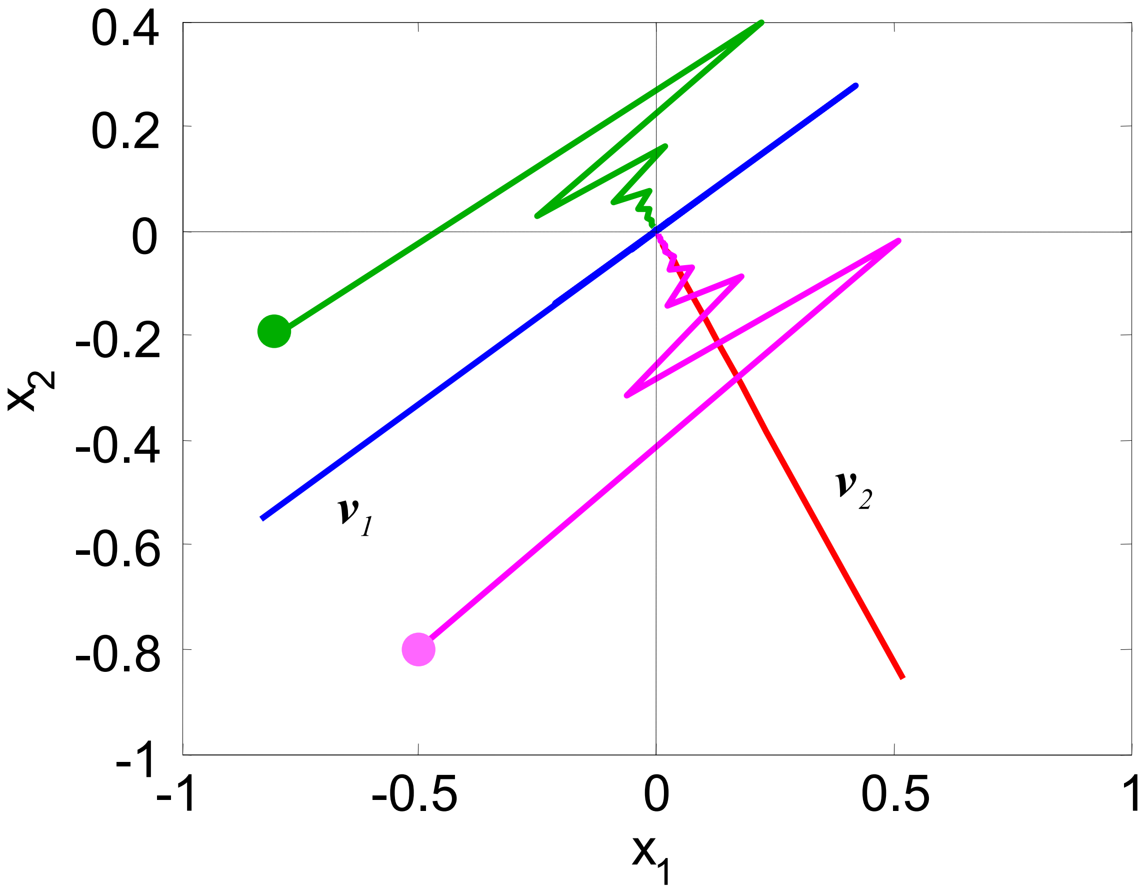
Evoluzione funzione degli autovettori

☞ L'evoluzione dello stato può essere espressa come combinazione lineare degli autovettori e autovalori

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\lambda_i^t\,\boldsymbol{v}_i$$

● $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-0.8\\-0.2\end{bmatrix}$

● $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-0.5\\-0.8\end{bmatrix}$



Evoluzione lungo un autovettore

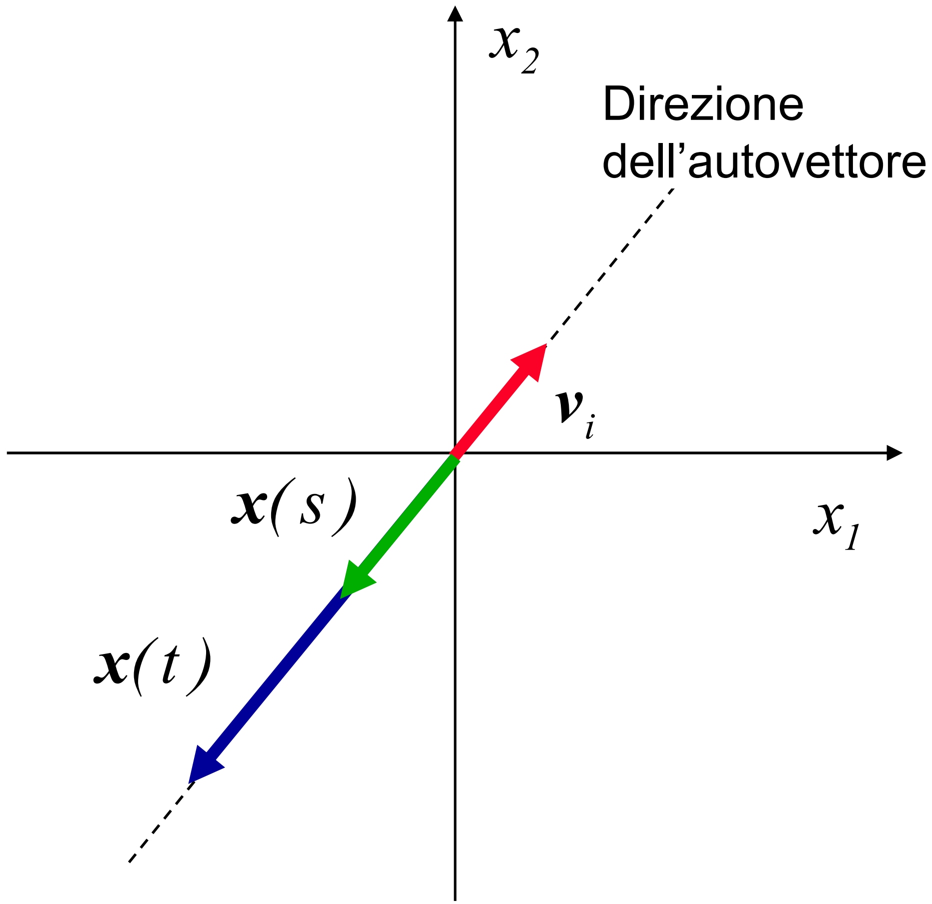
$$x(0) = v_i$$
$$x(1) = Ax(0) = Av_i = \lambda_i v_i$$
$$x(2) = Ax(1) = A \times \lambda_i v_i = \lambda_i^2 v_i$$
$$x(3) = Ax(2) = A \times \lambda_i^2 v_i = \lambda_i^3 v_i$$

....

$$x(t) = \lambda_i^t v_i$$

Se la condizione iniziale $\boldsymbol{x}(0)$ coincide con l'autovalore $\boldsymbol{v}_i$, lo stato $\boldsymbol{x}(t)$ è costretto a muoversi lungo la direzione dell'autovettore per qualsiasi t. Può solo cambiare modulo e/o verso.

L'autovettore rappresenta una direzione privilegiata



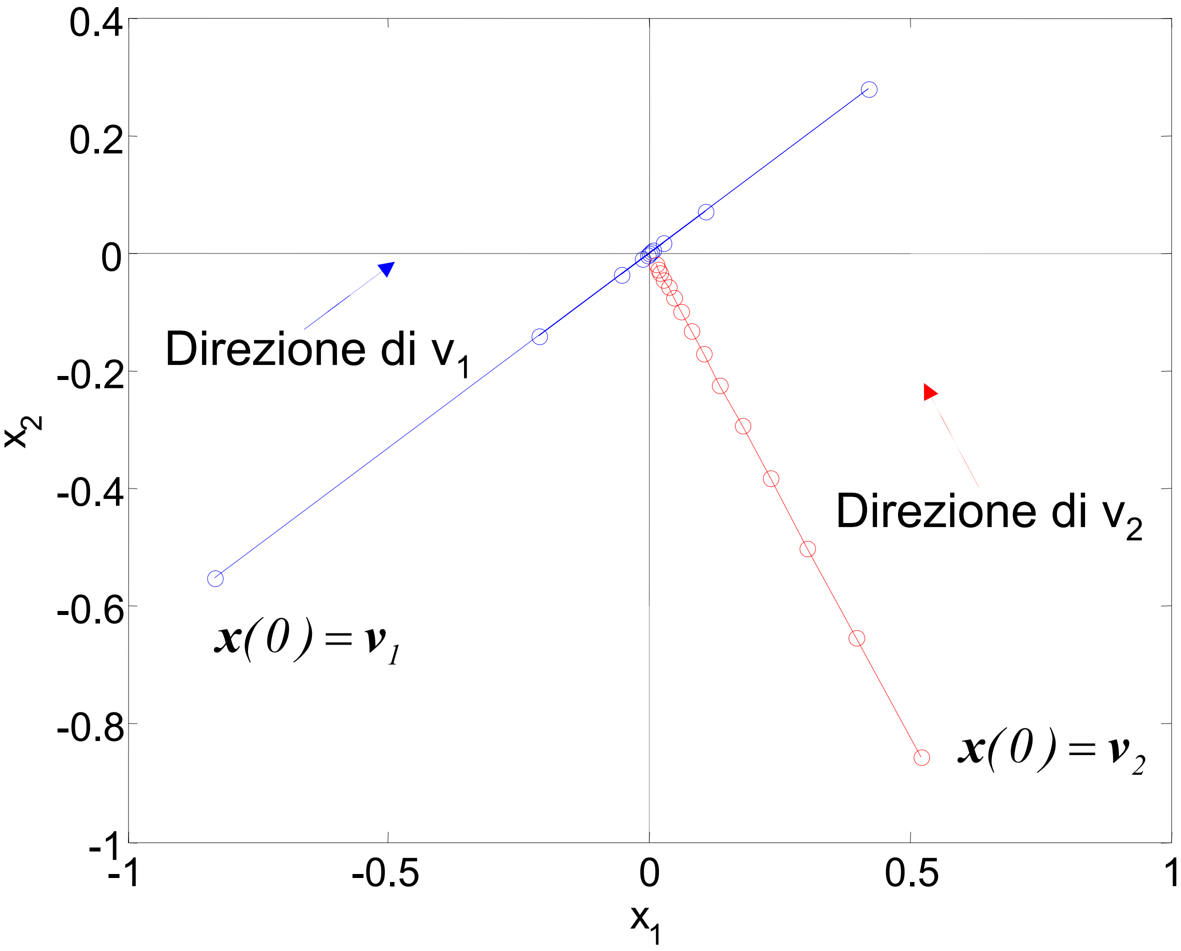
Esempio: sistema stabile

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.14 & -0.55 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -0.5047 \\ \lambda_2 = 0.7647 \end{array}$$

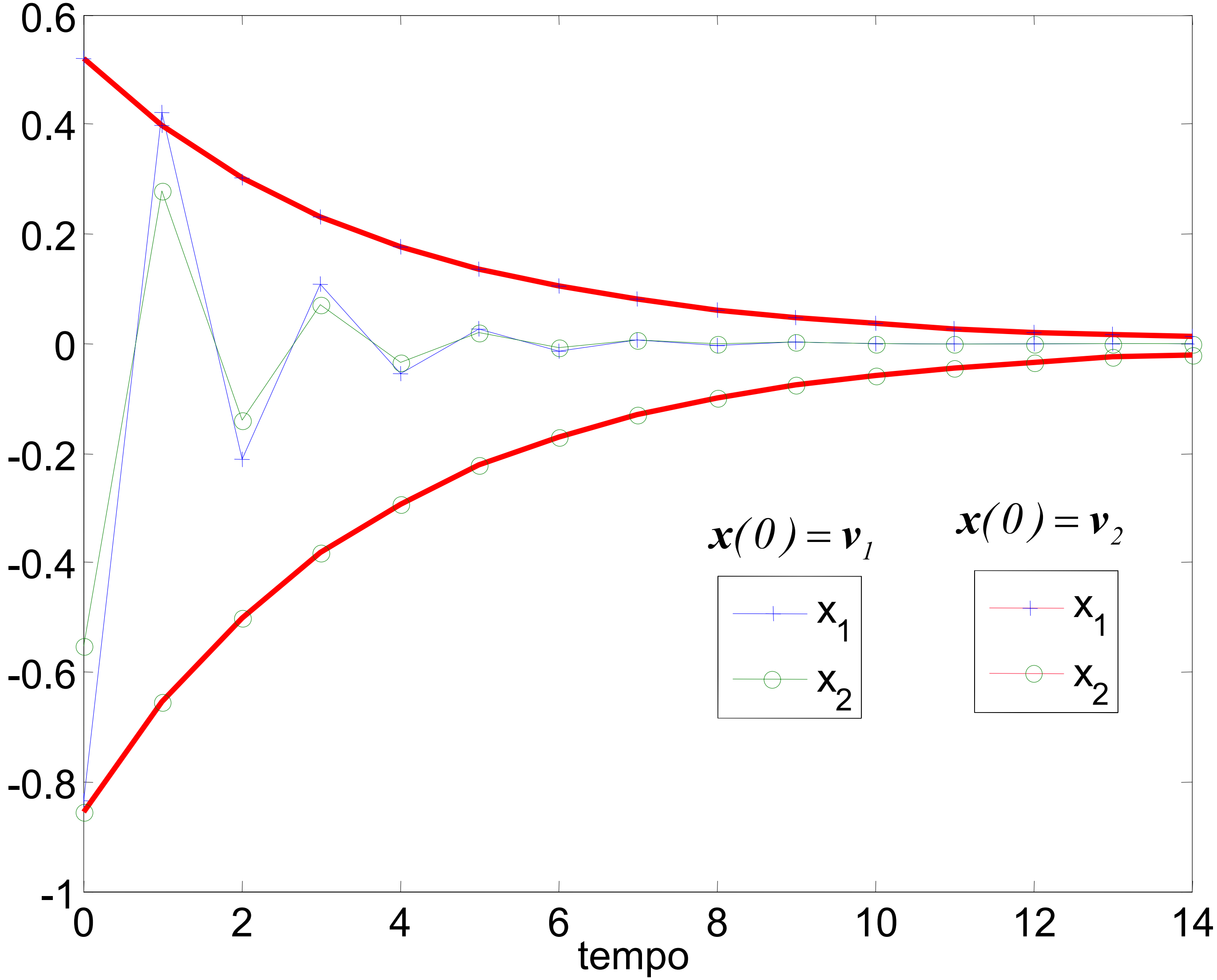
$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.8334 \\ -0.5527 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0.5195 \\ -0.8545 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2$$

Se il sistema parte da un autovettore è costretto a muoversi lungo quella direzione e può variare solo il modulo in funzione del corrispondente autovalore



Evoluzione nel tempo: caso stabile



Osservazione:
L'evoluzione lungo $\boldsymbol{v}_1$ è ***oscillatoria*** perché λ_1 è negativo: ad ogni iterazione si ha un cambio di segno

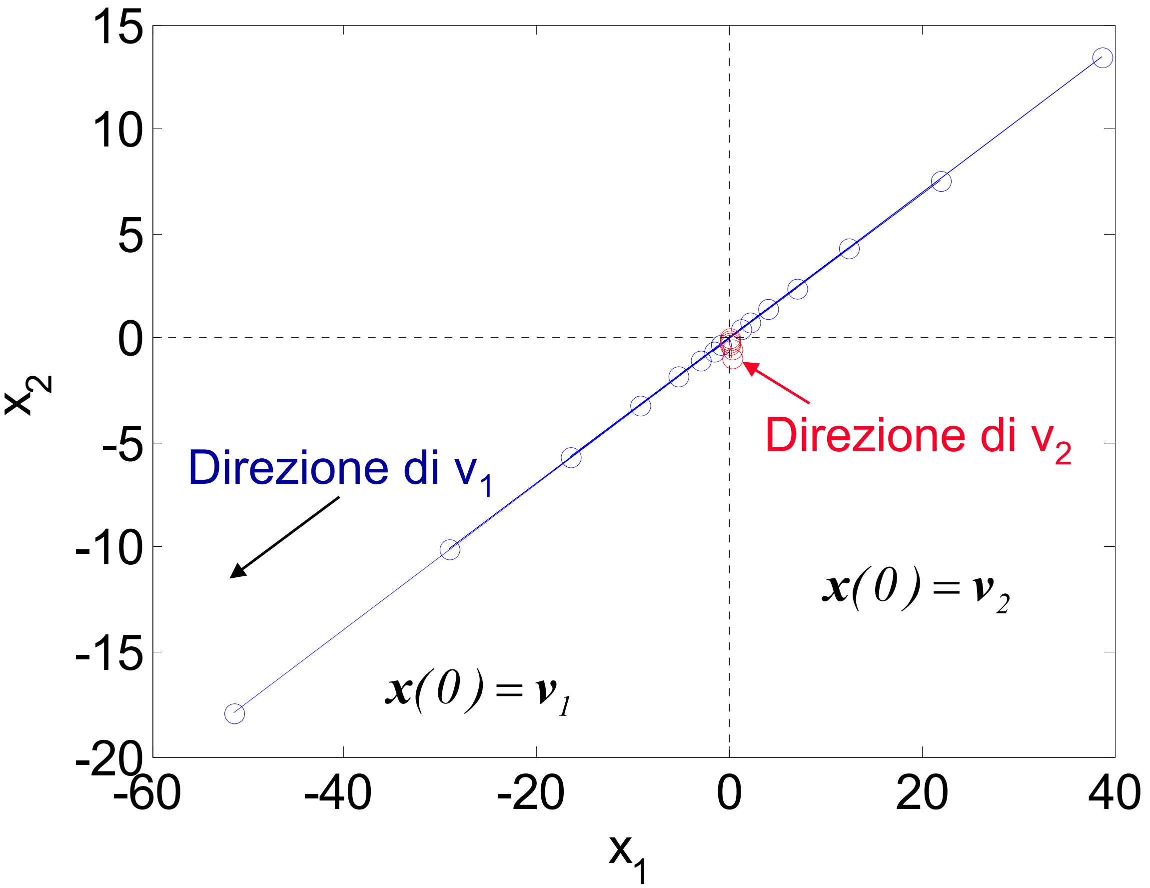
L'evoluzione lungo $\boldsymbol{v}_2$ è ***monotona*** perché λ_2 è positivo: mantenimento del segno

Altro esempio: sistema instabile

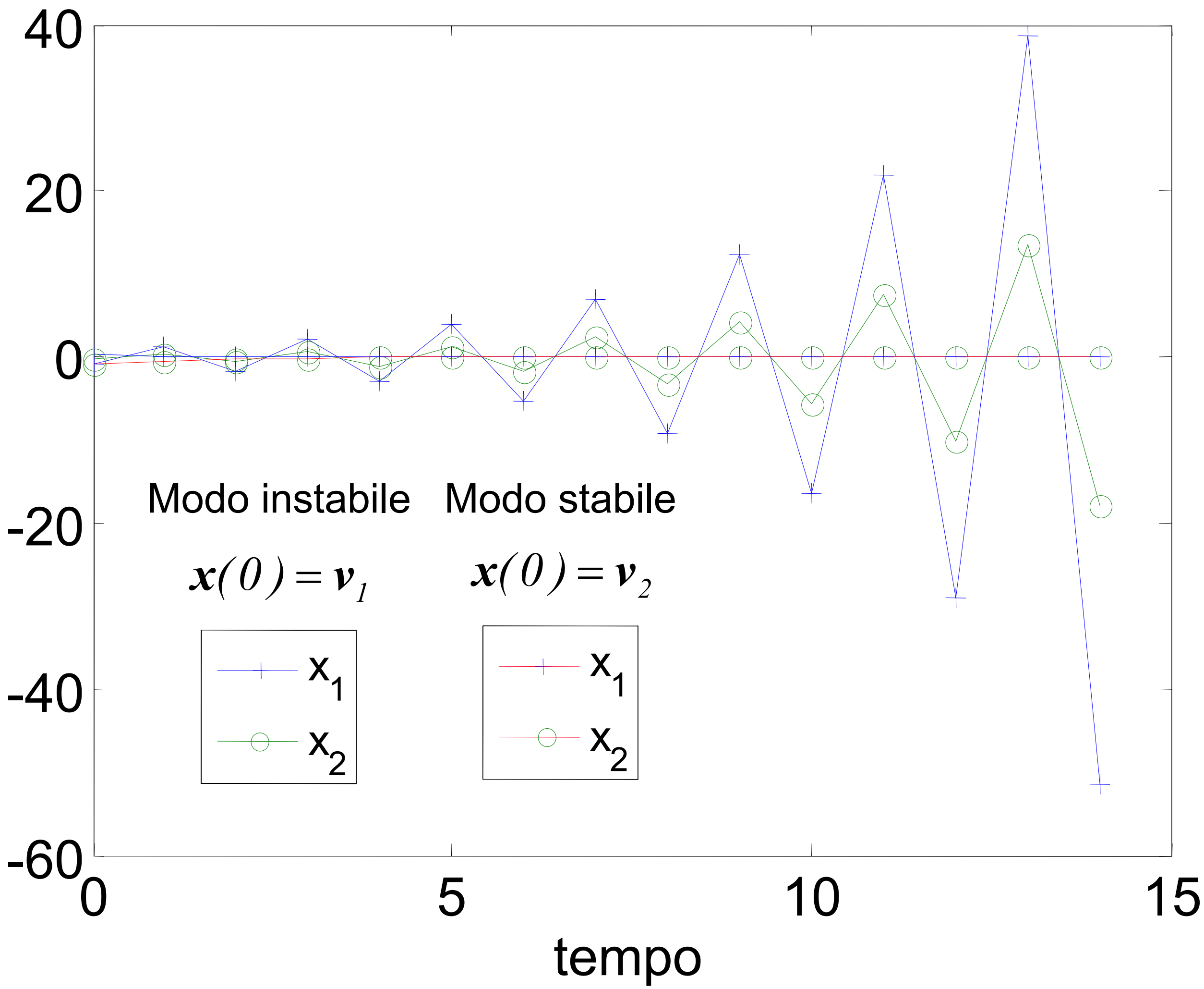
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1.14 & -0.55 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1.3307 \\ \lambda_2 = 0.5907 \end{matrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} -0.9448 \\ -0.3276 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.3029 \\ -0.9530 \end{bmatrix}$$

L'autovettore $\boldsymbol{v_1}$ corrisponde ad un autovalore instabile (λ_1). Perciò l'evoluzione a partire da questo è divergente.

L'autovettore $\boldsymbol{v_2}$ corrisponde ad un autovalore stabile (λ_2). L'evoluzione a partire da questo tende a zero.



Evoluzione nel tempo: caso instabile



Osservazione:
L'evoluzione lungo ***v****$_1$* è ***oscillatoria divergente (instabile)*** perché *λ_1* è instabile.

L'evoluzione lungo ***v****$_2$* è ***monotona convergente (stabile)*** perché λ_2 è stabile.

Equilibrio di un sistema autonomo

- Un sistema è all'equilibrio quando il suo stato non cambia nel tempo

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \forall t \in R^{+}$$

- Risolvendo questa equazione

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \Rightarrow (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \begin{cases} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \quad nonsingolare \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \quad singolare \Rightarrow \boldsymbol{x} \subset N(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \end{cases}$$

- Se $\boldsymbol{I}$-$\boldsymbol{A}$ è non singolare, l'origine ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$) è l'unico punto di equilibrio per un sistema autonomo

$$\boxed{\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}}$$

Stabilità di un sistema autonomo

- ☞ La stabilità è un concetto legato all'equilibrio:
- ☞ Se un sistema (autonomo) è ***stabile*** tende ad andare all'equilibrio per *qualsiasi* condizione iniziale
- ☞ Se un sistema (autonomo) è ***instabile*** tende ad allontanarsi dall'equilibrio per *qualsiasi* condizione iniziale
  - ✏ (salvo iniziare lungo un eventuale autovettore stabile)
- ☞ Nota: questo non è in generale vero
  - ✏ Per i sistemi con ingresso, perché un ingresso grande a piacere può portare lo stato lontano dall'equilibrio 0
  - ✏ Per i sistemi nonlineari, che possono avere più statti di equilibrio oltre a 0 e le traiettorie dipendono dalle condizioni iniziali
- ☞ Come si può prevedere se un sistema lineare autonomo è stabile?
  - ✏ ***Controllando i suoi autovalori, dato che la sua evoluzione dipende da questi***

Stabilità e autovalori

- Se l'evoluzione è esprimibile con gli autovalori

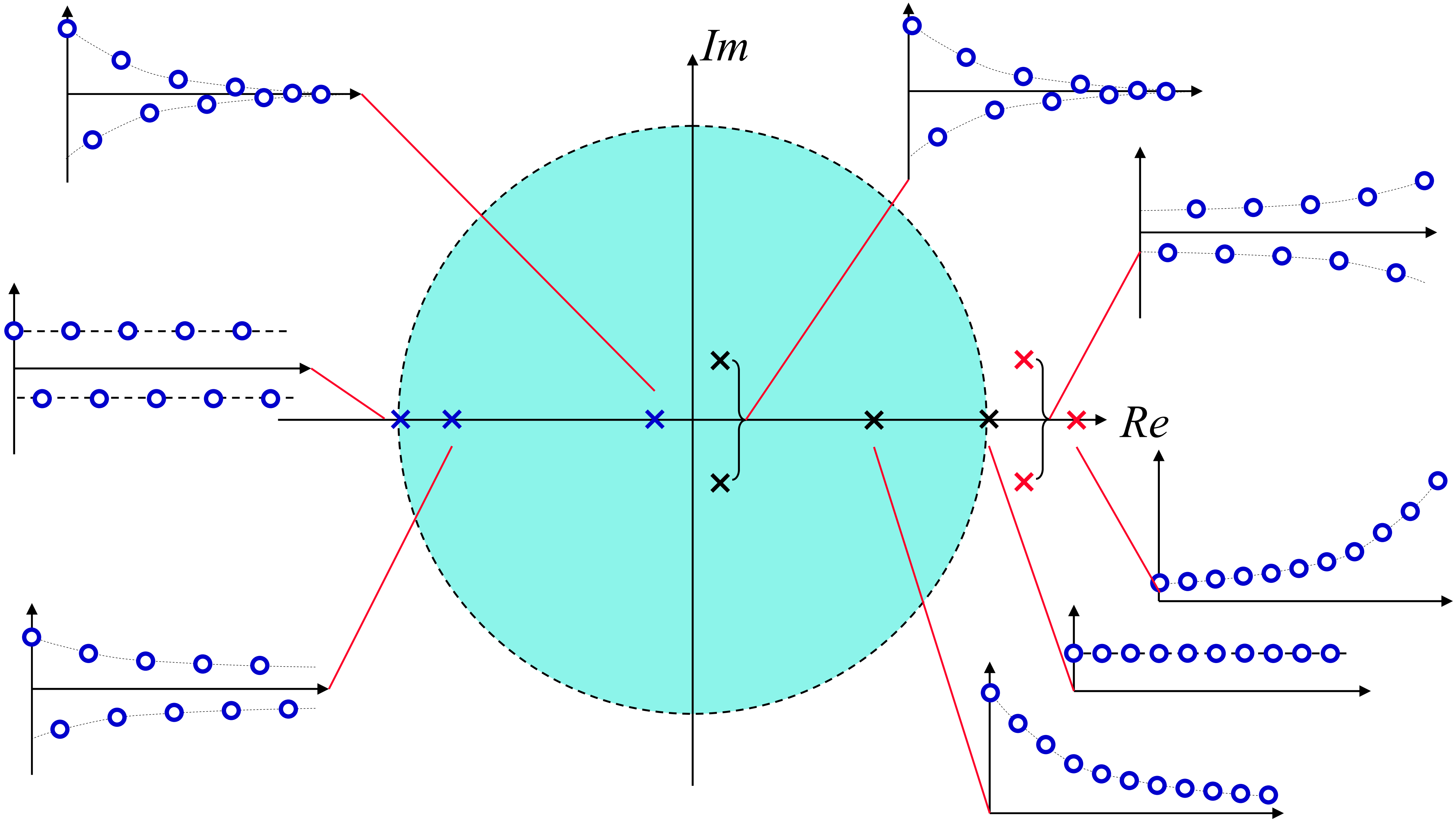
$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \lambda_i^t \boldsymbol{v}_i$$

- Ogni autovalore in modulo maggiore di 1 porta ad un'evoluzione crescente
- Ogni autovalore in modulo minore di 1 porta ad un'evoluzione decrescente

$$\boxed{\begin{array}{ll} |\lambda| < 1 & \textit{risposta asintoticamente stabile} \quad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0} \\ |\lambda| = 1 & m = 1 \ \textit{risposta semplicemente stabile} \\ |\lambda| > 1 & \textit{risposta instabile} \quad \boldsymbol{x} \to \pm\infty \end{array}}$$

- ***Attenzione:*** basta ***un solo*** autovalore instabile per destabilizzare l'intero sistema

Posizione degli autovalori e tipo di risposta



Autovalori della matrice A

☞ Si definisce polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A} \in R^{n \times n}$

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(q) = det(q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = q^n + a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \ldots + a_o$$

☞ Gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(q) = (q - \lambda_1)(q - \lambda_2)\ldots.(q - \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} (q - \lambda_i)$$

☞ Teor. di ***Cailey-Hamilton***: la matrice $\boldsymbol{A}$ soddisfa il proprio polinomio caratteristico

$$\boldsymbol{A}^n + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + a_{n-2}\boldsymbol{A}^{n-2} + \ldots + a_o\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

Qualche precisazione sul polinomio caratteristico

- Il polinomio caratteristico della matrice ***A*** è definito come

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(q) = det(q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = q^n + a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \ldots + a_o$$

- La matrice ***A*** ha coefficienti reali, perciò anche i coefficienti del polinomio ($a_{n-1}, \ldots, a_1, a_o$) sono reali e le sue radici sono essere ***Reali*** o ***Complesse coniugate***
- Data ***A***, si può trovare $\Delta_{\boldsymbol{A}}(q)$ applicando la definizione: calcolando $det(q\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$
- Dati gli autovalori ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) si può ricavare $\Delta_{\boldsymbol{A}}(q)$ uguagliando i termini di pari potenza *(principio di identità dei polinomi)*

$$\begin{aligned}\Delta_{\boldsymbol{A}}(q) &= (q-\lambda_1)(q-\lambda_2)\ldots\ldots(q-\lambda_n)\\ &= q^n + (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)q^{n-1} + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_1\lambda_n)q^{n-2} + \ldots + \lambda_1\lambda_2 .. \lambda_n\end{aligned}$$

$$a_{n-1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

$$a_{n-2} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_1\lambda_n$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_o = \lambda_1\lambda_2 .. \lambda_n$$

Relazioni fra matrice A, autovalori e pol. caratt.

definizione di polinomio caratteristico

$$[A] \longrightarrow \det(q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \longrightarrow \Delta_A(q) \longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Analisi

Sintesi

$$a_{n-1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

$$a_{n-2} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_1\lambda_n$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_o = \lambda_1\lambda_2..\lambda_n$$

principio di identità dei polinomi

Rappresentazioni canoniche per sistemi SISO

- In generale il sistema è definito da tre matrici $\boldsymbol{A} \in R^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in R^{n\times 1}$, $\boldsymbol{C} \in R^{1\times n}$
- Possono servire perciò fino a $n^2 + n + p$ coefficienti.
- *Domanda:* esiste una rappresentazione più "economica"?
- *Risposta:* si, esistono forme, dette *canoniche*, che minimizzano il numero di coefficienti
- Sono *due* le forme canoniche di interesse

1. Forma ***canonica controllabile***

   Utile per problemi di controllo = progettare un regolatore
2. Forma ***canonica di ricostruzione***

   Utile per problemi di ricostruzione dello stato = progettare un osservatore

Forma canonica controllabile (cc)

- Nella matrice $\boldsymbol{A}$ i parametri si riducono agli elementi dell'ultima riga, mentre la matrice $\boldsymbol{b}$ ha struttura obbligata (1 nell'ultima riga)

$$\boldsymbol{A}_c = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -a_o & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Essi sono collegati ai coefficienti del polinomio caratteristico $\Delta_{A_c}(q)$ essendo gli stessi coefficienti con il segno cambiato

$$\Delta_{A_c}(q) = q^n + a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_o$$

- La matrice $\boldsymbol{c_c}$ non ha alcuna restrizione

Forma canonica di ricostruzione (cr)

- Nella matrice $\boldsymbol{A}$ i parametri si riducono agli elementi dell'ultima colonna, mentre la matrice $\boldsymbol{b}$ è libera

$$\boldsymbol{A}_r = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_o \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{b}_r = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \dots \\ b_1 \\ b_o \end{bmatrix}$$

- Vale la stessa relazione fra coefficienti del polinomio caratteristico $\Delta_A(s_r)$ e coefficienti della matrice $\boldsymbol{A_r}$

$$\Delta_{A_r}(q) = q^n + a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_o$$

- La matrice $\boldsymbol{c_o}$ ha solo l'ultima componente pari ad 1

$$\boldsymbol{c}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relazione fra le due forme canoniche

☞ Per uno stesso sistema si può passare da una rappresentazione all'altra secondo le seguenti equivalenze

$$\boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{A}_c^{\,T} \qquad \boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{c}_c^{\,T} \qquad \boldsymbol{c}_r = \boldsymbol{b}_c^{\,T}$$

☞ Sistemi diversi per i quali valgono queste relazioni si dicono ***duali***

☞ In ogni caso il polinomio caratteristico è lo stesso

$$\Delta_{\boldsymbol{A}_c}(q) = \Delta_{\boldsymbol{A}_r}(q) = q^n + a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \ldots + a_o$$

☞ Perciò gli autovalori sono gli stessi

- Radici dell'equazione $det(s\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A}) = 0$

Similarità

- ☞ Il vettore di stato $\boldsymbol{x}$ è riferito ad una certa base
- ☞ Talvolta un cambio di base mette in evidenza caratteristiche importanti del sistema
- ☞ Si può effettuare un ***cambio di base*** $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$, che porta ad un cambiamento nelle matrici $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ che rappresentano il sistema
- ☞ Se $\boldsymbol{x}$ è lo stato riferito alla base di partenza e $\boldsymbol{z}$ quello riferito alla nuova base, se poniamo lo stato $\boldsymbol{x}$ in funzione di $\boldsymbol{z} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}$ si avrà

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t \\ y_t = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_t \end{cases} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} \end{matrix} \quad \begin{cases} \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}_{t+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{b}u_t \\ y_t = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}_t \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{z}_{t+1} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}u_t \\ y_t = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}_{t+1} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{\beta}u_t \\ y_t = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{z}_t \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}}$$

Similarità fra matrice diagonale e *cc*

- Se $\boldsymbol{A}$ è in forma *canonica controllabile* i suoi autovettori hanno la struttura seguente: potenze crescenti dei rispettivi autovalori

$$
\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \dots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \\ \dots \\ \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \quad \dots\dots \quad \boldsymbol{v}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \lambda_n^2 \\ \dots \\ \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}
$$

- La matrice di similitudine $\boldsymbol{T}$ è nella forma di *Matrice di Vandermonde*
- Perciò, trovati gli autovalori, la matrice di similitudine è subito determinata

$$
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1} \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}
$$

Esempio di similitudine cc→diag

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.2011 & 0.0479 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \lambda_1 = -0.4251 \quad \lambda_2 = 0.4731$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4251 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4731 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A(q) = q^2 + a_1 q + a_o = (q - \lambda_1)(q - \lambda_2) = q^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)q + \lambda_1\lambda_2$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \\ a_o &= \lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_o & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.2011 & 0.0479 \end{bmatrix}$$

Esempio di similitudine

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(-0.4251\times 0.4731\right) & -0.4251+0.4731 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.2011 & 0.0479 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.4251 & 0.4731 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 0.5267 & -1.1133 \\ 0.4733 & -1.1133 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.4251 & 0.4731 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -0.4251 & 0 \\ 0 & 0.4731 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0.5267 & -1.1133 \\ 0.4733 & -1.1133 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.2011 & 0.0479 \end{bmatrix}$$

Relazioni fra variabili di stato in forma *cc*

☞ Un sistema autonomo espresso in forma *canonica controllabile*

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \dots \\ x_{n-1}(t+1) \\ x_n(t+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -a_o & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{array}\right] \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

☞ Scritto per componenti è

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = x_3(t)$$

Ciascuna variabile di stato è la successiva al tempo precedente

.....

$$x_n(t+1) = -a_o x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{n-2} x_{n-1}(t) - a_{n-1} x_n(t)$$

Effetto della diagonalizzazione

☞ La trasformazione $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$ rende lo stato del sistema *diagonale*

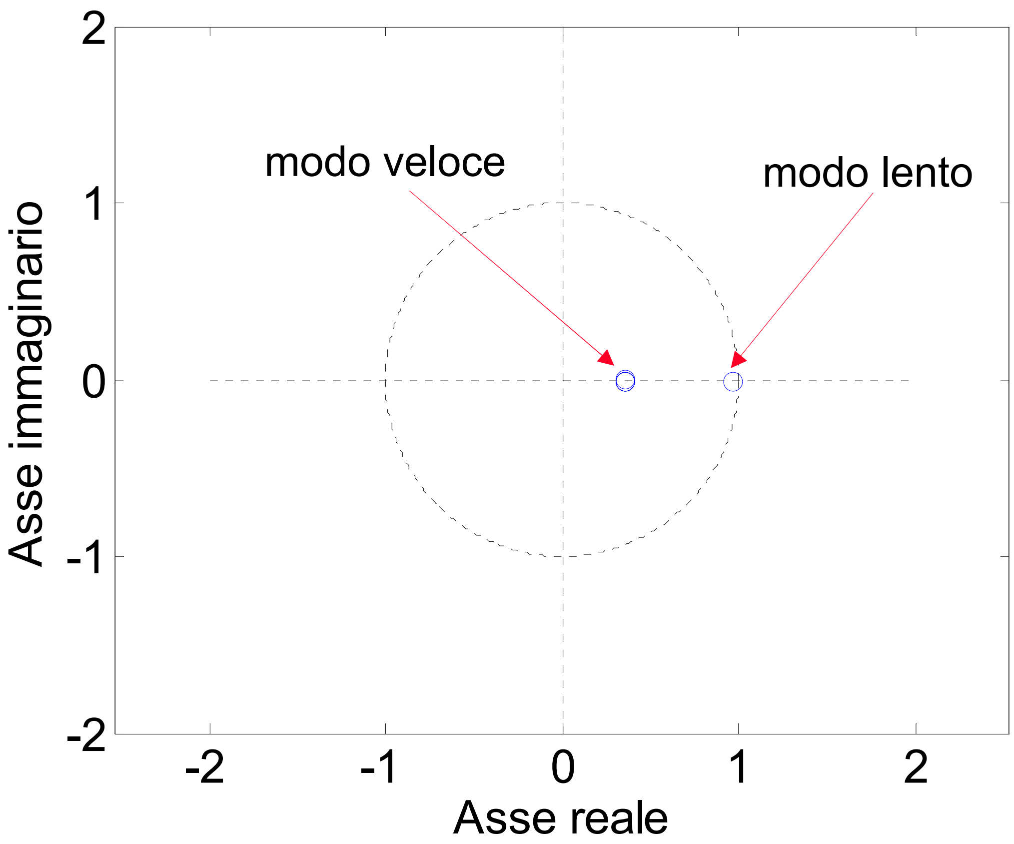
$$\begin{bmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \\ \cdots \\ z_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \cdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$$

☞ Ciò significa che nello spazio $\boldsymbol{Z}$ le variabili di stato evolvono ***indipendentemente*** l'una dall'altra

$$\begin{aligned} z_1(t+1) &= \lambda_1 \times z_1(t) \\ z_2(t+1) &= \lambda_2 \times z_2(t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n(t+1) &= \lambda_n \times z_n(t) \end{aligned}$$

☞ Si perdono i legami di interazione fra variabili di stato che esistevano nel riferimento originale $\boldsymbol{X}$

Esempi di risposta: due autovalori reali positivi



$\lambda_1 = 0.3533 \quad \lambda_2 = 0.9641$

Il primo autovalore rappresenta il "***modo veloce***" perché è più piccolo (vicino all'origine) mentre il secondo il "***modo lento***" perché più vicino al cerchio unitario

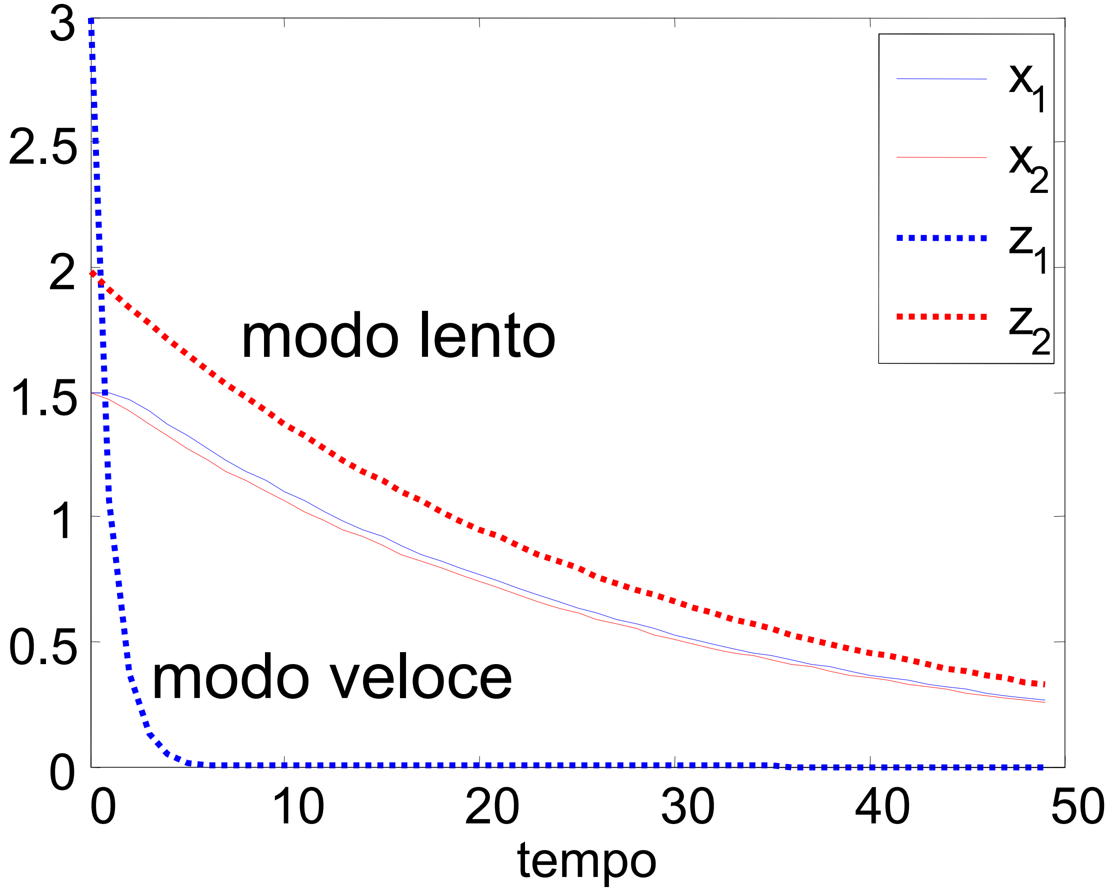
$$\begin{bmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

Modo veloce $z_1(t+1) = 0.3533 \times z_1(t)$

Modo lento $z_2(t+1) = 0.9641 \times z_2(t)$

Evoluzione indipendente nel modo “diagonale”

Nel riferimento *diagonale* i due modi evolvono in maniera indipendente



Cambiando riferimento $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$ con

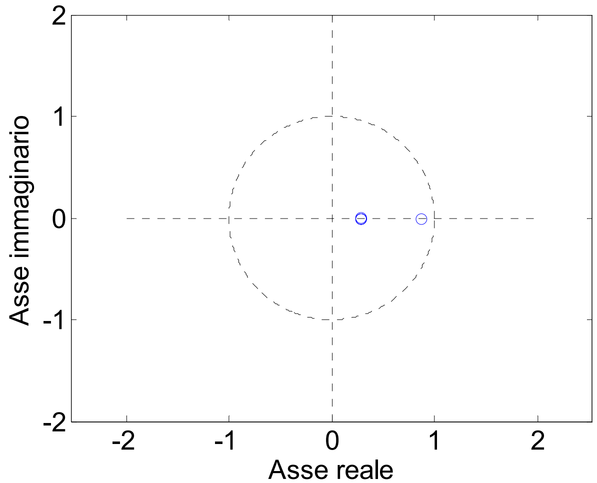
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.3533 & 0.9641 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3406 & 1.3174 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = -0.3406\,x_1(t) + 1.3174\,x_2(t)$$

Autovalori reali positivi

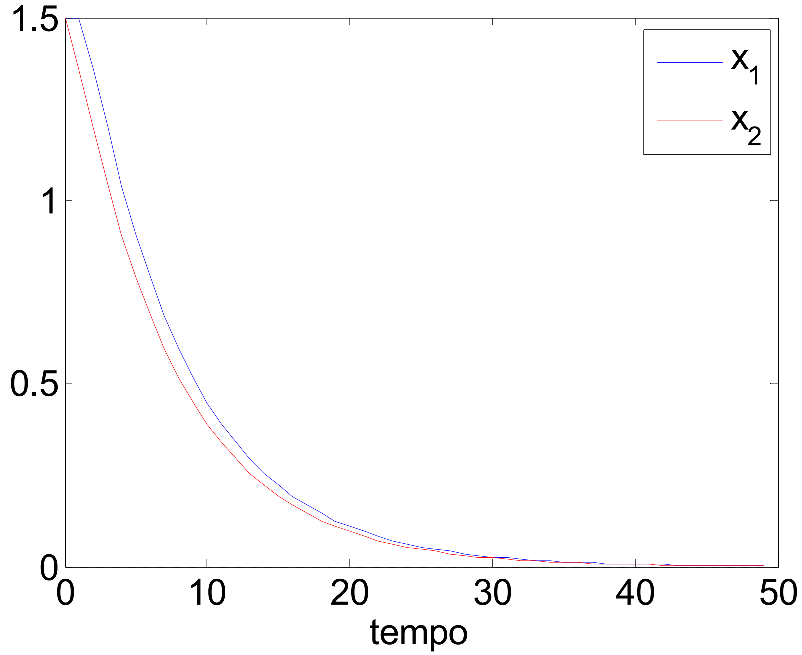


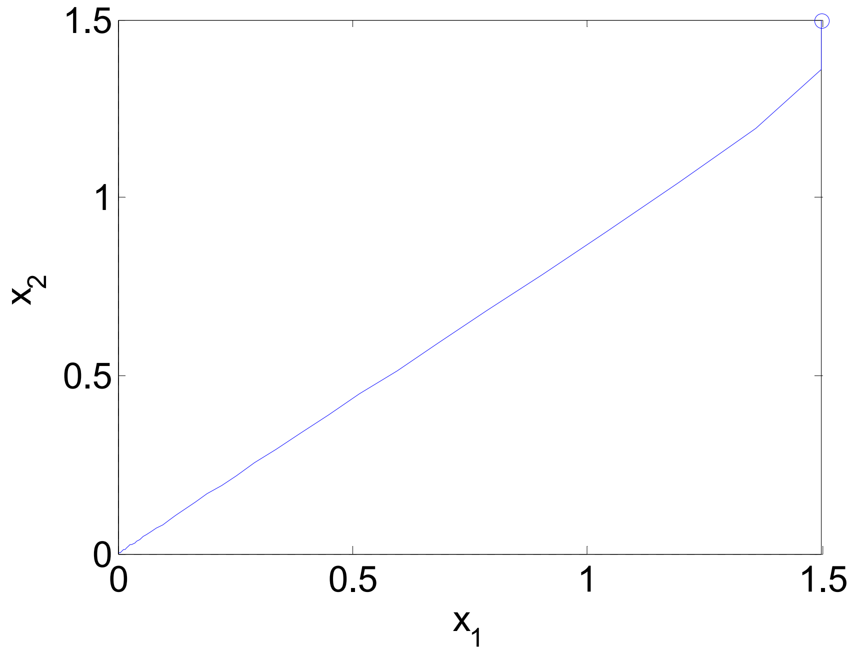
Comportamento stabile monotono

$$\lambda_1 = 0.2814 \quad \lambda_2 = 0.8683$$

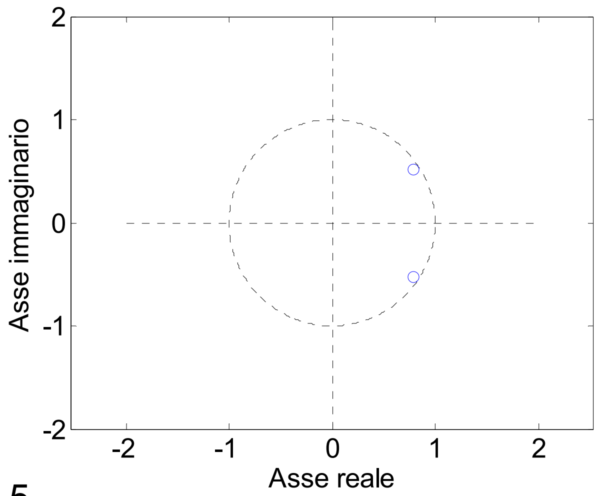
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2444 & 1.1497 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.9626 \\ -0.2709 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.7551 \\ -0.6556 \end{bmatrix}$$





Autovalori complessi a parte reale positiva

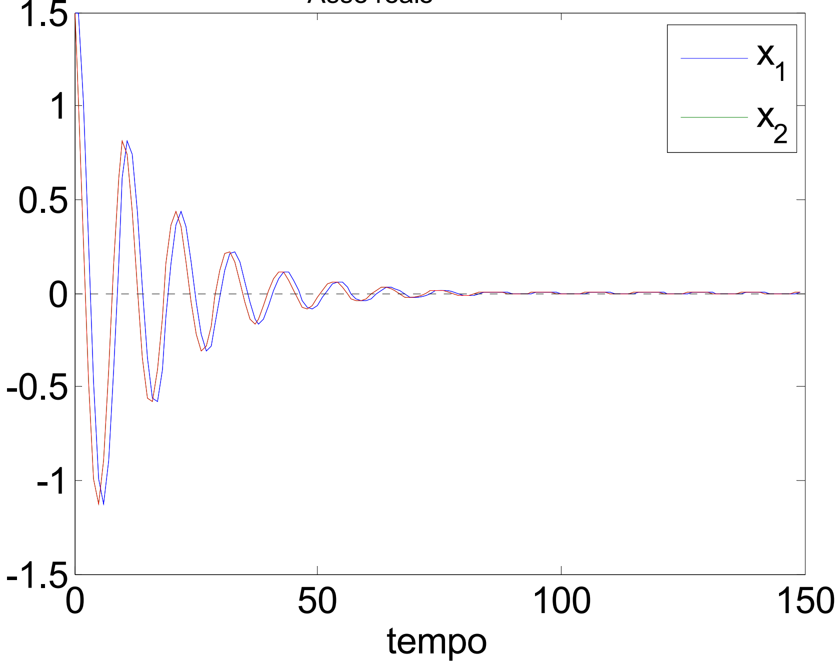


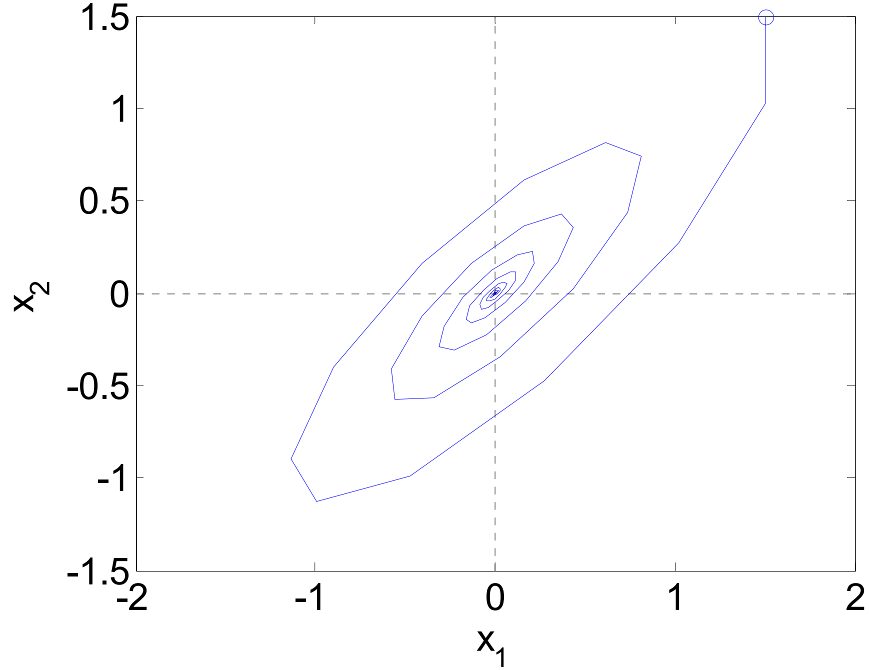
$$\lambda_{1,2} = 0.7844 \pm j\,0.5210$$

Comportamento stabile oscillatorio

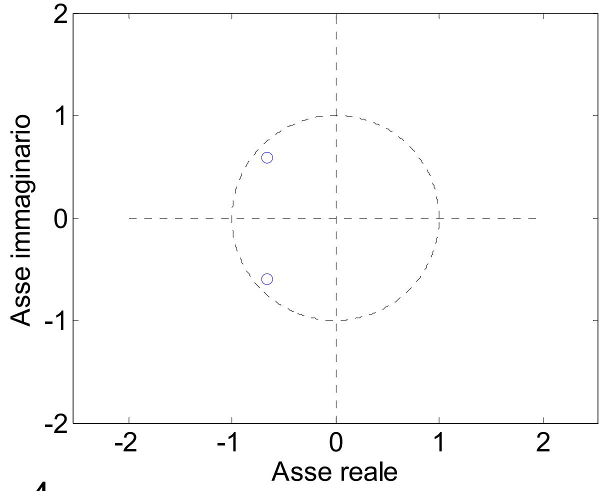
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.8867 & 1.5689 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.7280 \\ 0.5711 + j0.3793 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.7280 \\ 0.5711 - j0.3793 \end{bmatrix}$$





Autovalori complessi a parte reale negativa

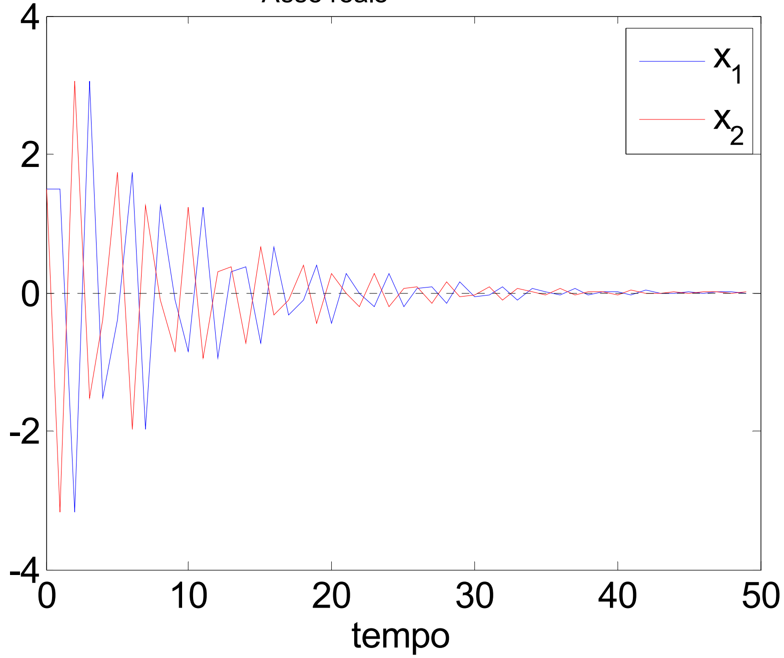


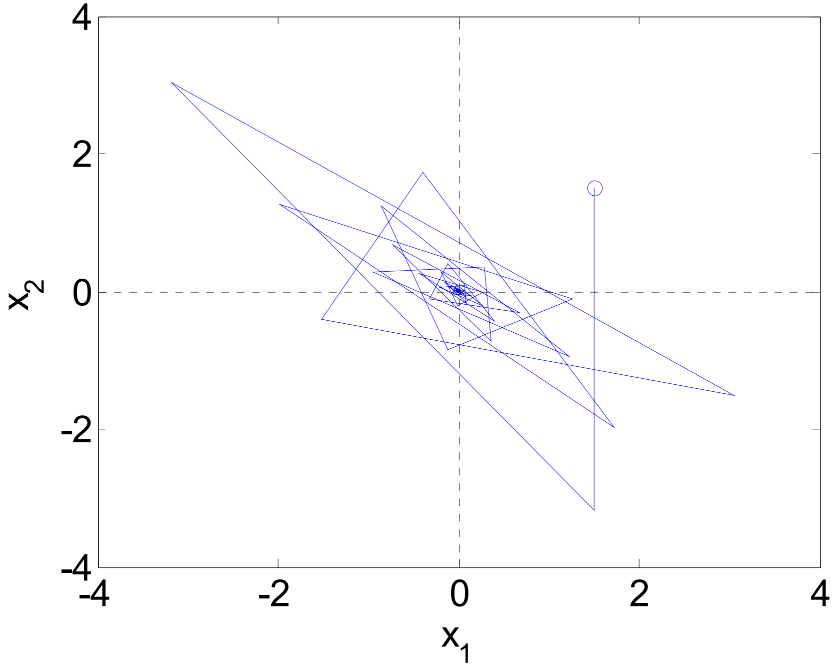
$$\lambda_{1,2} = -0.6647 \pm j\,0.5928$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7932 & -1.3293 \end{bmatrix}$$

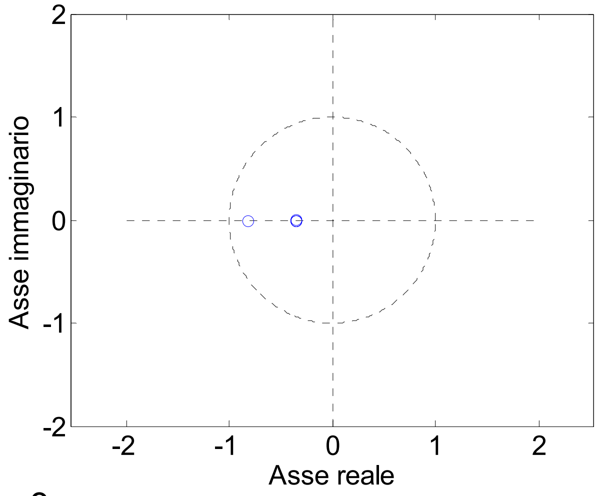
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.7468 \\ -0.4964 + j0.4427 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.7468 \\ -0.4964 - j0.4427 \end{bmatrix}$$

Comportamento stabile oscillatorio





Autovalori reali negativi

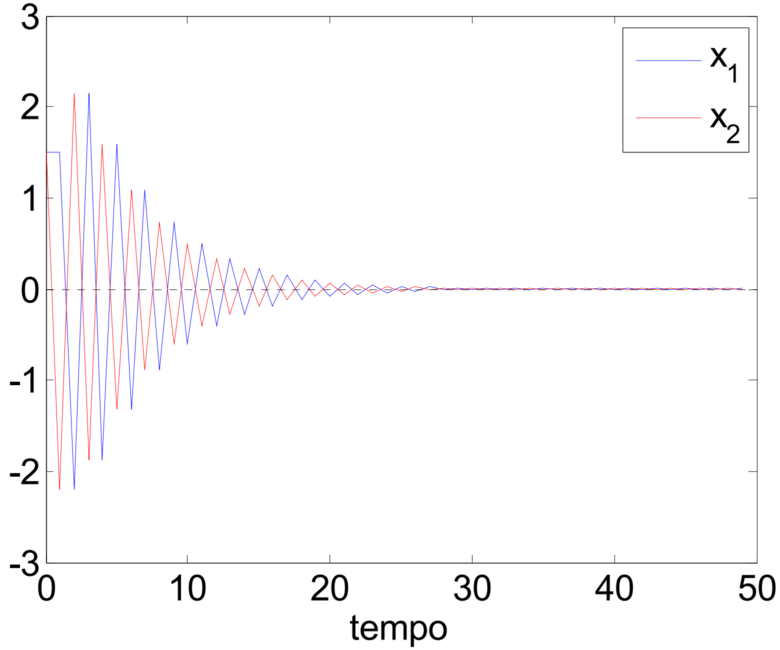


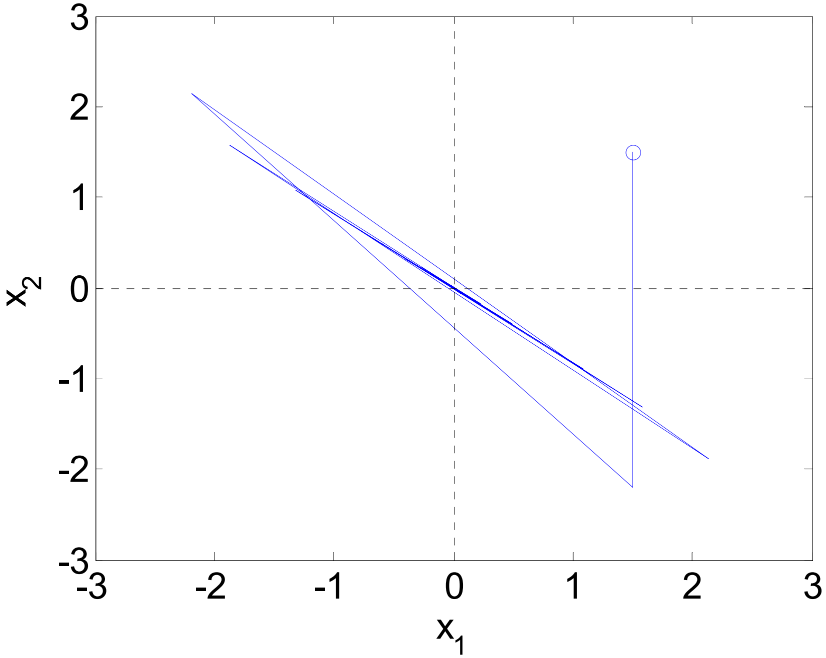
Comportamento stabile oscillatorio

$$\lambda_1 = -0.3533 \quad \lambda_2 = -0.8204$$

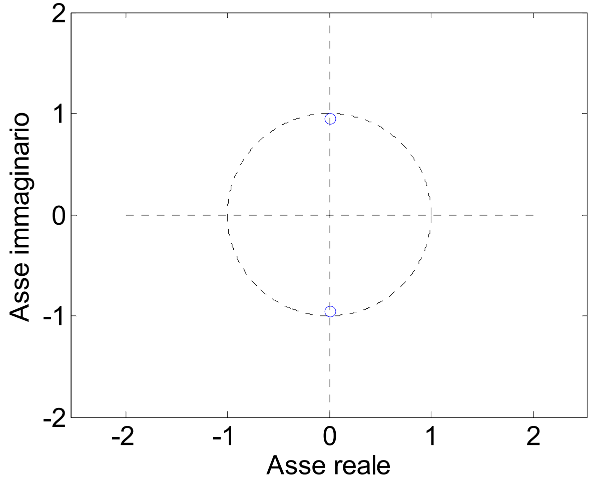
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2898 & -1.1737 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.9429 \\ -0.3331 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.7731 \\ 0.6342 \end{bmatrix}$$





Autovalori immaginari coniugati (entro il cerchio)

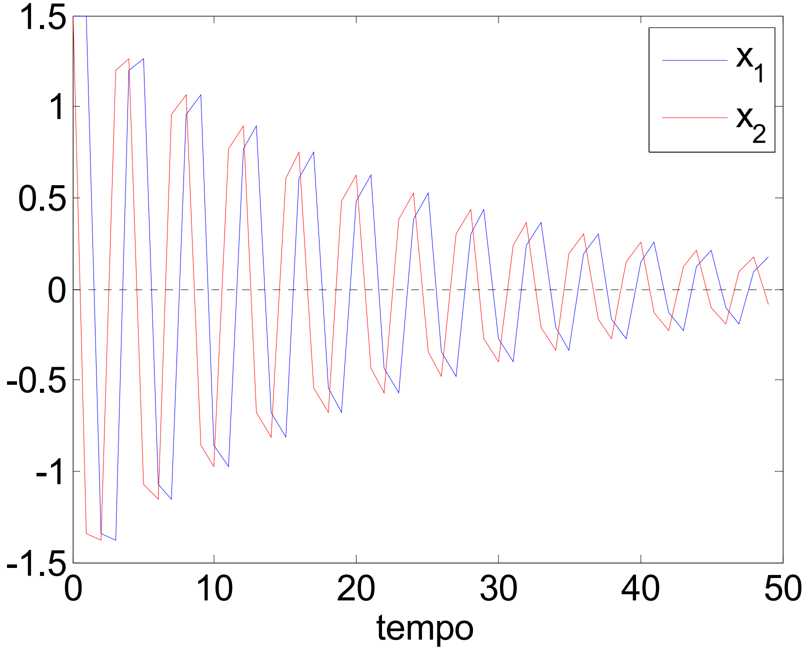


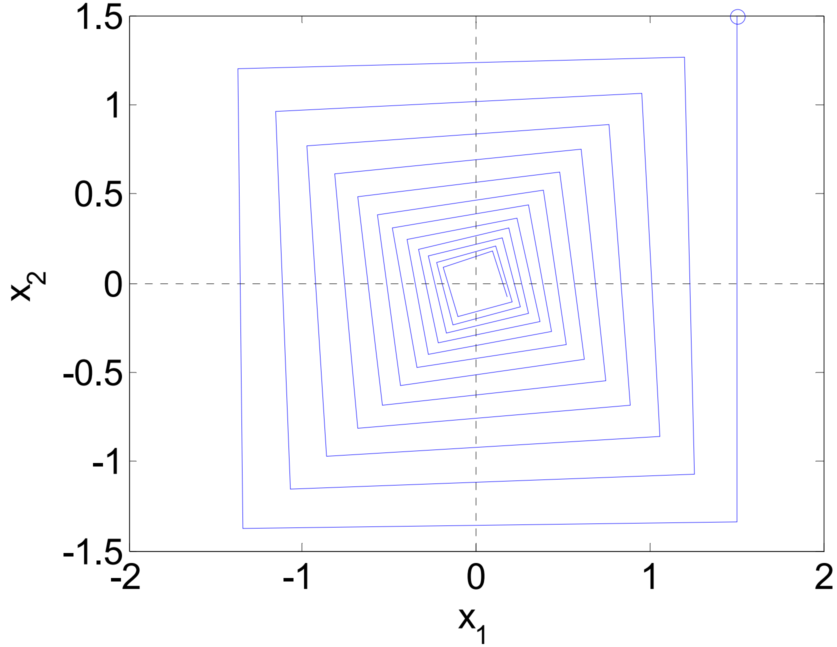
Comportamento (poco) stabile (molto) oscillatorio

$$\lambda_1 = \ j0.9521 \quad \lambda_2 = -\ j0.9521$$

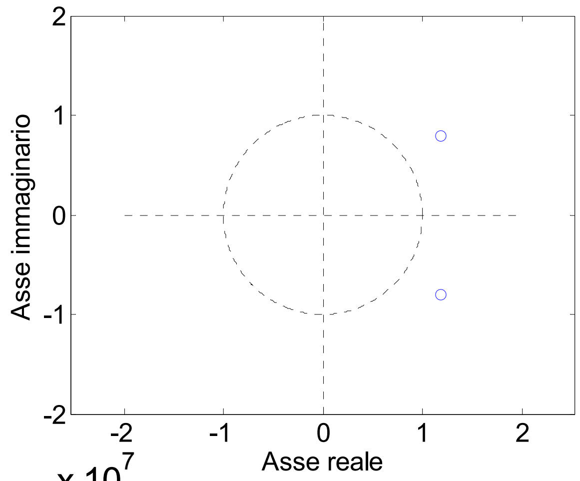
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9065 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.7242 \\ j0.6895 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.7242 \\ -\ j0.6895 \end{bmatrix}$$





Autovalori immaginari coniugati (fuori dal cerchio)

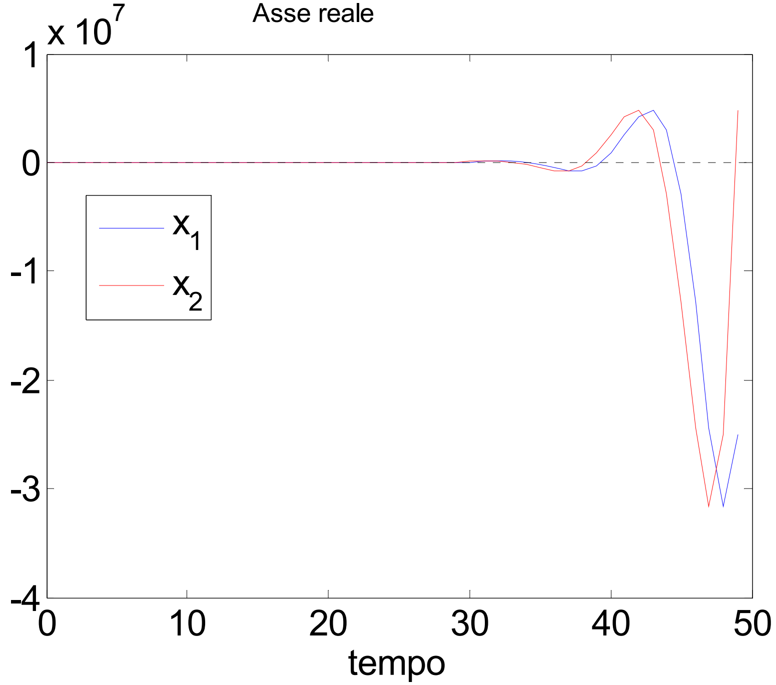


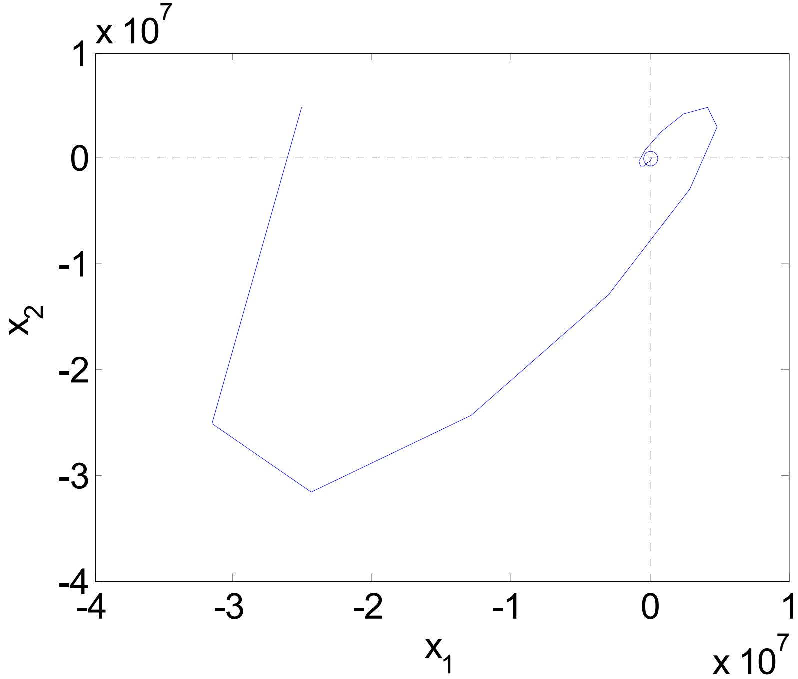
Comportamento instabile oscillatorio

$$\lambda_1 = \quad 1.1796 + j0.7964 \quad \lambda_1 = 1.1796 - j0.7964$$

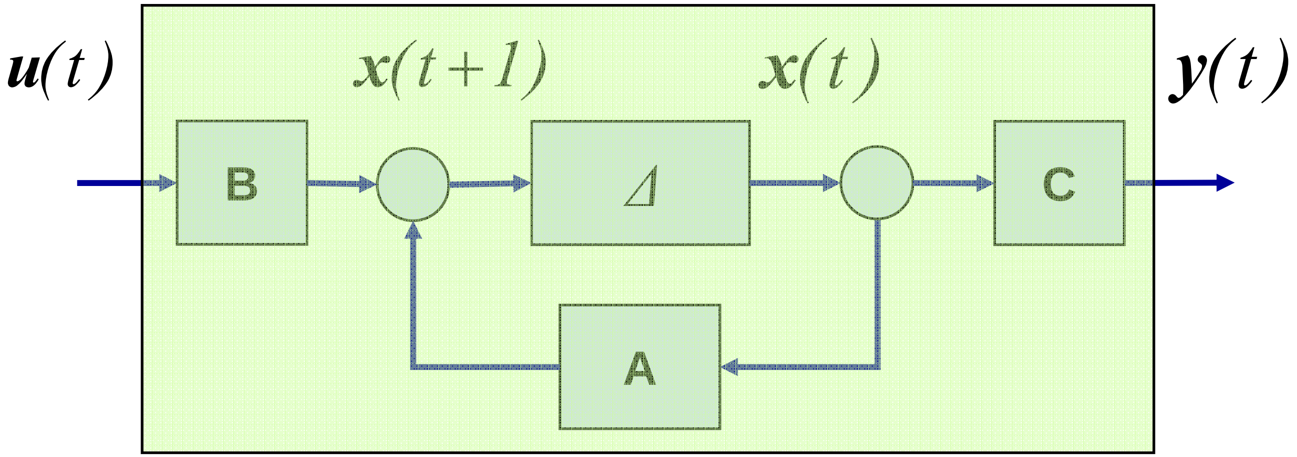
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.0258 & 2.3593 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.4765 - j0.3217 \\ 0.8182 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.4765 + j0.3217 \\ 0.8182 \end{bmatrix}$$





Rappresentazione esterna (I/O)



- ***Rappresentazione che lega direttamente gli ingressi alle uscite***
- Si perde la nozione di ***stato*** del sistema, come memoria del sistema
- Per mantenere la dinamica si devono *ricordare* un maggior numero di ingressi ed uscite passate
- Nel caso SISO tali modelli vengono anche chiamati ARMA:
  - $\underbrace{\text{Auto Regressive}}_{\text{Uscite y}}\ \underbrace{\text{Moving Average}}_{\text{Ingressi u}}$

Passaggio da rappresentazione interna ad esterna

- ☞ Dato un sistema SISO in forma di stato (interna)

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}\,u_t \\ y_t = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}_t \end{cases}$$

- ☞ Si può introdurre l'operatore anticipo q: $q\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_{t+1}$ esprimendo lo stato come

$$q\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}\,u_t \rightarrow (q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{b}\,u_t \rightarrow \boldsymbol{x}_t = (q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\,u_t$$

- ☞ Introducendo l'uscita $y = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}$, si può ricavare un legame diretto ingresso-uscita $y_t = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{c}(q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\,u_t$
- ☞ Questa relazione coinvolge ingressi ed uscite passate a causa della matrice polinomiale

$$(q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\boldsymbol{P}(q)}{det(q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})} = \frac{\boldsymbol{P}(q)}{\Delta_A(q)}$$

Formula di Souriau per il calcolo di $(q\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$

- Si consideri che
  - Il denominatore è, per definizione, il polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$, $\Delta_A(q)$
  - Il numeratore è un polinomio di ordine $n-1$ (se $\boldsymbol{A}$ è $n \times n$)

$$(q\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\boldsymbol{P}(q)}{\Delta_A(q)} \quad \begin{cases} \boldsymbol{P}(q) = \boldsymbol{P}_1 q^{n-1} + \boldsymbol{P}_2 q^{n-2} + \ldots + \boldsymbol{P}_n \\ \Delta_A(q) = q^n + \alpha_1 q^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} q + \alpha_n \end{cases}$$

- Schema iterativo per il calcolo simultaneo del numeratore e del denominatore

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{I} \qquad \alpha_1 = -tr(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} + \alpha_1\boldsymbol{I} \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{2}tr(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A} + \alpha_2\boldsymbol{I} \qquad \alpha_3 = -\frac{1}{3}tr(\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A})$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}_{n-1}\boldsymbol{A} + \alpha_{n-1}\boldsymbol{I} \qquad \alpha_n = -\frac{1}{n}tr(\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{A})$$

Rappresentazione esterna

☞ La rappresentazione esterna (ingresso-uscita) può essere allora scritta come ***funzione di trasferimento*** (quoziente fra polinomi)

$$y_t = \boldsymbol{c}(q\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\,u_t \rightarrow y_t = \boldsymbol{c}\frac{\boldsymbol{P}(q)}{\Delta_{\boldsymbol{A}}(q)}\boldsymbol{b}\,u_t \rightarrow y_t = \frac{N(q)}{D(q)}u_t$$

☞ Riducendo a forma intera si ha il ***modello ARMA***

$$D(q)\cdot y_t = N(q)\cdot u_t \rightarrow \Delta_{\boldsymbol{A}}(q)\cdot y_t = \boldsymbol{cP}(q)\boldsymbol{b}\cdot u_t$$

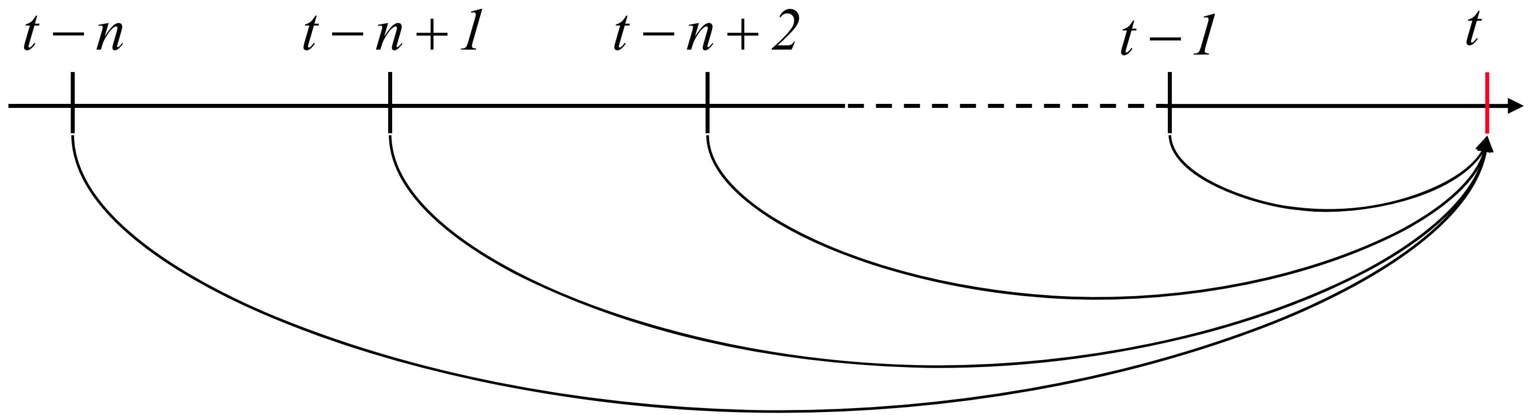
☞ Esplicitamente, ricordando la funzione dell'operatore anticipo *q*

$$\boxed{y_{t+n} + \alpha_1 y_{t+n-1} + \ldots + \alpha_n y_t = \beta_1 u_{t+n-1} + \ldots + \beta_n u_t}$$

✏ Con $(\beta_1 \ldots \beta_n)$ coefficienti della parte MA, ottenuti da $\boldsymbol{cP}(q)\boldsymbol{b}$

Modello ARMA come predittore a un passo

- Se si fissa (convenzionalmente) il tempo corrente a *t*, il modello ARMA fornirà la predizione dell'uscita a questo istante *t*, basandosi su ingressi e uscite dal tempo *t-1* indietro fino a *t-n*



- Il modello si può allora riscrivere avendo come riferimento il tempo *t*

$$\boxed{y_t = -\alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \ldots - \alpha_n y_{t-n} + \beta_1 u_{t-1} + \ldots + \beta_n u_{t-n}}$$

- Ciò equivale ad usare l'operatore *ritardo* (q^{-1}), reciproco dell'operatore *anticipo* (q)

Esempio di passaggio ISO →IO

$$\Sigma \sim (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ 0.6 & -0.2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Applicando ricorsivamente la formula di Souriau per $n = 2$

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -tr(\boldsymbol{A}) \\ &= -tr\left(\begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ 0.6 & -0.2 \end{bmatrix}\right) \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_2 &= \boldsymbol{A} + \alpha_1 \boldsymbol{I} \\ &= \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ 0.6 & -0.2 \end{bmatrix} + 0.6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{1}{2} tr(\boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{A}) \\ &= -\frac{1}{2} tr\left(\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ 0.6 & -0.2 \end{bmatrix}\right) \\ &= -0.22 \end{aligned}$$

Modello ARMA

$$\Delta_A(q) = q^2 + \alpha_1 q + \alpha_2 \qquad \boldsymbol{P}(q) = \boldsymbol{P}_1 q + \boldsymbol{P}_2$$

$$\alpha_1 = 0.6 \quad \alpha_2 = -0.22 \qquad \boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

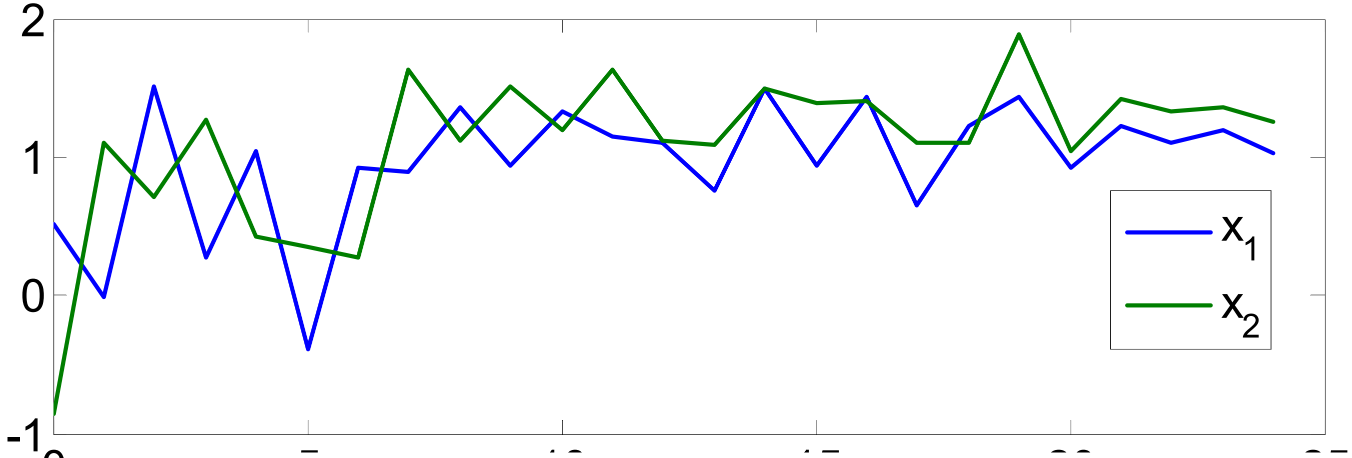
$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -0.3$$

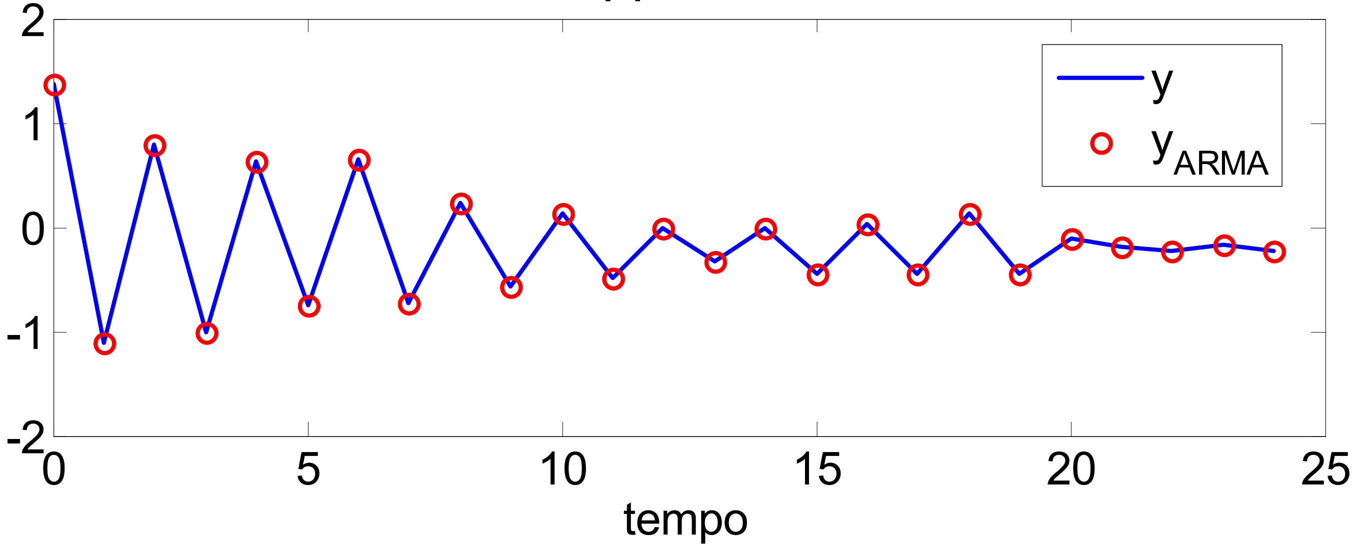
$$y_{t+2} = -\alpha_1 y_{t+1} - \alpha_2 y_t + \beta_1 u_{t+1} + \beta_2 u_t$$

$$\boxed{y_{t+2} = -0.6\, y_{t+1} + 0.22\, y_t - 0.3 u_t}$$

Simulazione con un ingresso casuale



L'uscita del modello ARMA coincide con l'uscita del modello a rappresentazione interna



Inclusione degli ingressi

- Finora si sono considerati sistemi autonomi ($\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\, x_t$)
- Se consideriamo il sistema completo, con ingressi esterni

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\, x_t + \boldsymbol{B}\, u_t$$

- *Cosa cambia?*
- Cose che non cambiano
  - La ***Stabilità***: è una proprietà interna
    - Ciò non impedisce al sistema con ingressi di raggiungere uno stato illimitato se l'ingresso è illimitato...
- Cose che cambiano:
  - La ***risposta globale***: bisogna includere il contributo degli ingressi
  - L'***equilibrio***: dipende dal valore degli ingressi
    - Ha senso solo per ingressi stazionari

Evoluzione di un sistema forzato (con ingressi)

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_o = \Phi(1,0)\boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_o\right] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1 \\ &= \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_o + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1 \\ &= \boldsymbol{\Phi}(2,0)\boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{\Phi}(1,0)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_o + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1\end{aligned}$$

Somma con potenze di A decrescenti che moltiplicano ingressi più recenti

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_o + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1\right] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_2 \\ &= \boxed{\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_o + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_2} \\ &= \boldsymbol{\Phi}(3,0)\boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{\Phi}(2,0)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_o + \boldsymbol{\Phi}(1,0)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_2\end{aligned}$$

Generalizzando

- Il forzante ***u*** compare nella somma di convoluzione al secondo termine
- Gli ingressi più “vecchi” sono pesati da potenze maggiori della matrice ***A***

$$\boldsymbol{x}_t = \underbrace{\boldsymbol{A}^t \boldsymbol{x}_o}_{Evoluzione\ \ libera} + \underbrace{\sum_{i=0}^{t-1} \boldsymbol{A}^{t-(i+1)} \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i}_{Effetto\ \ dell'ingresso}$$

- La risposta del sistema si compone di due termini
  - L’***evoluzione libera***, che dipende solo dalla dinamica ***A*** e dalle condizioni iniziali $\boldsymbol{x}_o$
  - Il ***termine forzante***, che dipende da tutti gli ingressi passati

Equilibrio di sistemi t-d forzati

- ☞ L'equilibrio dipende dal valore dell'ingresso (costante) attraverso $\boldsymbol{B}$
- ☞ La stabilità dipende ancora dagli autovalori di $\boldsymbol{A}$
- ☞ Diversamente dai sistemi autonomi, si possono avere equilibri non nulli
- ☞ Se al sistema, supposto stabile, viene applicato un ingresso costante $\overline{\boldsymbol{u}}$ lo stato si porterà al valore $\overline{\boldsymbol{x}}$ e la coppia $\left(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{u}}\right)$ dovrà soddisfare l'equazione

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{u}}$$

- ☞ Da cui noto l'ingresso di equilibrio si può ricavare lo stato di equilibrio

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{u}}$$

Esempio di calcolo dell'equilibrio

$$\lambda_1 = 0.4 \quad \lambda_2 = 0.6$$

Sistema stabile, risposta monotona perché gli autovalori sono positivi

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.24 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times u(t)$$

Il valore di equilibrio dello stato per un ingresso costante è indipendente dalla condizione iniziale

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B} \bar{\boldsymbol{u}}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.24 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times 1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4.1667 \\ -1.0000 & 4.1667 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times 1$$

$$= \begin{bmatrix} 8.3333 \\ 7.3333 \end{bmatrix}$$ ←Equilibrio per u = 1