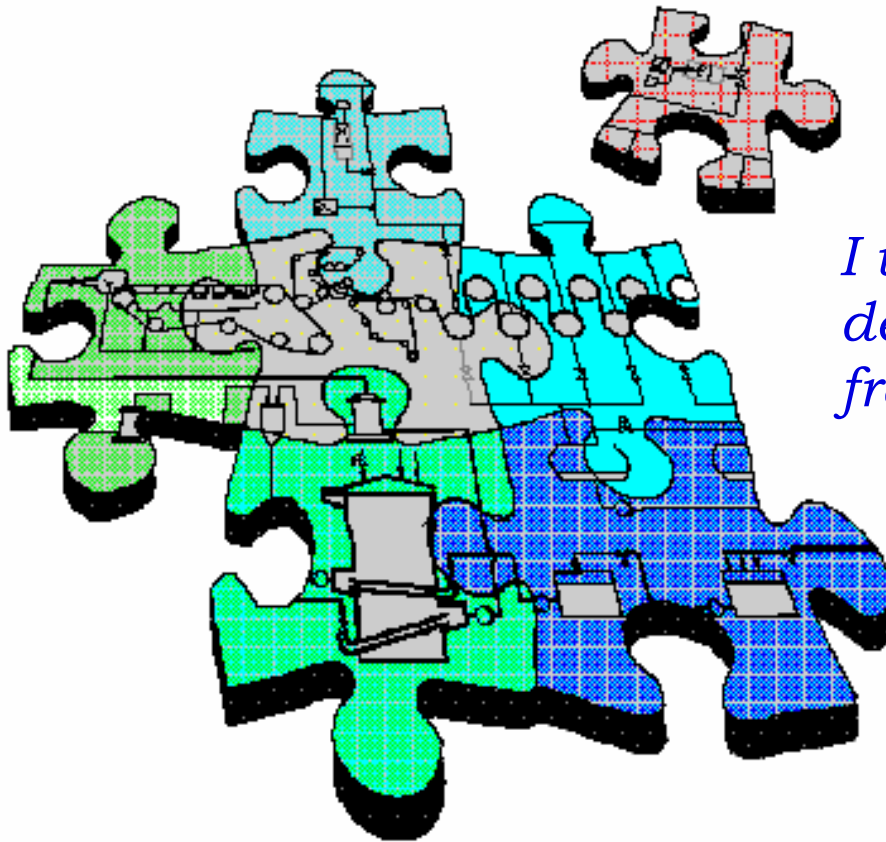

MODELLI DI PROCESSO

Concetti di base per lo
sviluppo di modelli
deterministici di processi
continui


Modularità

*Nel costruire modelli di processo
è importante la **modularità***




*I vari sottomodelli
devono potersi integrare
fra di loro*

Modelli di processo

 **MODELLI DI SIMULAZIONE:** Modelli molto dettagliati, basati su principi meccanicistici (descrizione dei principi di funzionamento)

Sono utili per:

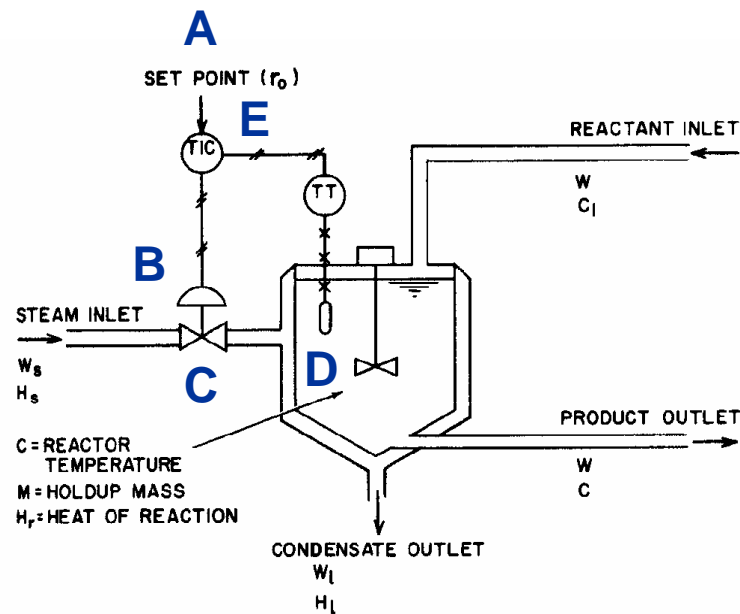
- Lo studio del processo a livello industriale avanzato
- L'addestramento del personale di conduzione
- Il collaudo preliminare dei regolatori

 **MODELLI PER IL CONTROLLO:** Sono generalmente semplificati, includono solamente le dinamiche principali, non tentano di spiegare ogni principio meccanistico del processo

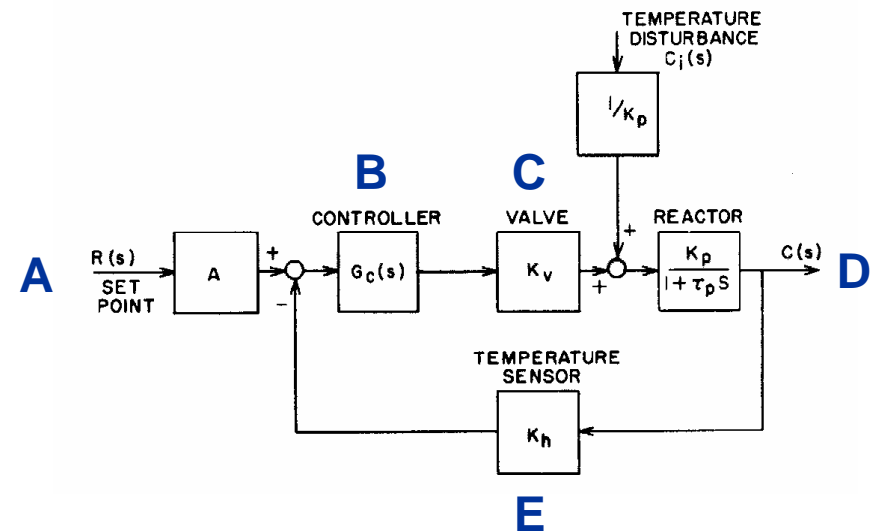
- Possono essere non deterministici (es. modelli stocastici, reti neurali)
- Possono essere di tipo “Intelligenza Artificiale” includendo basi di conoscenza (es. Modelli Fuzzy)

Modelli di Processo

Il compito della modellistica di processo è la traduzione dello **schema di processo** in **schema di controllo** e viceversa



SCHEMA DI PROCESSO

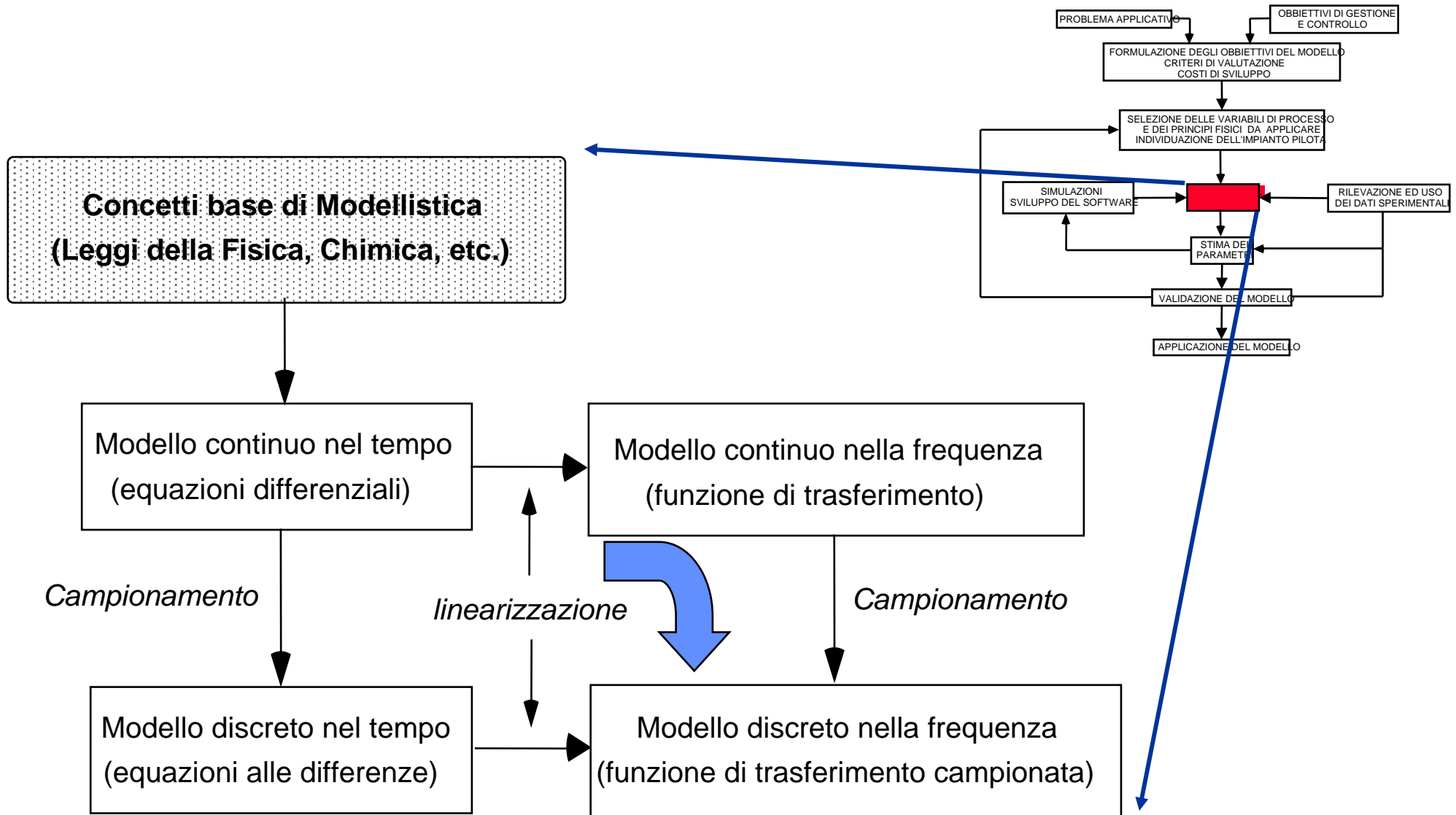


SCHEMA DI CONTROLLO

Tipi di modelli dinamici

Processo	Modello	Esempio
Processi continui a parametri concentrati	Equazioni differenziali ordinarie Funzione di trasferimento (Trasformata di Laplace)	$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t)$ $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-s\theta}$
Processi continui a parametri distribuiti	Equazioni differenziali alle derivate parziali Equazione differenziale Parziale tempo-continua (Trasformata di Laplace)	<p>Eq. di diffusione</p> $\frac{\partial x}{\partial t} = -u \frac{\partial x}{\partial z} + D \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - f(x)$ $\frac{dX(s,t)}{dt} = f\{X(s,t)\}$
Processi campionati a parametri concentrati	Equazioni alle differenze finite Funzione di trasferimento tempo-discreta (Trasformata Z)	$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots$ $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$
Processi campionati a parametri distribuiti	Equazioni agli elementi finiti	$y(k, j) = a_{1,1} y(k-1, j-1) + a_{1,2} y(k-1, j-2) + \dots$ $+ a_{2,1} y(k-2, j-1) + a_{2,2} y(k-2, j-2) + \dots$ $+ b_{0,0} u(k, j) + b_{1,0} u(k-1, j) + \dots$

SVILUPPO DI UN MODELLO



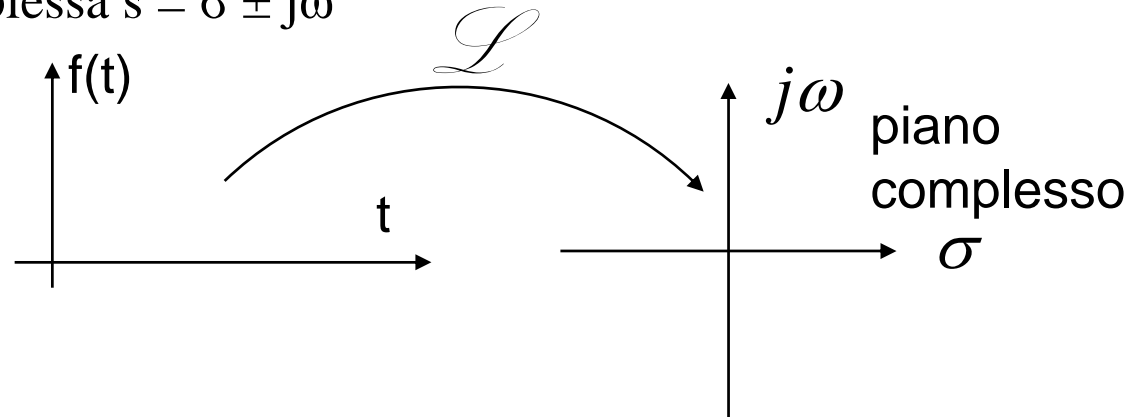
Passaggio dal tempo alla frequenza

- ❑ Generalmente i modelli “nascono” nel dominio del tempo
 - Equazioni differenziali
- ❑ Attraverso la **Trasformata di Laplace** si trasportano nel dominio della frequenza
- ❑ Si introduce la frequenza complessa $s = \sigma \pm j\omega$

- σ = parte reale
- ω = parte immaginaria

- ❑ Introduzione della trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}: \frac{d}{dt} \rightarrow s \quad \int dt \rightarrow \frac{1}{s}$$



- ❑ Attraverso questi operatori
 - La derivata diviene una moltiplicazione per la frequenza complessa s
 - L'integrale diviene una divisione per la frequenza complessa s
- ❑ Un sistema di equazioni differenziali diviene un sistema algebrico
 - **Il metodo è applicabile solo a sistemi lineari**

Esempio

□ Sia dato il modello di CSTR

- Se la cinetica è del primo ordine e l'ingresso è la concentrazione di alimentazione, il sistema è lineare

$$\frac{dC}{dt} = \frac{F}{V} C_i - \frac{F}{V} C - kC = \frac{F}{V} C_i - \left(\frac{F}{V} + k \right) C = qC_i - (q + k)C$$

□ Applicando la trasformata di Laplace alla variabile di processo
 $C(t) \rightarrow C(s)$

$$\mathcal{L}[\bullet] \rightarrow sC(s) = qC(s) - (q + k)C(s) \rightarrow \frac{C(s)}{C_i(s)} = \frac{q}{s + (q + k)}$$

□ La Funzione di Trasferimento è il quoziente fra ingresso ed uscita, in termini di grandezze trasformate

Linearizzazione della dinamica del CSTR

Scelta una coppia di equilibrio $\{q_o, C_{i_o}\} \rightarrow C_o$ si considerano gli incrementi $\{\tilde{q}, \tilde{C}\}$ intorno ad essa, ottenendo il sistema linearizzato

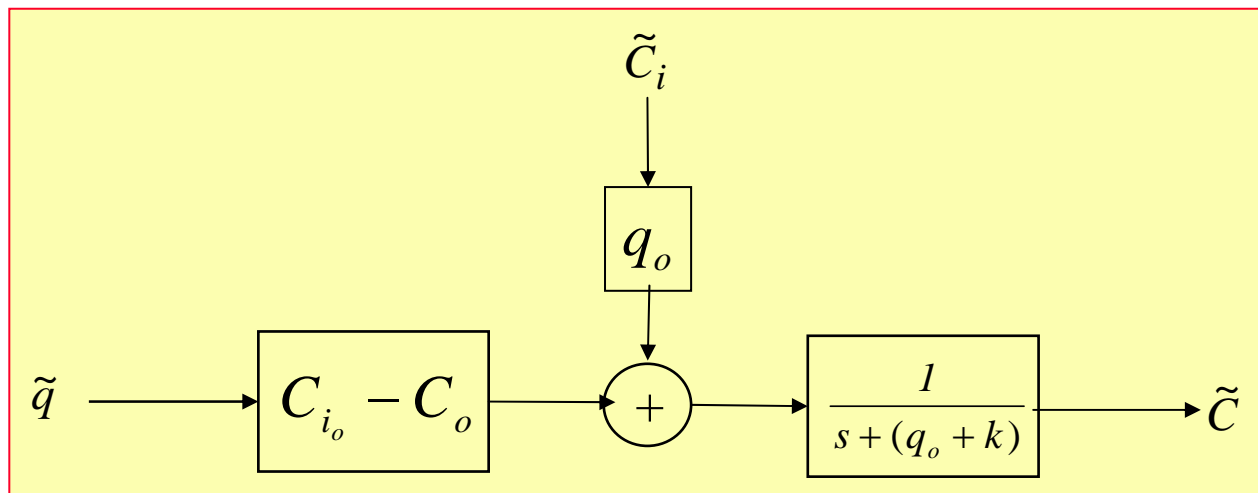
$$\dot{\tilde{C}} = \left. \frac{\partial f}{\partial C} \right|_{C_o} \tilde{C} + \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q_o} \tilde{q} + \left. \frac{\partial f}{\partial C_i} \right|_{C_{i_o}} \tilde{C}_i$$

$$\left. \begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial C} \right|_{C_o} &= -(q_o + k) \\ \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q_o} &= C_{i_o} - C_o \\ \left. \frac{\partial f}{\partial C_i} \right|_{C_{i_o}} &= q_o \end{aligned} \right\}$$



$$\dot{\tilde{C}} = -(q_o + k)\tilde{C} + (C_{i_o} - C_o)\tilde{q} + q_o\tilde{C}_i \rightarrow$$

$$\begin{cases} \tilde{C} = \frac{C_{i_o} - C_o}{s + (q_o + k)} \\ \tilde{q} \\ \tilde{C}_i = \frac{q_o}{s + (q_o + k)} \end{cases}$$



Linearizzazione di una cinetica del 2° ordine

Nel caso di cinetica del *secondo ordine*, il modello del processo è

$$\frac{dC}{dt} = qC_i - qC - kC^2 \quad q = \frac{F}{V}$$

L'equilibrio si ottiene risolvendo la seguente equazione di secondo grado

$$kC_o^2 + q_o C_o - q_o C_{i_o} = 0$$

che ha un'unica soluzione ammissibile ($C_o > 0$)

$$C_o = \frac{-q_o + \sqrt{q_o^2 + 4kq_o C_{i_o}}}{2k}$$

Il modello linearizzato è dato da

$$\dot{\tilde{C}} = \left. \frac{\partial f}{\partial C} \right|_{C_o} \tilde{C} + \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q_o} \tilde{q} + \left. \frac{\partial f}{\partial C_i} \right|_{C_{i_o}} \tilde{C}_i$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial f}{\partial C} \right|_{C_o} = -(q_o + 2kC_o) \\ \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q_o} = C_{i_o} - C_o \\ \left. \frac{\partial f}{\partial C_i} \right|_{C_{i_o}} = q_o \end{array} \right.$$

Paragone fra modello nonlineare e linearizzato del 2° ordine

Modello linearizzato non considerando il disturbo \tilde{C}_i ($\tilde{C}_i = 0$)

$$\dot{\tilde{C}} = -(q_o + 2kC_o)\tilde{C} + (C_{i_o} - C_o)\tilde{q}$$

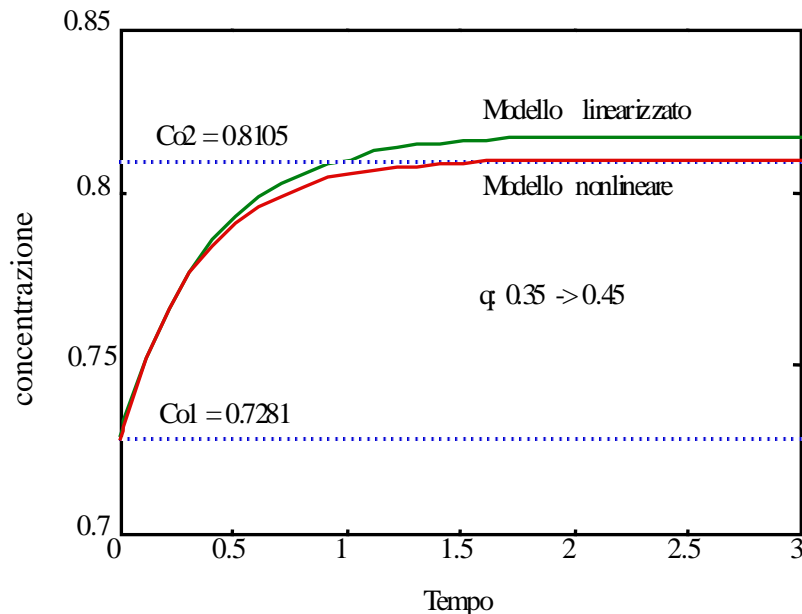
Modello nonlineare del 2° ord.

$$\dot{C} = qC_i - qC - kC^2$$

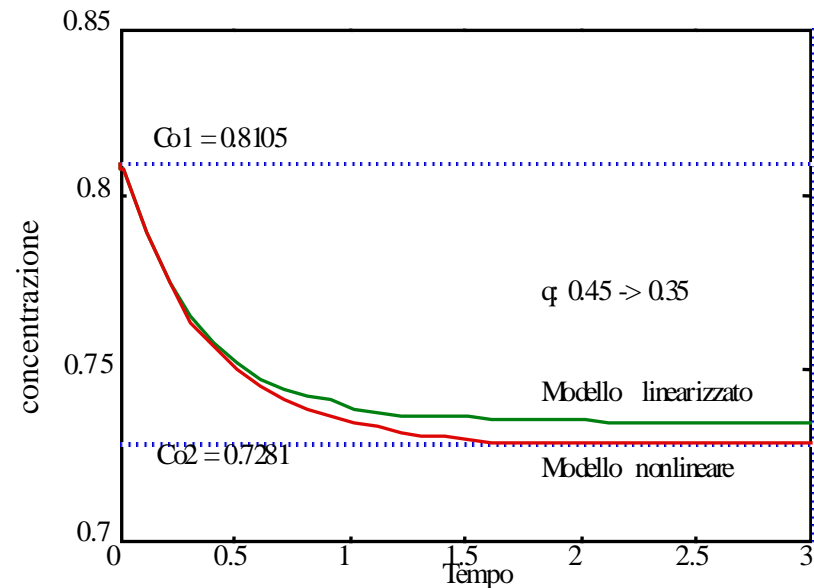
$$\frac{\tilde{C}}{\tilde{q}} = \frac{C_{i_o} - C_o}{s + (q_o + 2kC_o)}$$

Il modello linearizzato è ancora del 1° ordine

Aumento di portata

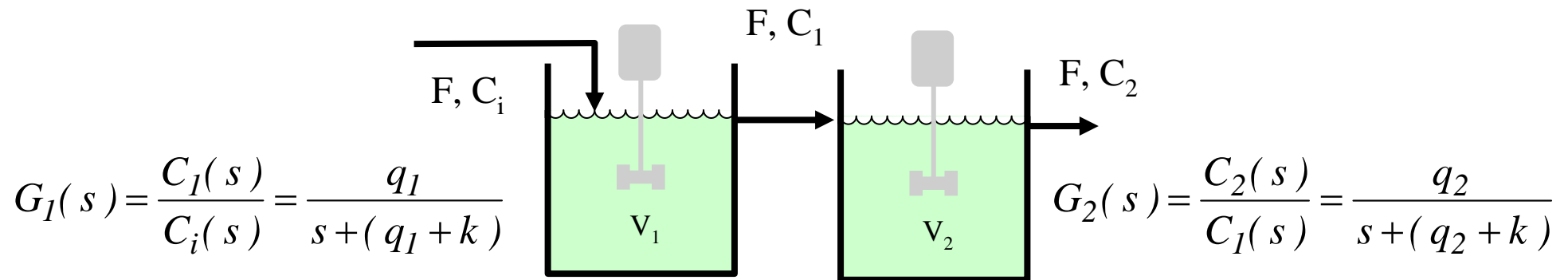


Diminuzione di portata



Proprietà di Funzioni di Trasferimento

- ❑ Valide per sistemi lineari con condizioni iniziali nulle
- ❑ Sono composte da polinomi nella variabile complessa s
- ❑ Possono essere composte con le normali regole algebriche
 - Moltiplicazione, divisione, etc.
- ❑ Es. due CSTR in cascata



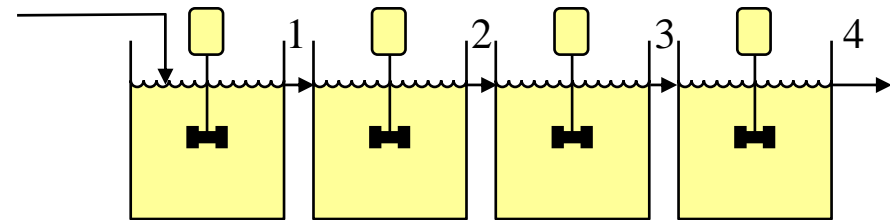
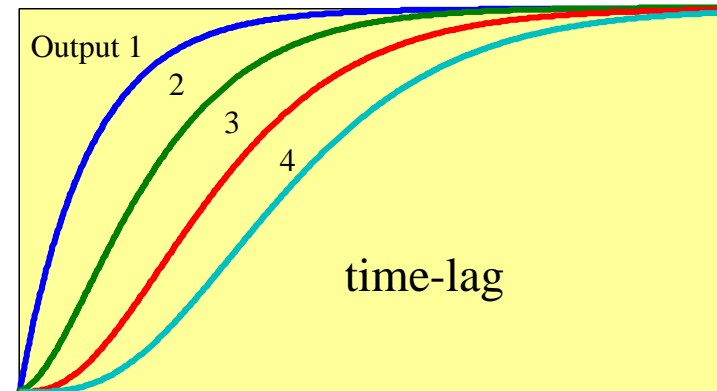
$$G(s) = \frac{C_2(s)}{C_i(s)} = G_1(s) \times G_2(s) = \frac{q_1}{s + (q_1 + k)} \times \frac{q_2}{s + (q_2 + k)}$$

Elementi tipici di processo

❑ Funzione di trasferimento a poli reali

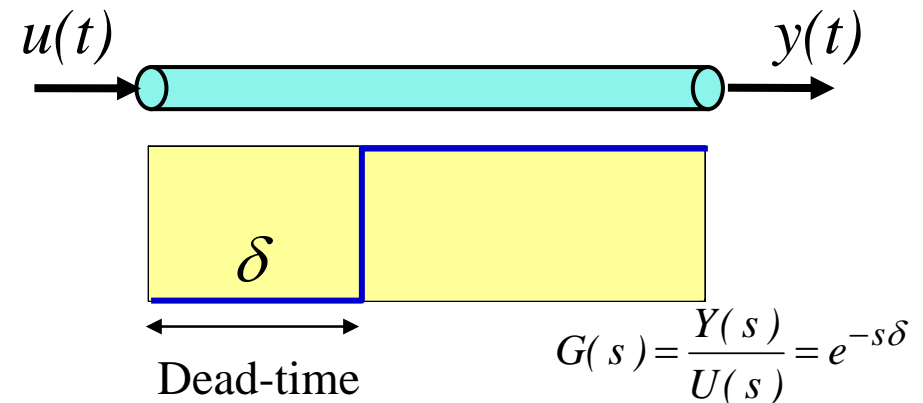
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{(1 + \tau s)^n}$$

- ❑ Detta anche “time-lag” perché esprime il ritardo con cui l’uscita segue l’ingresso
- ❑ La costante di tempo τ esprime l’inerzia del sistema
- ❑ Il time-lag aumenta con l’ordine del sistema n



❑ Dead-time $y(t) = u(t - \delta) \Rightarrow G(s) = e^{-s\delta}$

- ❑ Tempo intercorrente fra l’applicazione dell’ingresso e l’inizio della risposta in uscita
- ❑ Nessun uscita prima di questo tempo
- ❑ Legato a fenomeni di trasporto



Tipiche funzioni di trasferimento di processo

□ Primo ordine

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{(1 + \tau s)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} K_p = \text{guadagno} \\ \tau = \text{costante di tempo} \end{cases}$$

□ Secondo ordine

➤ Poli reali

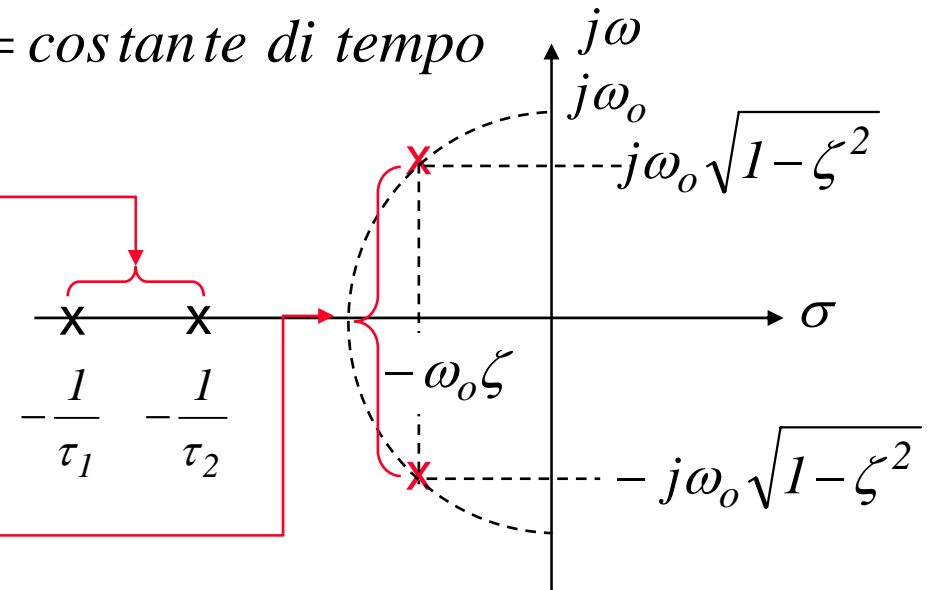
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = \frac{K_p}{\left(-\frac{1}{\tau_1}\right)\left(-\frac{1}{\tau_2}\right)}$$

➤ Poli complessi

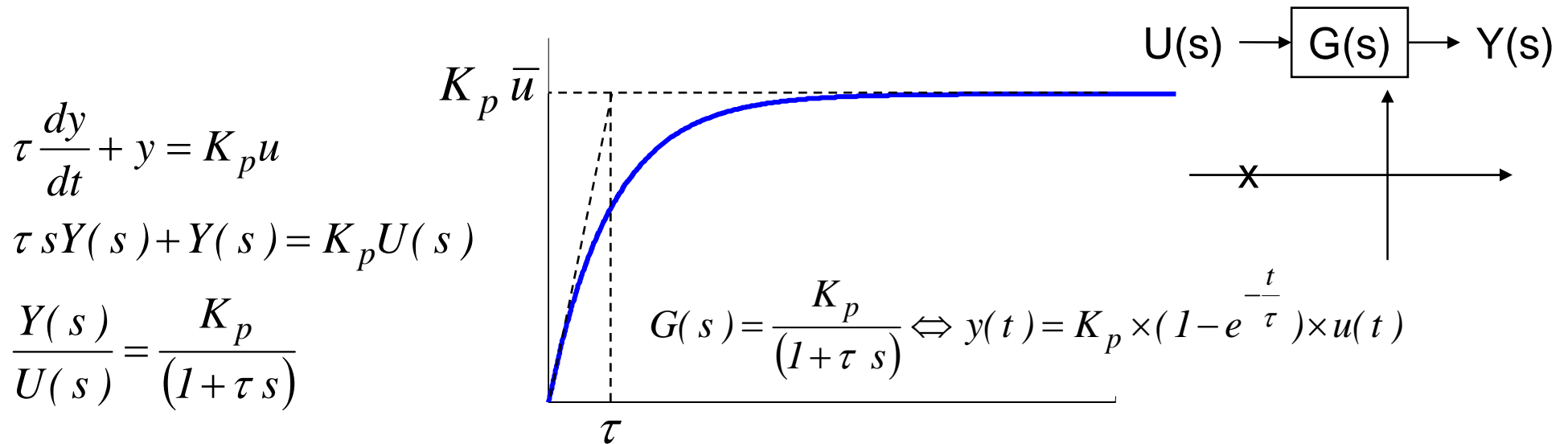
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p \omega_o^2}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \omega_o = \text{frequenza propria} \\ \zeta = \text{smorzamento} \end{cases}$$

▪ poli in

$$s = -\zeta\omega_o \pm j\omega_o\sqrt{1-\zeta^2}$$



Risposta al gradino di un sistema del primo ordine



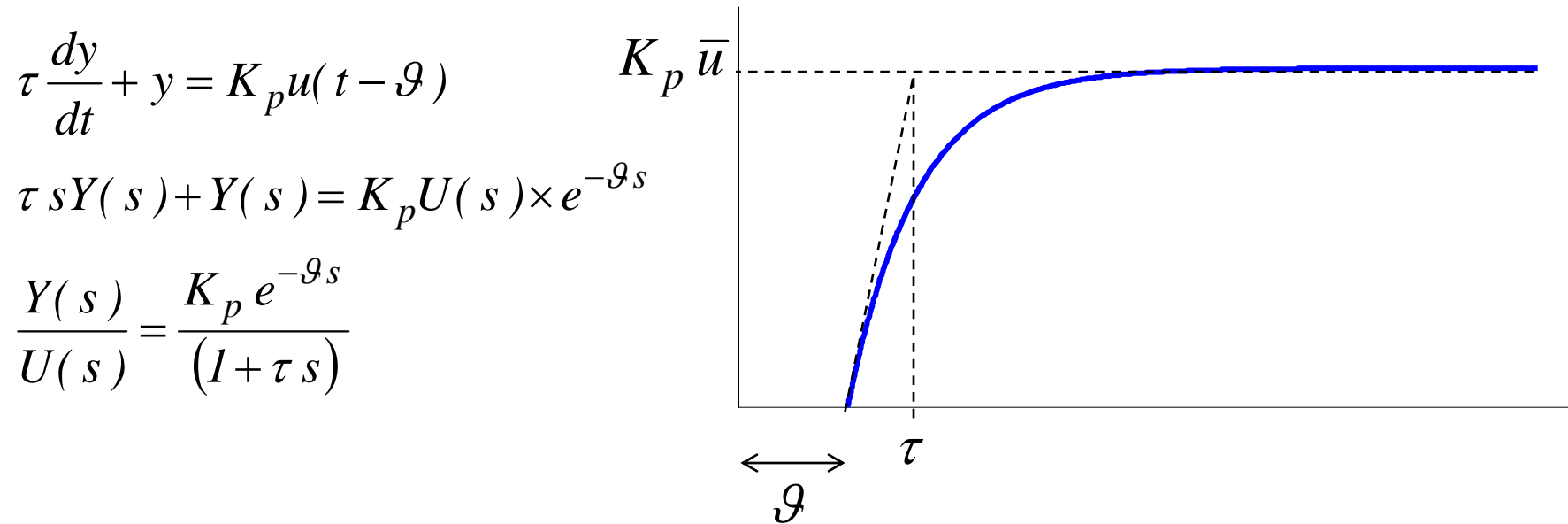
Per il teor. del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = s \cdot G(0) \cdot \frac{\bar{u}}{s} = K_p \bar{u} \qquad u = 1 \Leftrightarrow u(s) = \frac{1}{s}$$

Calcolando la derivata dell'uscita all'istante iniziale

$$\tau \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = K_p \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{K_p}{\tau} \bar{u}$$

Risposta al gradino di un sistema del primo ordine con ritardo

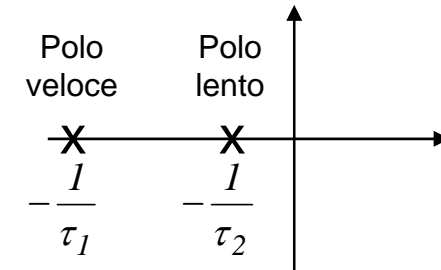
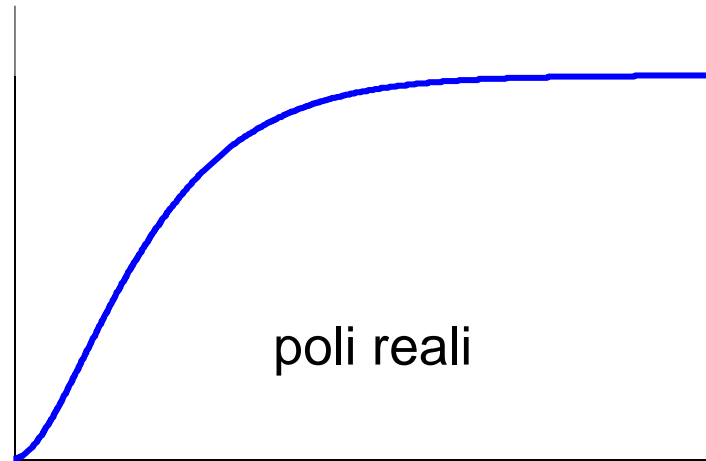


Nota: la Trasformata di Laplace di un ritardo è un termine esponenziale

$$L\{u(t - \mathcal{G})\} = U(s) \times e^{-\mathcal{G}s}$$

Risposte al gradino di un sistema del secondo ordine

$$G(s) = \frac{K_p}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$



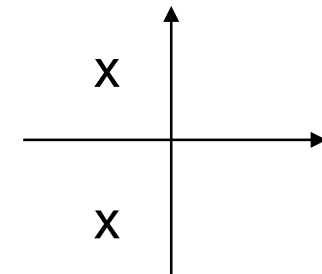
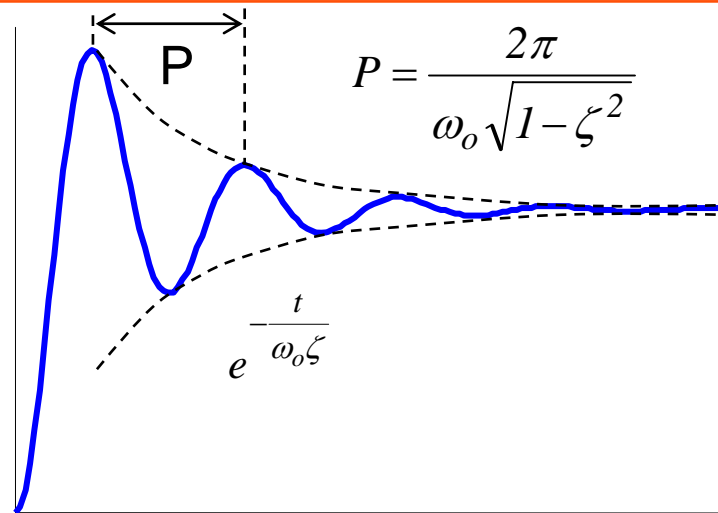
$$y(t) = K_p \left(1 - \frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2} \right) u(t) \quad \tau_1 \neq \tau_2$$

$$y(t) = K_p \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \right) u(t) \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau$$

Risposte al gradino di un sistema del secondo ordine

poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{K_p \omega_o^2}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2}$$



$$y(t) = K_p \left(1 - e^{-\frac{t}{\omega_o \zeta}} \left[\cosh\left(\omega_o \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)t + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh\left(\omega_o \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)t \right] \right) \cdot u(t) \quad \zeta > 1$$

$$y(t) = K_p \left(1 - e^{-\frac{t}{\omega_o}} (1 + \omega_o t) \right) \cdot u(t) \quad \zeta = 1$$

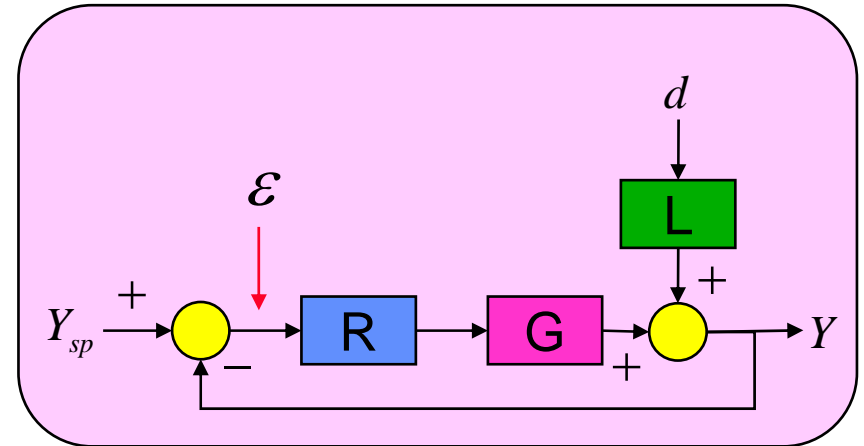
$$y(t) = K_p \left(1 - e^{-\frac{t}{\omega_o \zeta}} \left[\cos\left(\omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}\right)t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\left(\omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}\right)t \right] \right) \cdot u(t) \quad \zeta < 1$$

Sistemi con regolazione in retroazione

FdT dal Set-point $\frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)} = H(s)$

FdT dal disturbo $\frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{L(s)}{1+R(s)G(s)}$

Errore di regolazione $\frac{\varepsilon(s)}{Y_{sp}(s)} = \frac{1}{1+R(s)G(s)}$



Accuratezza di regolazione a regime (inseguimento del set-point)

Applicando il teorema del valore finale $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s)$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+R(s)G(s)} \cdot Y_{sp}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+R(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+R(0)G(0)}$$

L'errore a regime dipende dal guadagno in continua della catena diretta $R(0) \cdot G(0)$