



**Environmental
Time Series
Analysis**

Obiettivi dell'analisi delle serie temporali

Esame dei dati

- ⇒ Descrizione sintetica del fenomeno
- ⇒ Scomposizione nelle componenti deterministiche
- ⇒ Presenza di valori anomali

Filtraggio dei dati

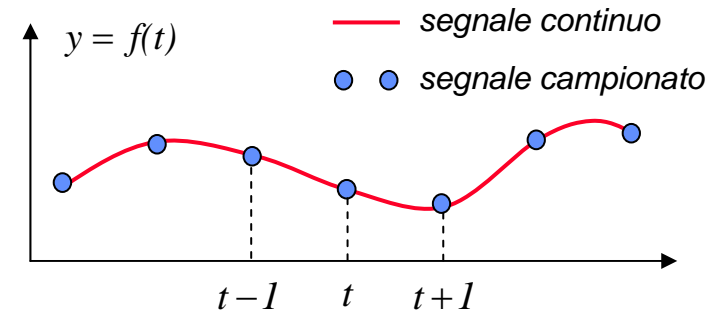
- ⇒ Riduzione della componente di rumore (stocastica)
- ⇒ Rimuovere dati inconsistenti (outliers)
- ⇒ Validare i dati
- ⇒ Estrarre comportamenti tipici (pattern recognition);

Utilizzo dei dati

- ⇒ Previsione di andamenti futuri
- ⇒ Sintesi di serie per uso in ingresso a modelli di simulazione

Serie temporali di dati ambientali

- ☞ Si dicono serie temporali degli insiemi di dati indicizzati dal tempo $y = f(t)$
- ☞ Si ritiene che le misure siano generate da un processo **continuo**, ma le osservazioni a **istanti discreti** producono una **serie campionata**
- ☞ Le serie temporali possono essere utilizzate per:
 - ⇒ Simulazione
 - ⇒ Calibrazione dei modelli
 - ⇒ Previsione e controllo
- ☞ Come nascono le serie temporali di dati ambientali
 - ⇒ Stazioni di monitoraggio automatico
 - ✍ Misure semplici
 - ✍ Intervalli di campionamento costanti
 - ✍ Grandi quantità di dati, ma....
 - ✓ Non validati (alcuni dati possono essere errati a causa di sensori difettosi)
 - ✓ Dati mancanti (difetti nei sensori e/o nei sistemi di trasmissione)
 - ⇒ Dati raccolti manualmente
 - ✍ Misure complesse (es. analisi di laboratorio)
 - ✍ Pochi dati
 - ✍ Intervalli di campionamento variabili
 - ✍ Possono richiedere validazione e/o integrazione



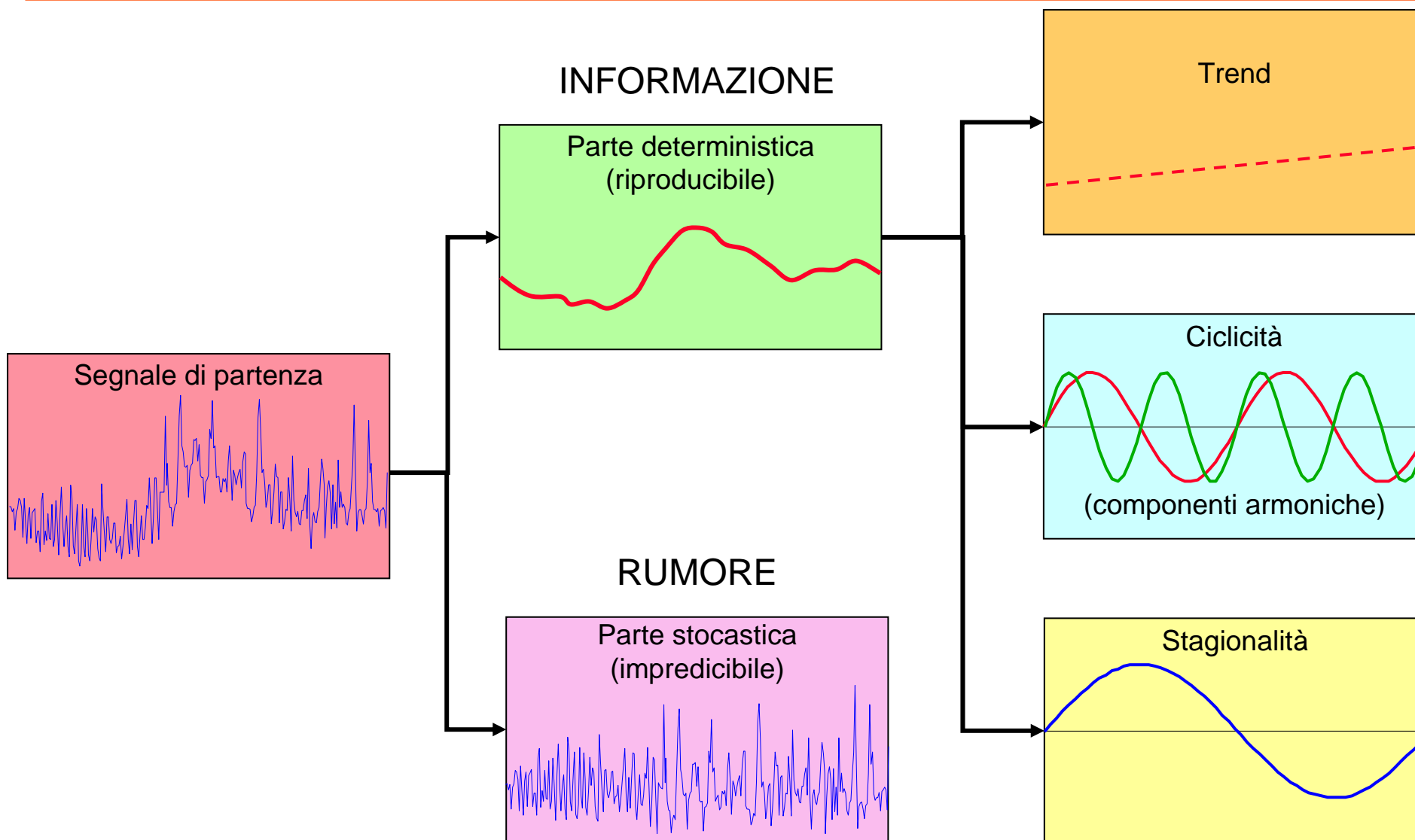
Componenti di un segnale ambientale

☞ **Componente deterministica**, e perciò riproducibile, che include componenti tendenziali, cicliche e/o stagionali,

- ⇒ **Trend** (o *componente tendenziale*) è la tendenza di fondo del fenomeno considerato, che si manifesta come variazione a bassissima frequenza, rappresentabile mediante una funzione polinomiale di grado basso (generalmente si adotta una relazione lineare);
- ⇒ **Ciclo** (o *componente congiunturale*) è l'alternanza di fluttuazioni, rappresentabile come serie di armoniche sinusoidali di frequenze multiple;
- ⇒ **Stagionalità** (o *componente stagionale*) rientra nella ciclicità precedente ma può essere riferita al ciclo annuale, essendo costituita da variazioni che si riscontrano con analoga intensità negli stessi periodi di anno in anno.

☞ **Componente stocastica**, totalmente imprevedibile, modellabile come realizzazione di un processo stocastico.

Componenti di un segnale ambientale



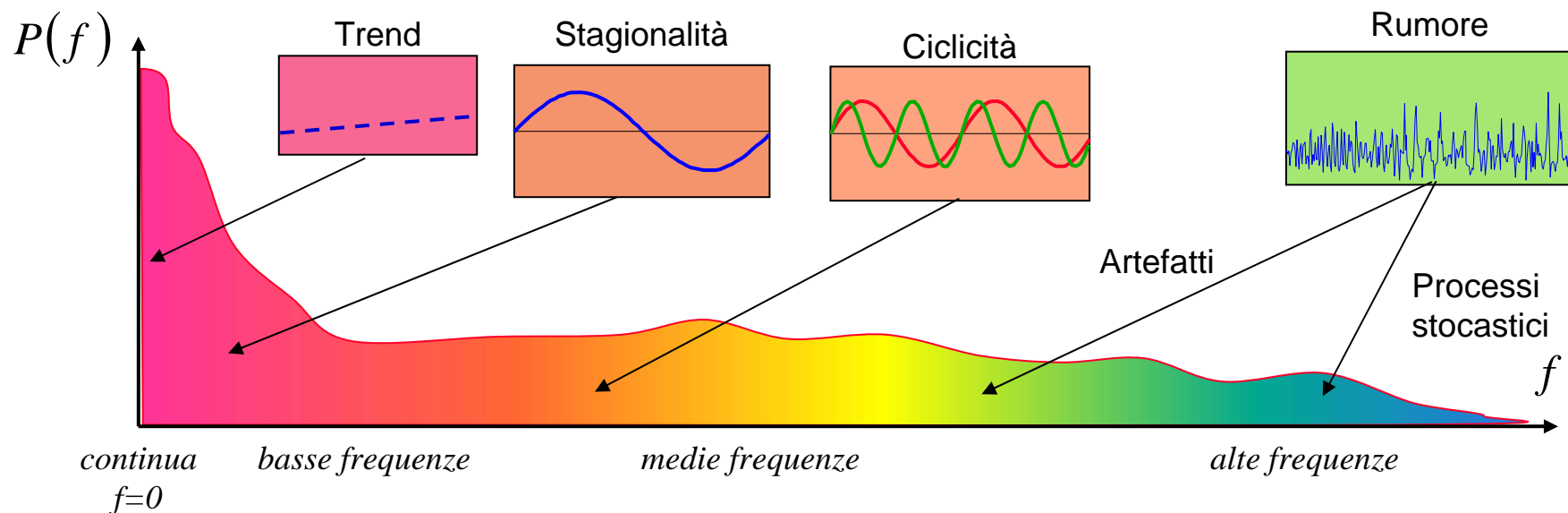
Analisi del segnale

☞ Scomporre il segnale nelle sue componenti deterministiche e stocastiche, supponendo che:

- La parte *deterministica* (riproducibile) contenga l'informazione
- La parte *stocastica* (non riproducibile) contenga solo rumore

☞ Come si possono discriminare queste componenti?

- Considerando il loro diverso contenuto di frequenze
- Ipotesi di base: ogni segnale nel tempo è dato dalla composizione di tante sinusoidi (*armoniche*) a frequenze diverse



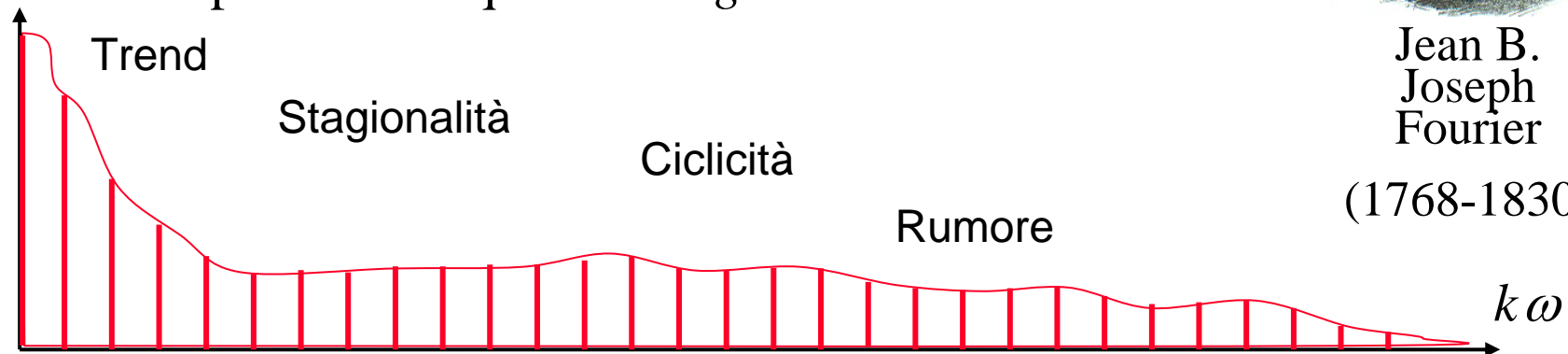
Composizione armonica dei segnali

- ➡ Ogni segnale può essere espresso come somma pesata di sinusoidi (analisi armonica di Fourier, 1768 – 1830)

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sin(k\omega t)$$

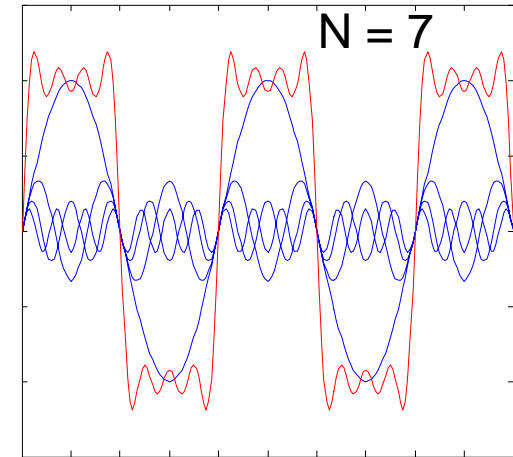
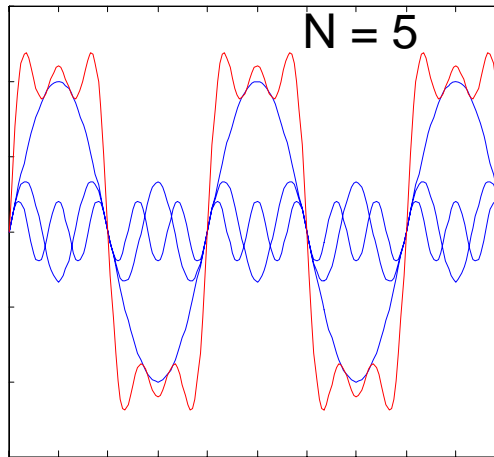
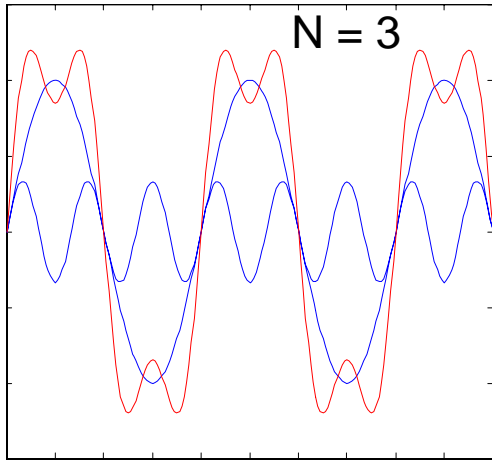
“Una funzione arbitraria, continua o discontinua e definita in un intervallo finito, può sempre essere espressa come somma di sinusoidi” J.B.J.F, 1807

- ➡ L'andamento nel tempo è determinato dalle varie armoniche (contenuto frequenziale) che compongono il segnale.
- ➡ Se si considerano solo frequenze discrete (k intero) si ha uno spettro di frequenza *a righe*

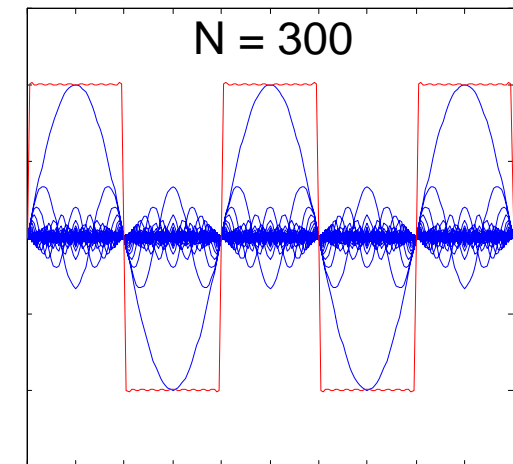
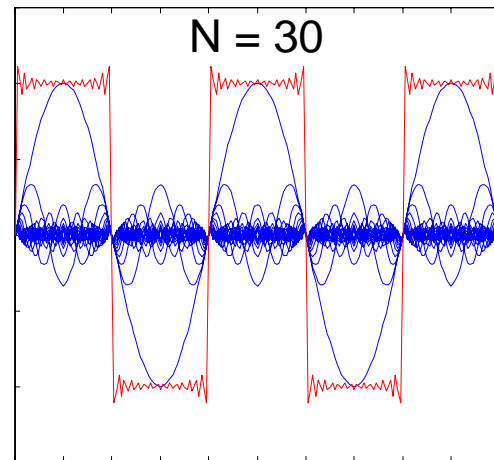
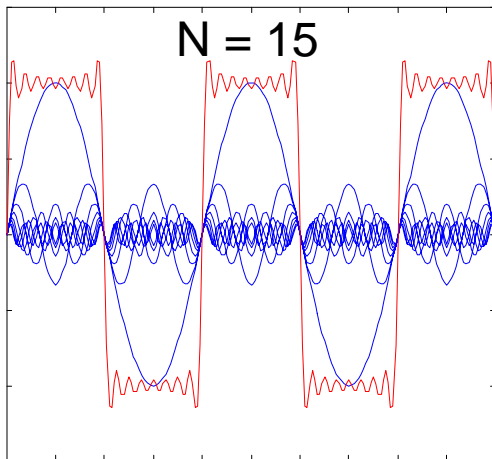


Jean B.
Joseph
Fourier
(1768-1830)

Analisi armonica di un'onda quadra



$$q(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots + \frac{1}{N} \sin N\omega t + \dots \right)$$



Ricerca l'informazione nei dati

👉 **Obiettivo fondamentale:** Separare l'informazione contenuta nel segnale dal rumore

👉 **Ipotesi di base:**

- ⇒ Le basse frequenze contengono l'informazione
- ⇒ Le alte frequenze contengono rumore

👉 **Tecniche di *denoising*:**

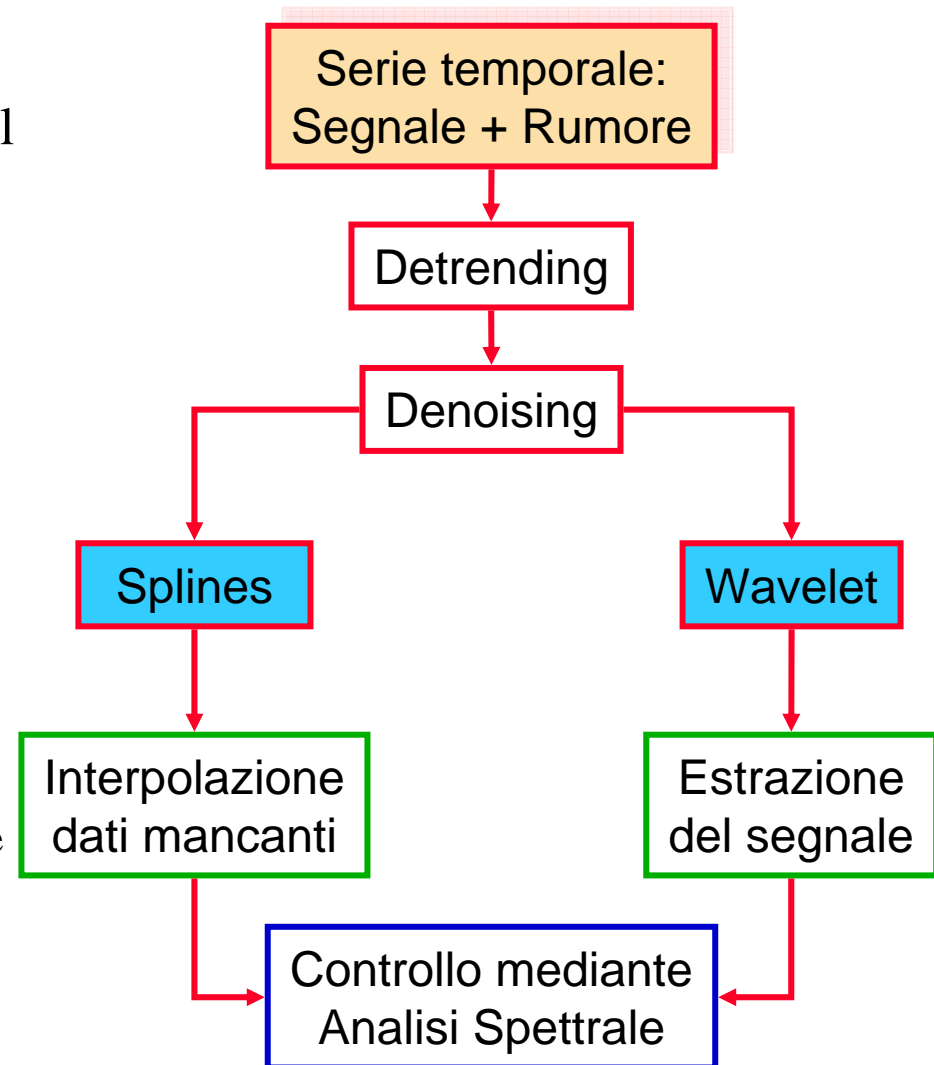
⇒ **Splines**

- ✍️ Utili per lo smoothing and interpolazione di dati mancanti

⇒ **Wavelets**

- ✍️ Hanno ottime proprietà di denoising, permettendo di estrarre l'informazione deterministica
- ✍️ Consentono la derivazione dei segnali filtrati

👉 Controllare i risultati con un'analisi in frequenza: Analisi spettrale

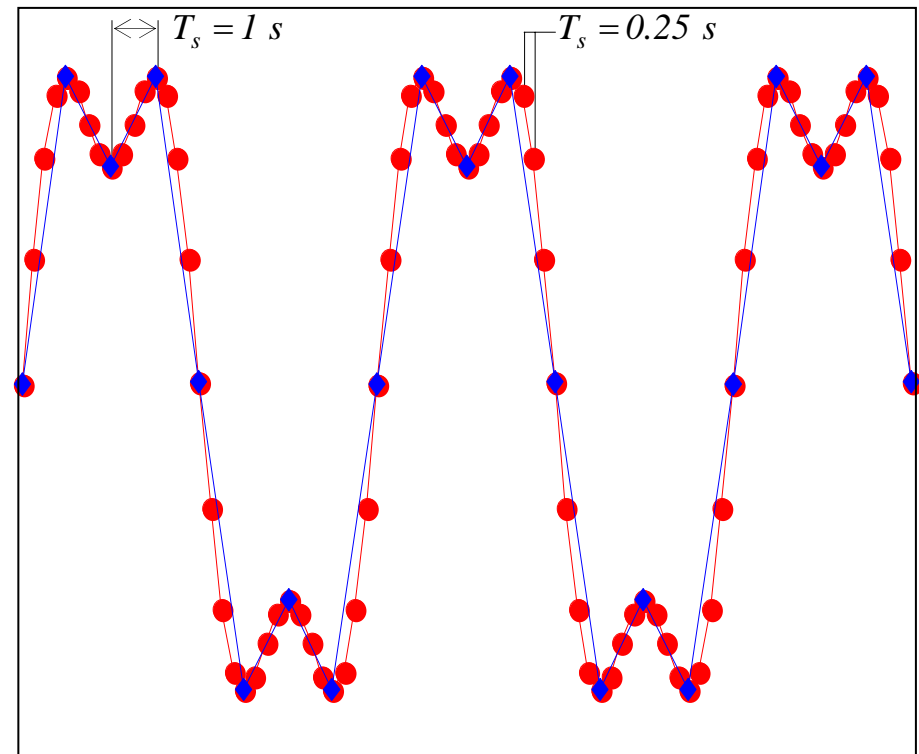


Passaggio da segnale continuo a discreto

- Il segnale discreto si ottiene per campionamento del segnale continuo
- Il tempo non è più continuo, ma si limita all'insieme degli istanti di campionamento, distanziati di T_s
- Il segnale “esiste” solamente negli istanti di campionamento
- Il segnale campionato ha forme diverse in funzione del periodo di campionamento

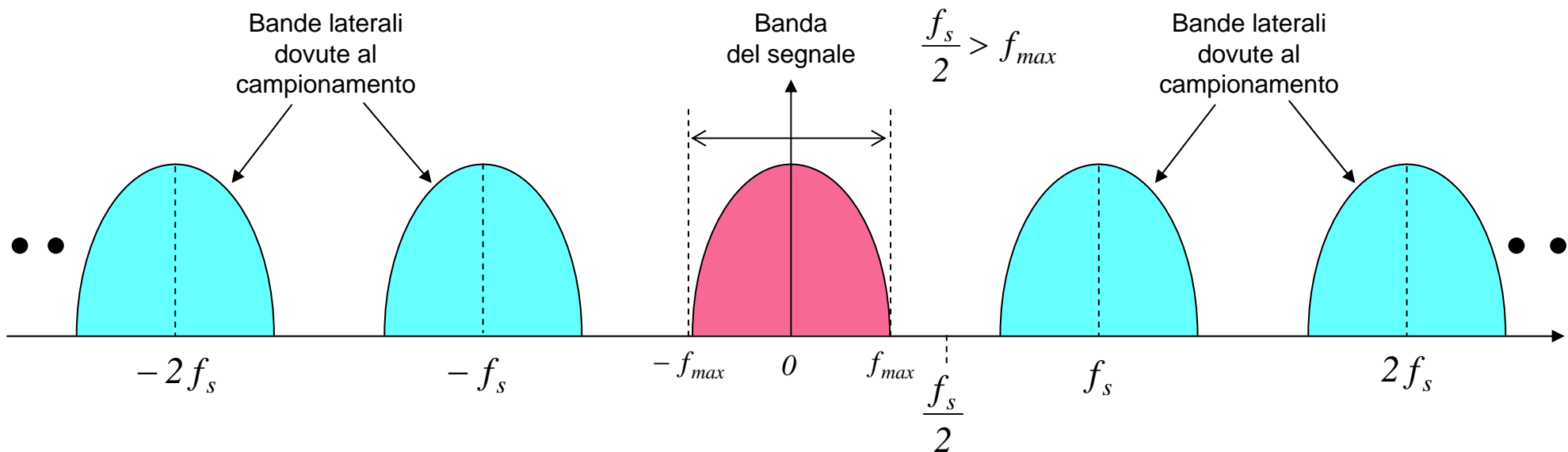
—●—●—●— $T_s = 0.25 \text{ s}$

—◆—◆—◆— $T_s = 1 \text{ s}$



Effetto del campionamento

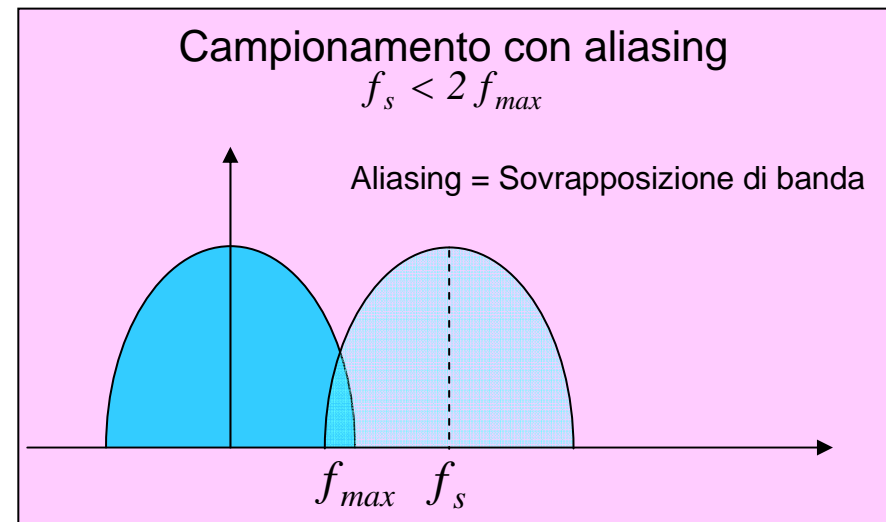
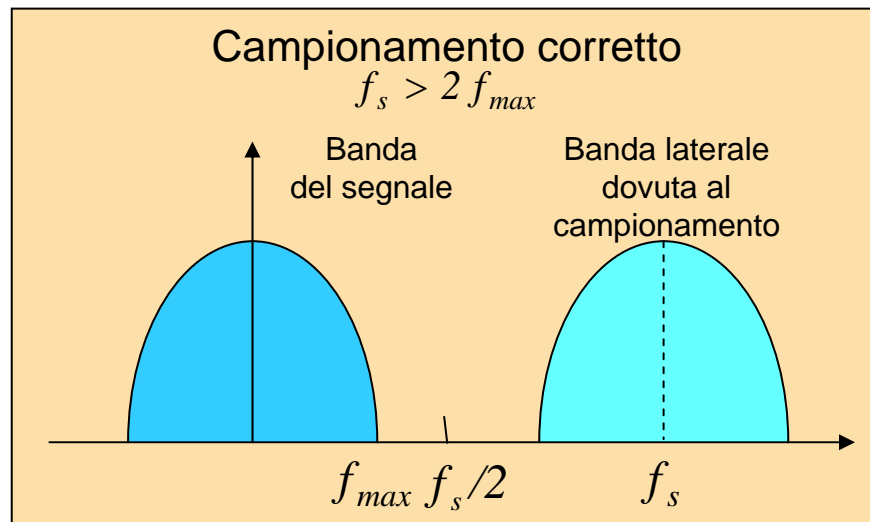
- Il campionamento di un segnale genera una serie infinita di repliche dello spettro, centrate su multipli della frequenza di campionamento $f_s = 1/T_s$



- Se la frequenza di campionamento è almeno doppia della massima frequenza del segnale ($f_s \geq 2f_{max}$) le bande laterali non si sovrappongono a quella di base del segnale. Si dice **Frequenza limite di Nyquist** $f_s = 2f_{max}$
- Il contenuto in frequenza rimane inalterato e può essere recuperato senza distorsione con un filtro passa-basso che lascia passare le frequenze fino a f_{max}

Effetto del periodo di campionamento

- Il **Limite di Nyquist** è il periodo minimo (frequenza massima) a cui si può campionare senza avere sovrapposizione di banda.
- Esso è dato dalla condizione limite $f_s = 2 f_{max}$ ovvero $f_{max} = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T_s}$
- Per frequenza di campionamento inferiori ($f_s \leq 2 f_{max}$) si ha intrusione della banda laterale entro la banda base, creando una distorsione di frequenza (*aliasing*)
- In pratica è opportuno campionare a frequenza f_s molto superiore a $2 f_{max}$ se si vuole una buona fedeltà di ricostruzione del segnale

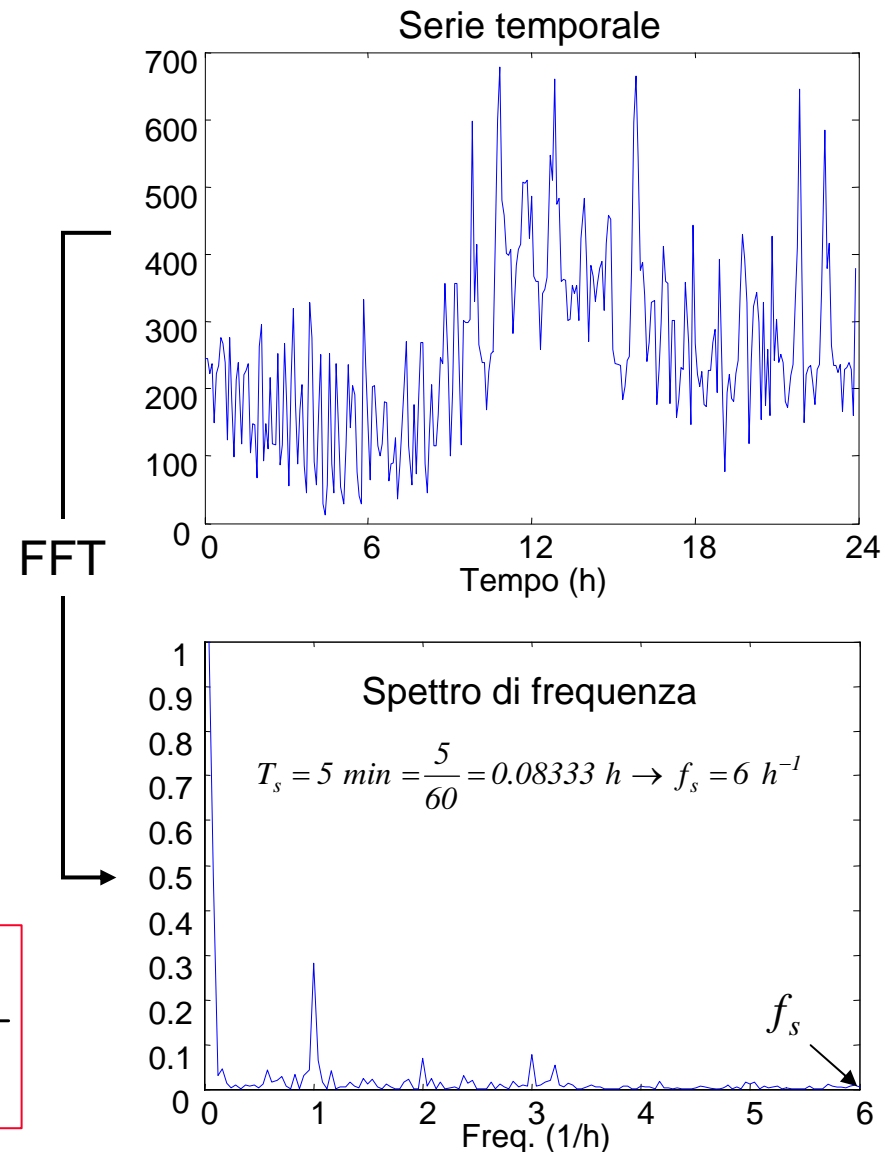


Esempio di FFT

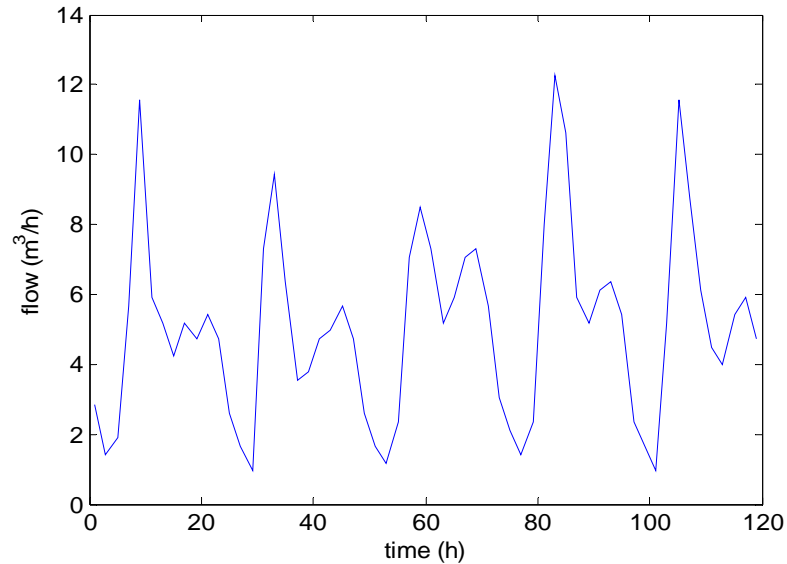
```
Ts=5/60;  
Y=fft(q);  
N = length(Y);  
Y(1) = [];  
% Calcolo del modulo di potenza  
power = abs(Y(1:N/2)).^2;  
pm=max(power);  
% Normalizzazione  
power=power/pm;  
% Frequenza di Nyquist  
nyquist = 1/(2*Ts);  
% Vettore di frequenze  
freq = (1:N/2)/(N/2)*nyquist;  
plot(freq,power)
```

Il tempo di campionamento T_s era noto ed è stato inserito per poter calcolare la frequenza di Nyquist per il plot

$$f_s = \frac{1}{2T_s}$$

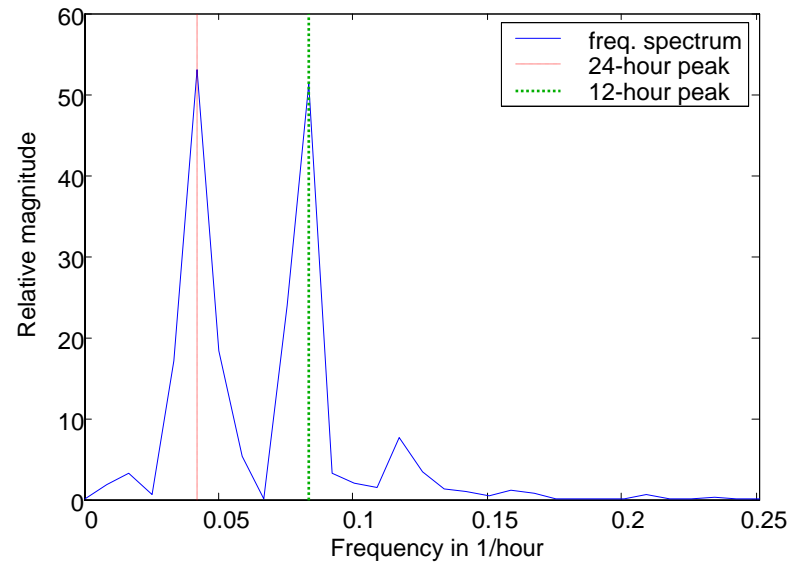


Corrispondenza fra $f(t)$ e $F(\omega)$



Andamento del segnale nel tempo: è evidente una componente periodica di 24 h ed un'altra a 12 h

Contenuto in frequenza del segnale: la presenza delle due componenti periodiche a 24 h e a 12 h è messa in evidenza



Scelta del periodo di campionamento

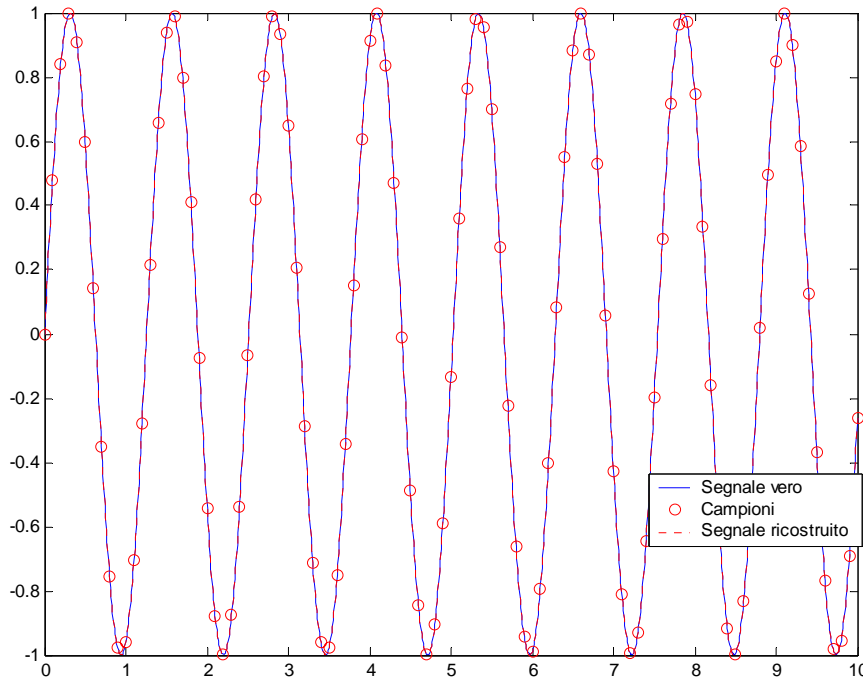
Un periodo di campionamento piccolo implica

- ⇒ Apparecchiature di monitoraggio più costose
- ⇒ Una grande quantità di dati
- ⇒ Possibilità di raccogliere dati ridondanti o inutili
 - ⇒ Campionare il rumore (privo di informazione)
 - ⇒ Campionare “dati noiosi” (poco variabili, con scarsa informazione)

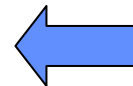
Un periodo di campionamento grande implica

- ⇒ Minore complessità del monitoraggio
- ⇒ Minore quantità di dati
- ⇒ Possibile perdita di informazione nei dati raccolti
 - ⇒ Non osservabilità dei fenomeni ad alta frequenza, per $f > f_s/2$
 - ⇒ *Aliasing* = distorsione in frequenza del segnale

Influenza del periodo di campionamento: effetto aliasing



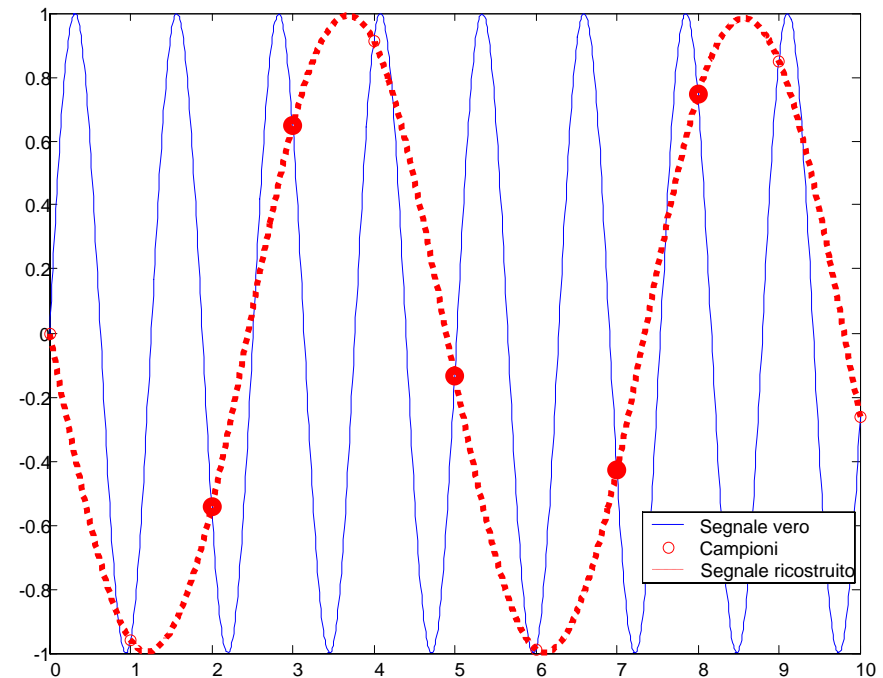
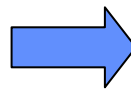
Una senoide di periodo $T = 1.2566$ è ricostruita correttamente attraverso i suoi campioni presi ad intervalli $T_s = 0.1$, infatti è verificato il limite di Nyquist $T_s < T/2$



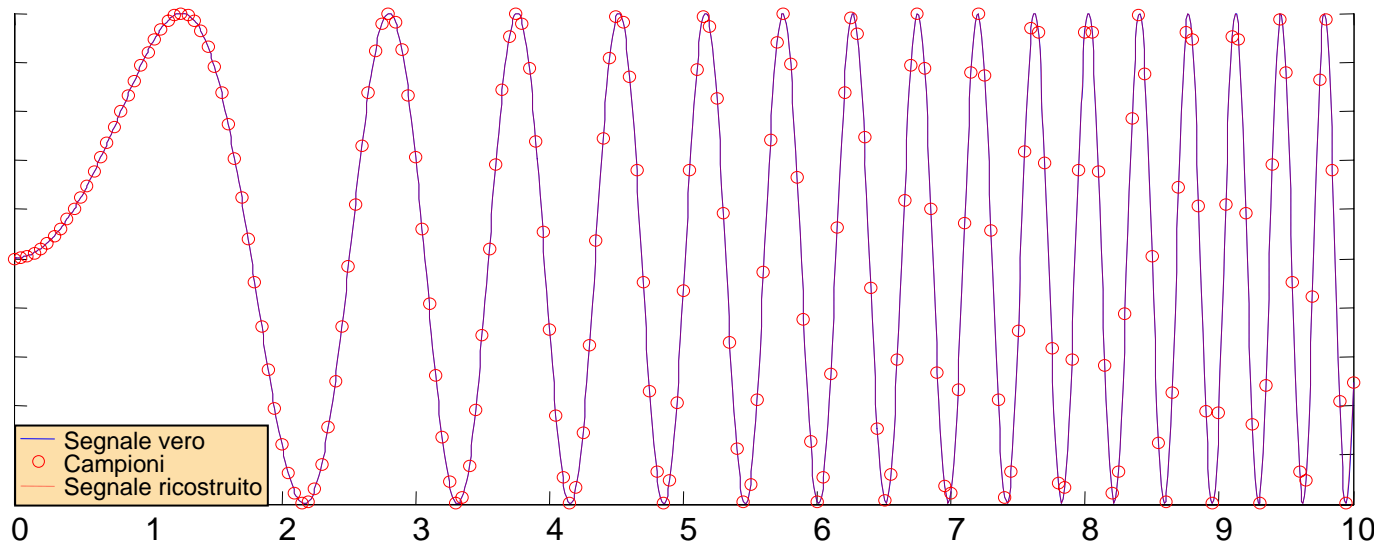
$$0.1 < 0.6283$$

La medesima senoide NON è ricostruita correttamente attraverso i suoi campioni presi ad intervalli $T_s = 1$, NON essendo verificato il limite di Nyquist: $T_s > T/2$

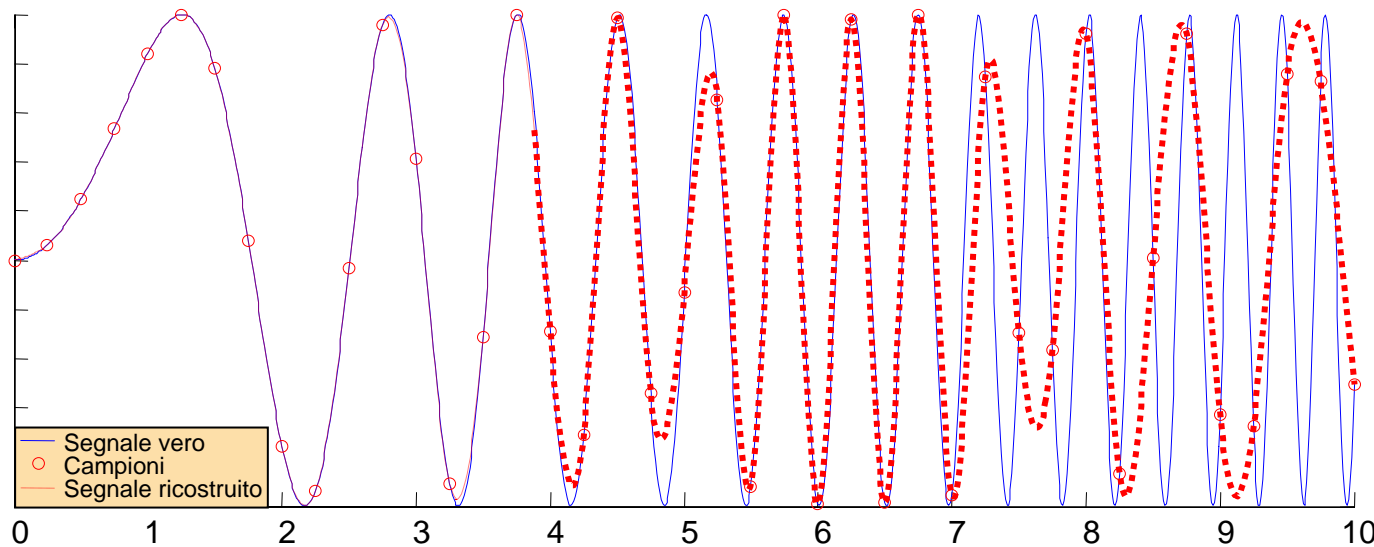
$$1 > 0.6283$$



Aliasing su $y = \sin(t^2)$

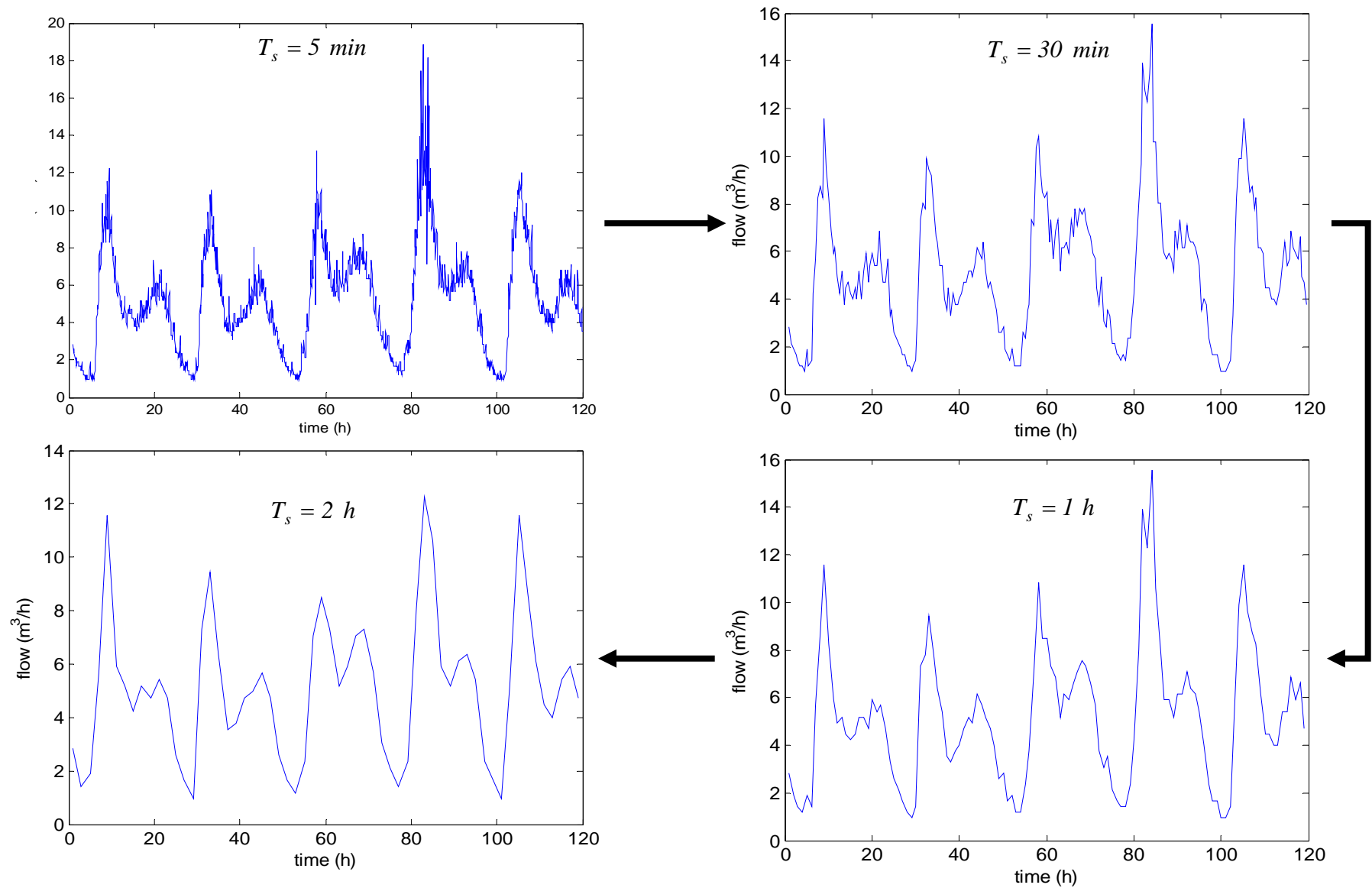


Intervallo di campionamento sufficientemente piccolo
Il segnale ricostruito dai campioni coincide con quello originario

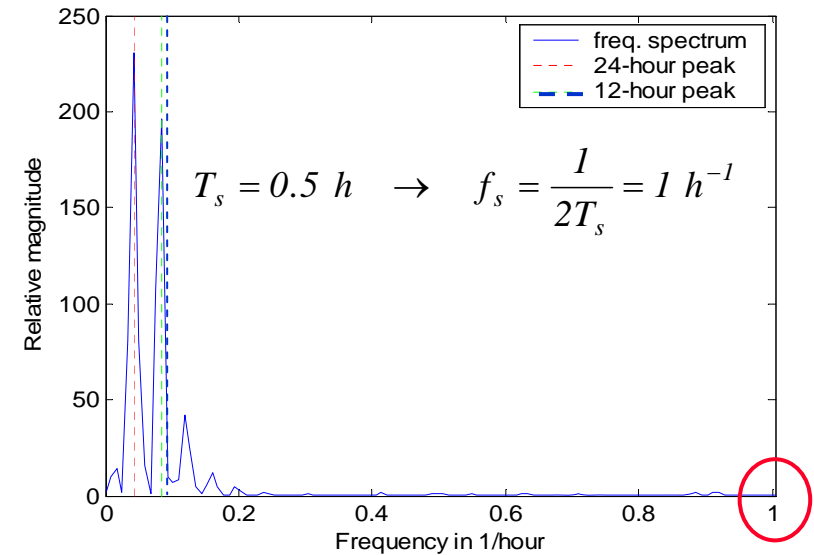
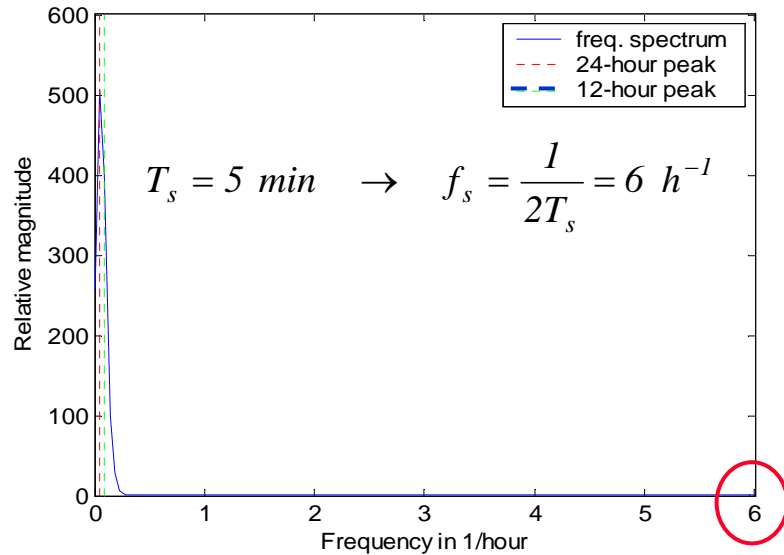


Intervallo di campionamento troppo grande.
All'aumentare della frequenza il segnale ricostruito dai campioni NON coincide più con quello originario

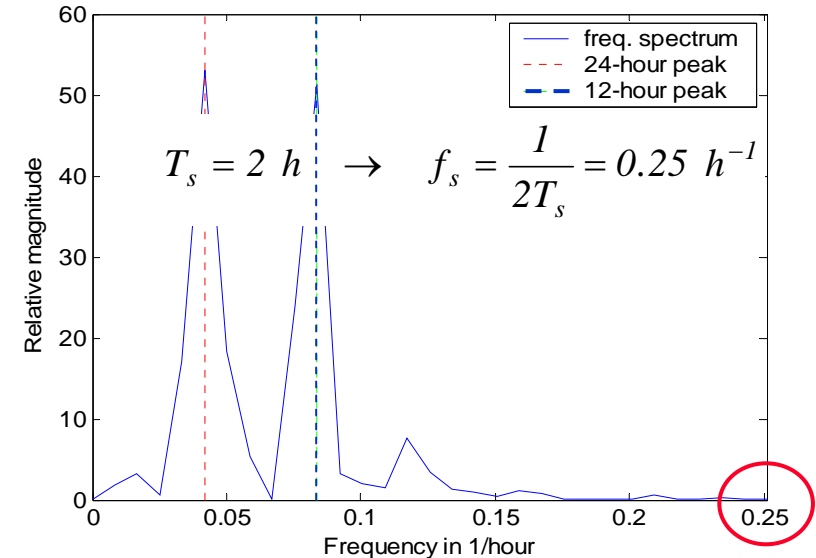
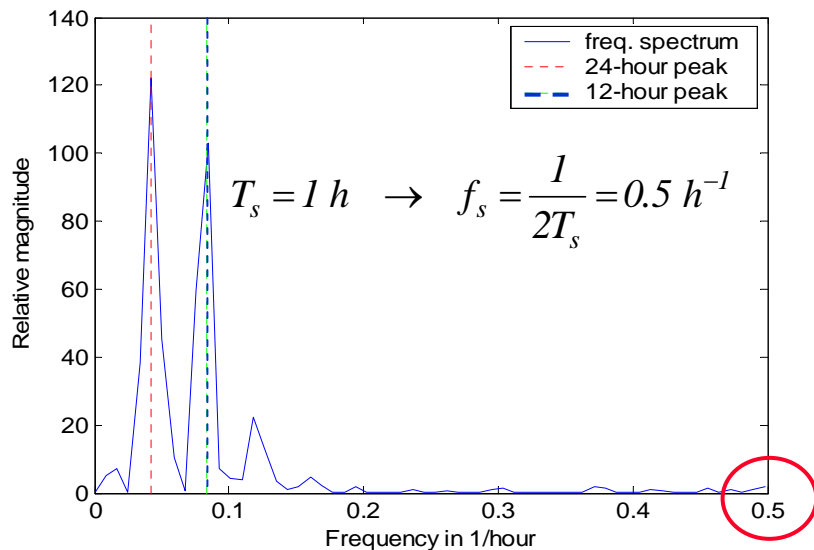
Effetto del periodo di campionamento



Effetto del campionamento sullo spettro di frequenza

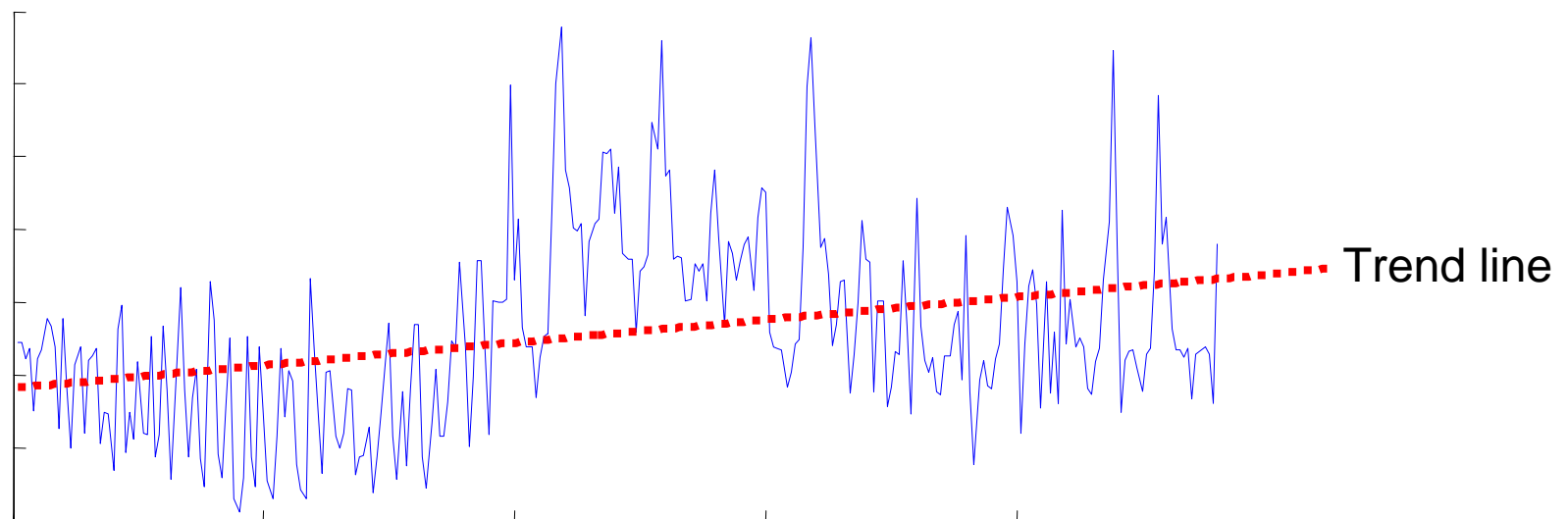


Importante:
La massima
frequenza
dello spettro
è il limite di
Nyquist



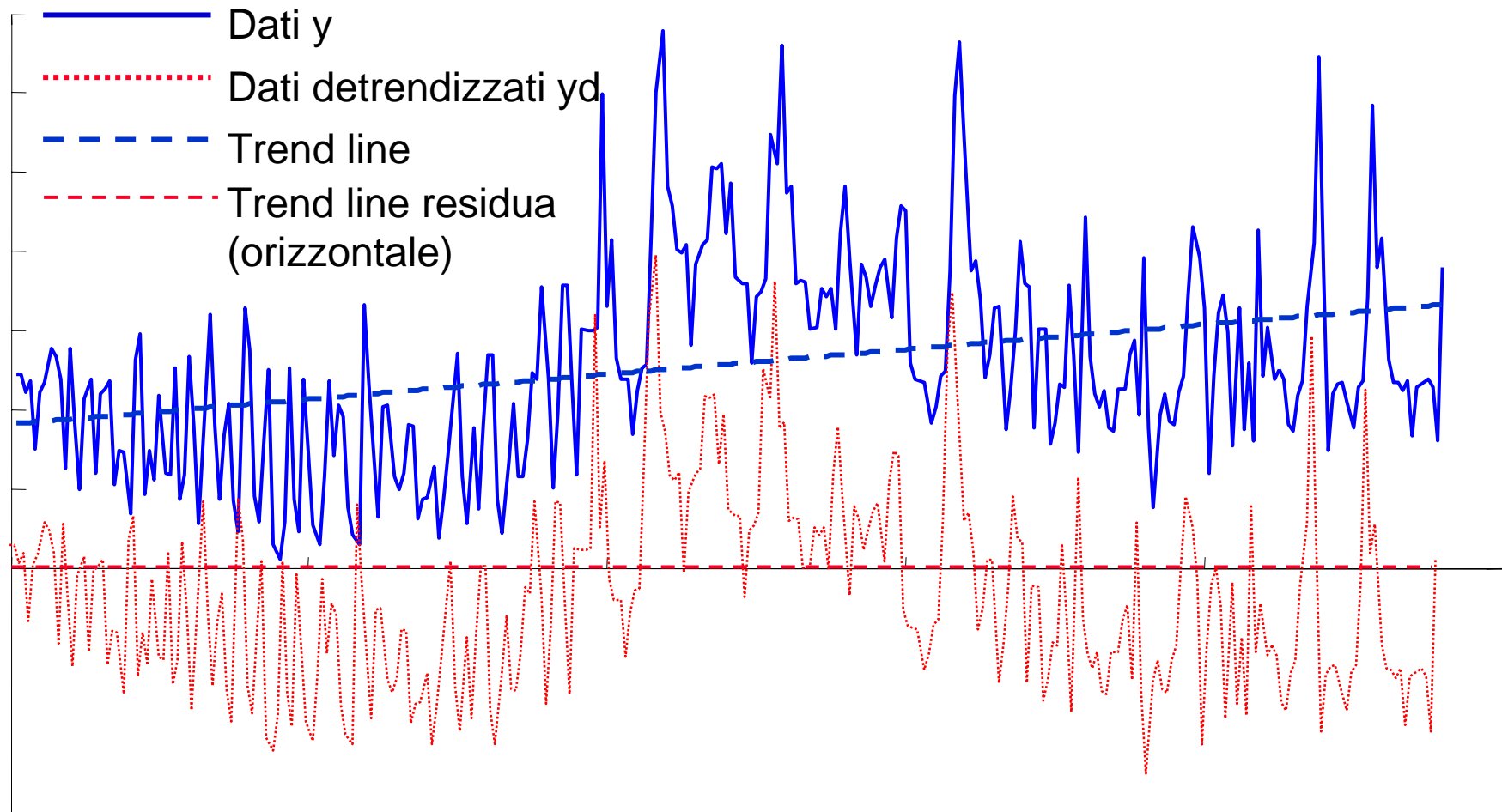
Detrending

- ☞ Controllare che i dati non contengano un trend, che indica un comportamento non stazionario
- ☞ Si può verificare con una regressione lineare mediante la funzione Matlab `polyfit` di ordine 1
 - ⇒ $b = \text{polyfit}(x, y, 1)$ dove b è il vettore dei coefficienti della regressione
 - ⇒ La trend line è data da $b(2) + b(1) * x$
 - ⇒ Se $b(1) \neq 0$ c'è un trend nei dati



Rimozione del trend da una serie temporale

👉 **Nota:** i dati detrendizzati $y_d = \text{detrend}(y)$ hanno valor medio nullo

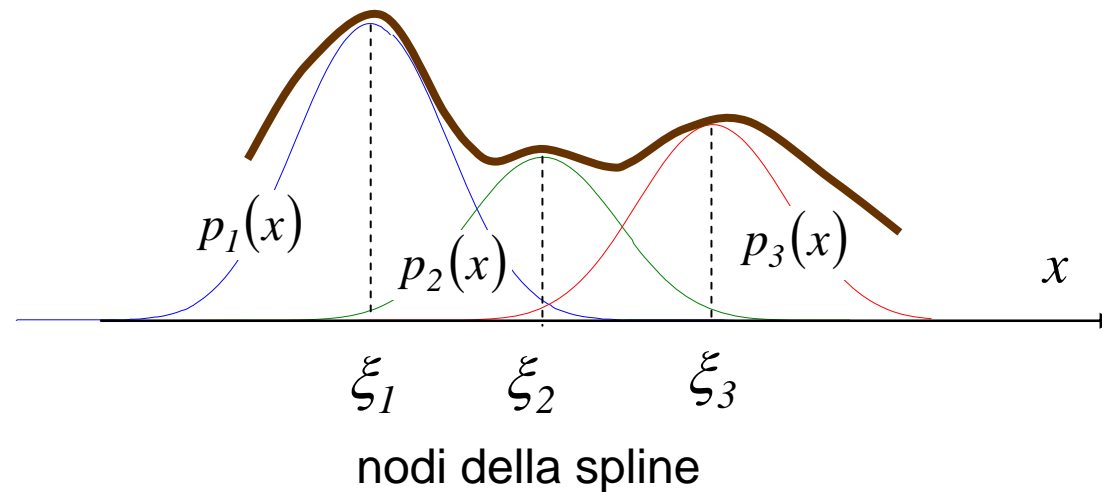


Importanza del denoising

- 👉 Il rumore riduce l'accuratezza dei dati
- 👉 Il rumore può mascherare importanti informazioni contenute nei dati
 - ⇒ Estrarre l'informazione è vitale per usare i dati per simulazione, calibrazione, predizione etc..
- 👉 Segnali rumorosi non possono essere derivati numericamente
 - ⇒ Spesso è importante poter conoscere con buona accuratezza il rateo di variazione di un segnale
 - ⇒ Questa informazione si ricava calcolando numericamente la derivata temporale del segnale
 - ⇒ La derivazione di un segnale rumoroso comporta errori numerici così grandi da essere in pratica inutilizzabile.

Denoising = Smoothing

- **Smoothing** è la proprietà di diminuire le asperità di una serie di dati $s(x)$ sfruttando le proprietà *approssimanti* di un insieme di funzioni dette a *base radiale* (una *base* forma un riferimento nello spazio)
- **Splines approssimanti**: famiglia di funzioni $p_j(x) = \sum_{i=1}^k c_{ij} (x - \xi_j)^{k-i}$ $j = 1, \dots, l$ che approssimano localmente la funzione



- L'importanza della spline come approssimante sta nel mantenimento della **continuità delle derivate**

Splines smoothing

👉 Le funzioni Splines rappresentano una tecnica semplice per il **denoising** e l'interpolazione dei dati mancanti

- ⇒ Il pregio delle funzioni Splines è la continuità delle derivate
- ⇒ The funzione Matlab $ys = csaps(x, y, p)$ fornisce una spline cubica approssimante i dati (x, y) che minimizza il seguente obiettivo

$$p \sum_{i=1}^n (y(i) - ys(i))^2 + (1-p) \int \lambda(t) \left| \frac{d^2 ys(i)}{dt^2} \right|^2 dt$$

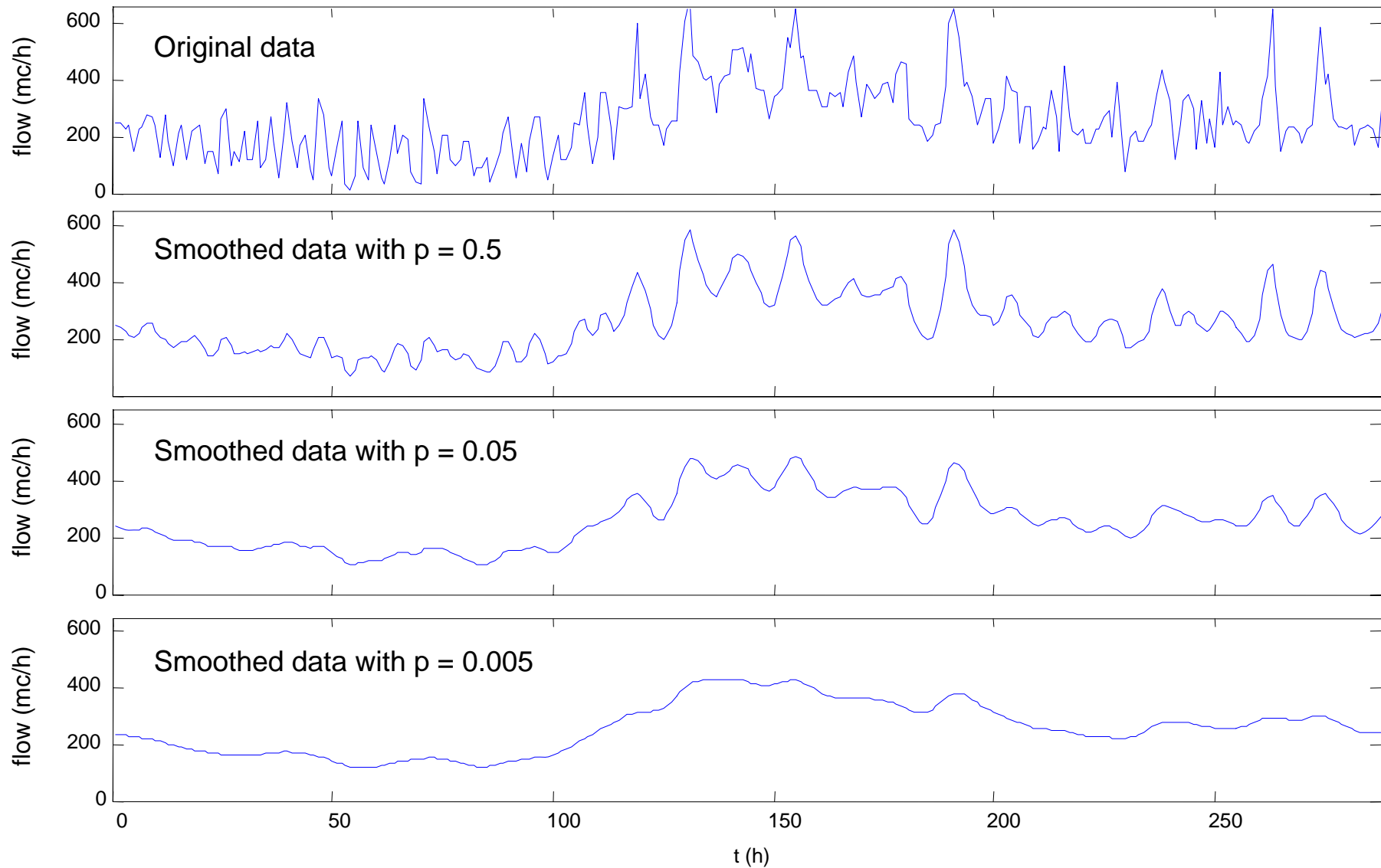
smoothing

fedeltà ai dati

- ⇒ Il parametro di smoothing p determina l'importanza relativa fra le due esigenze contrastanti dello smoothing e della fedeltà ai dati
- ⇒ Per $p = 0$, ys è la retta a minimi quadrati (regressione lineare)
- ⇒ Per $p = 1$, ys è l'interpolante naturale ai dati.
- ⇒ Per p compreso fra 0 e 1, si ha una soluzione *approssimante* secondo il precedente criterio

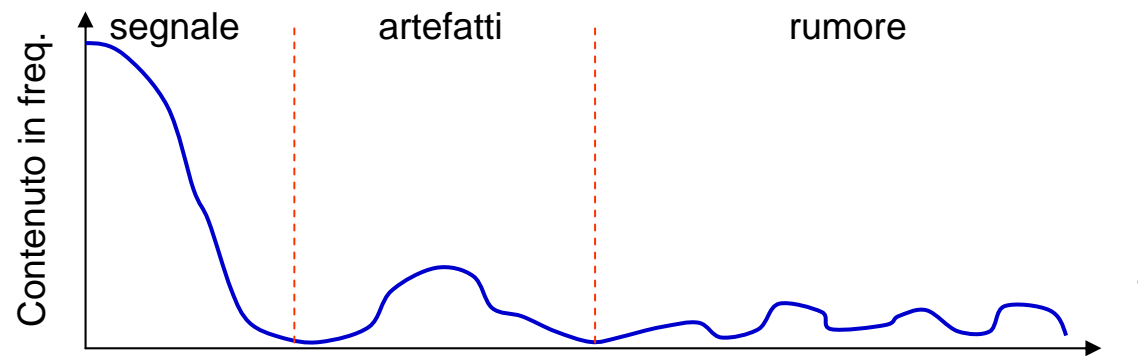
👉 **La scelta di p è fortemente dipendente dalla natura dei dati**

Esempi di smoothing al variare di p

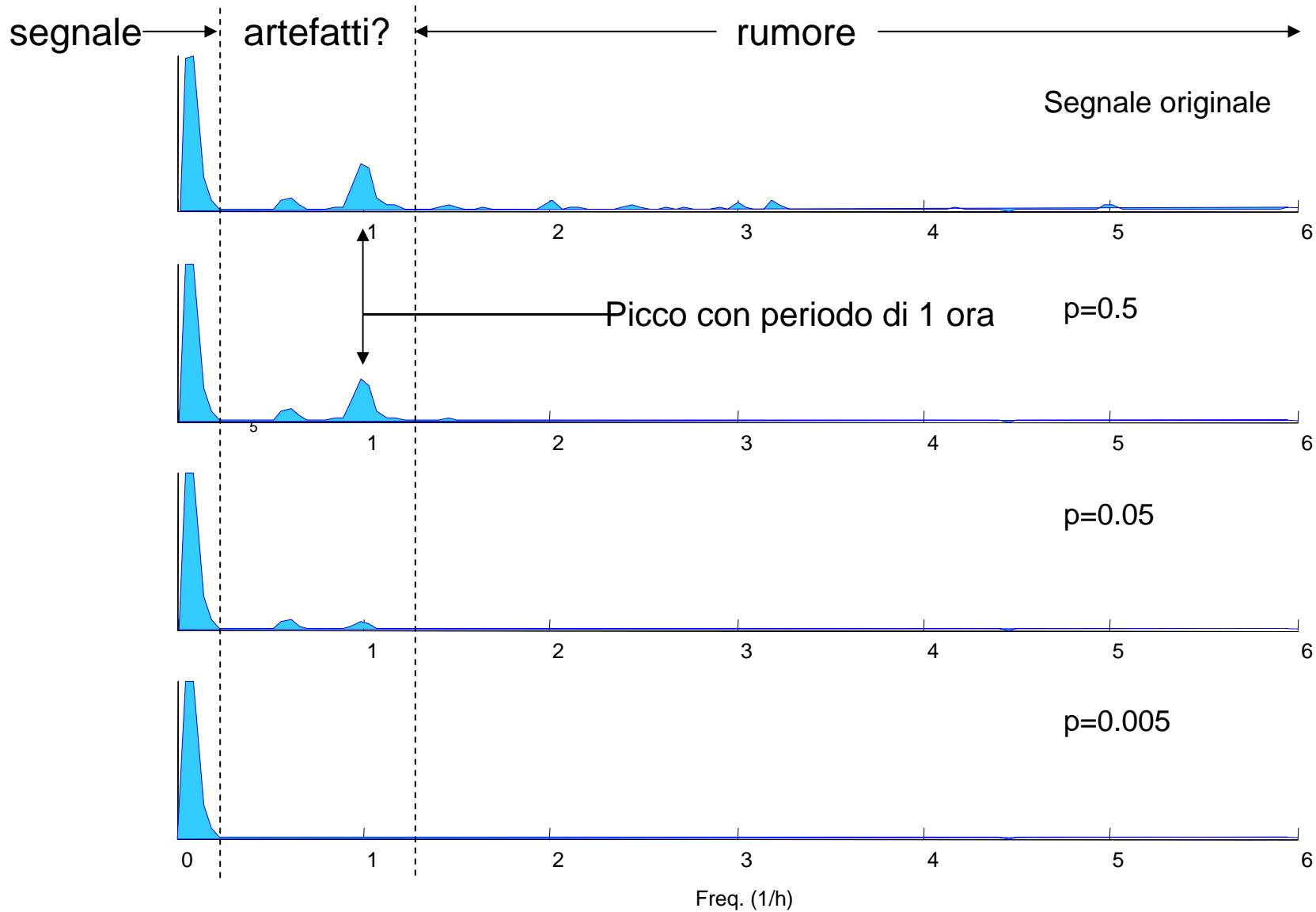


Quanto smoothing applicare?

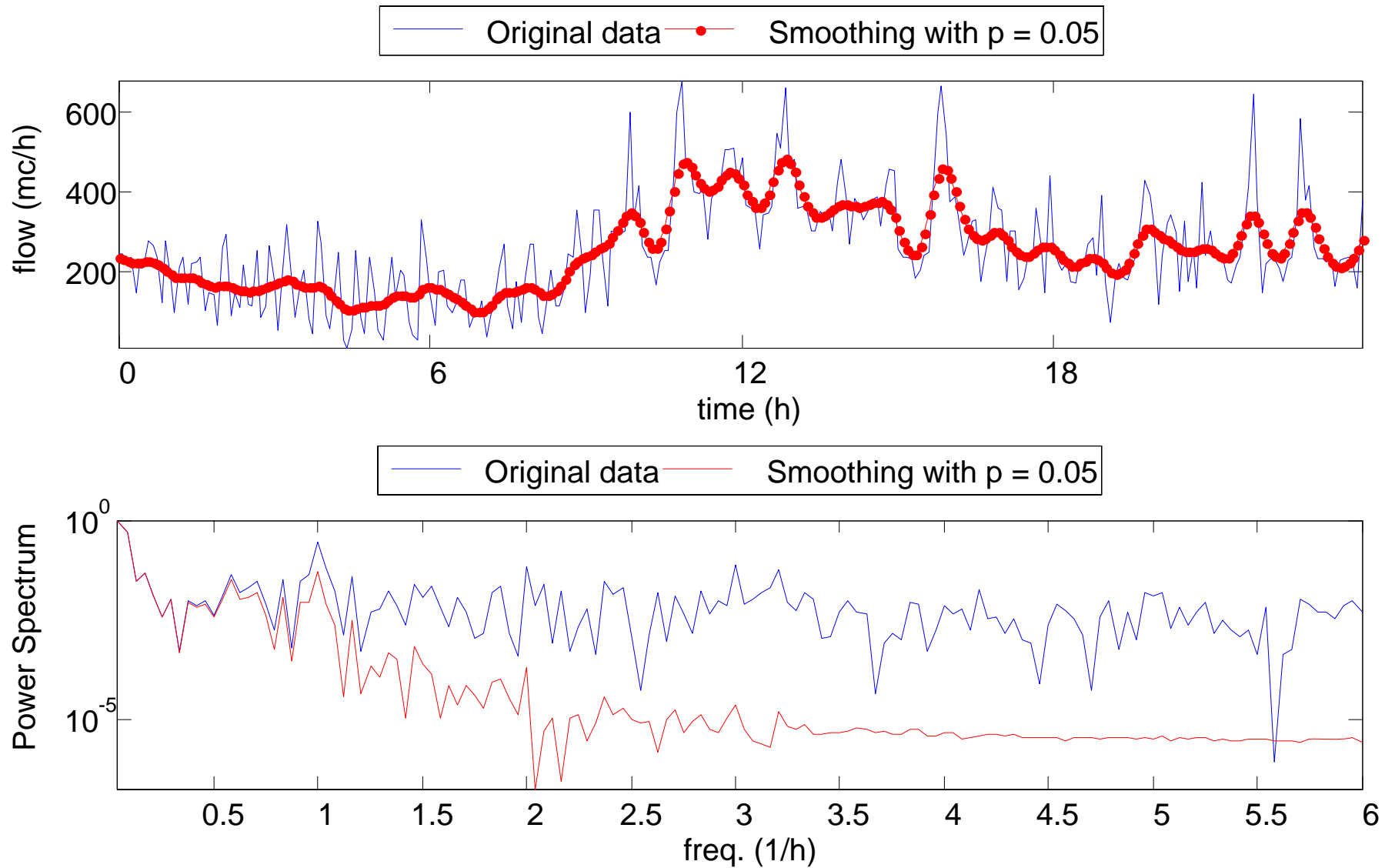
- ☞ Lo smoothing è una tecnica di filtraggio del rumore (stocastico) e degli artefatti (disturbi deterministici)
- ☞ La quantità di smoothing da applicare è controllata dal parametro p
- ☞ L'analisi in frequenza del segnale può essere di aiuto nel selezionare p
- ☞ In generale lo spettro della parte informativa del segnale (deterministico), degli artefatti (deterministici), e del rumore (stocastico) sono ben separati



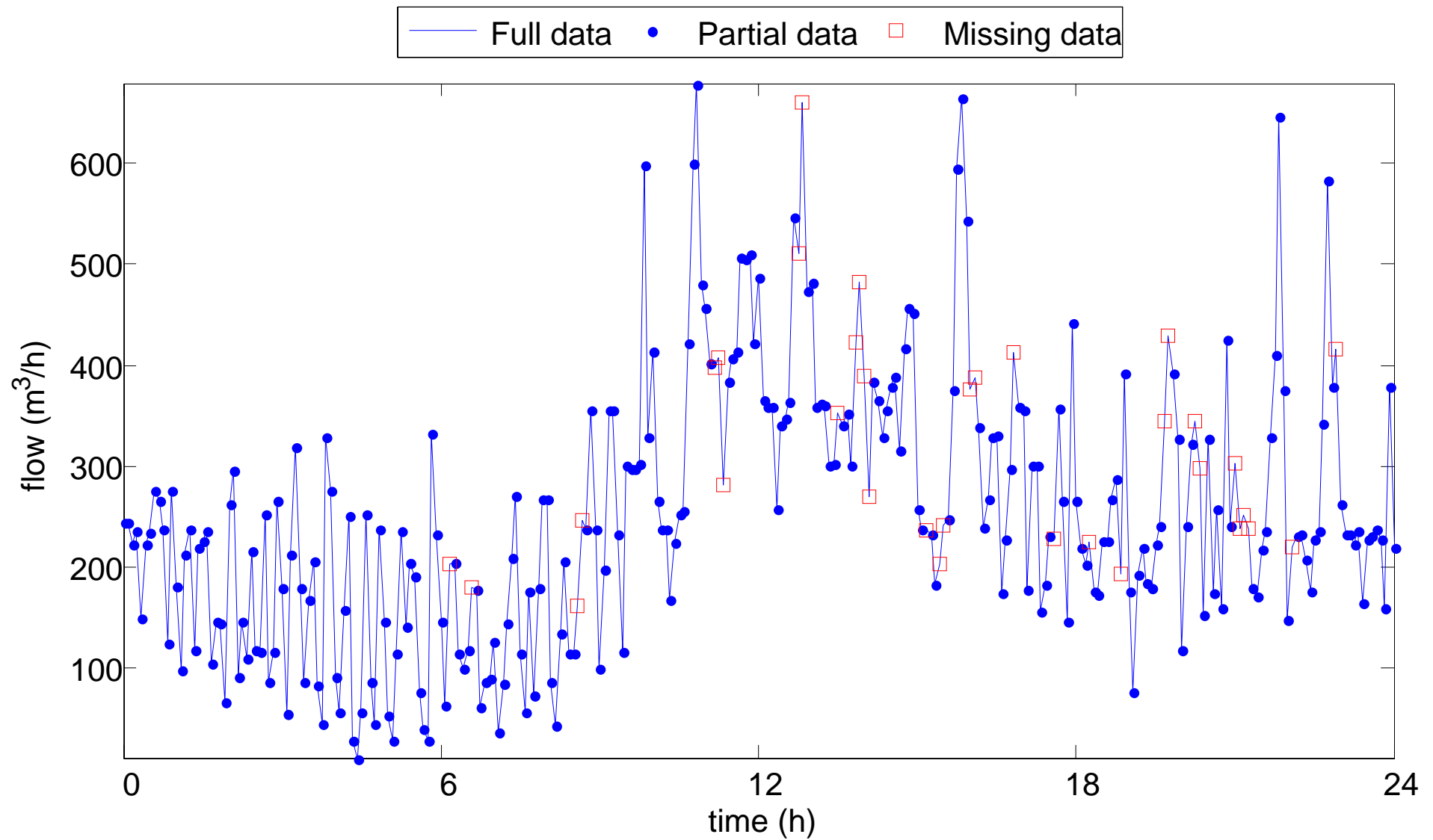
Spettro di frequenza al variare dello smoothing



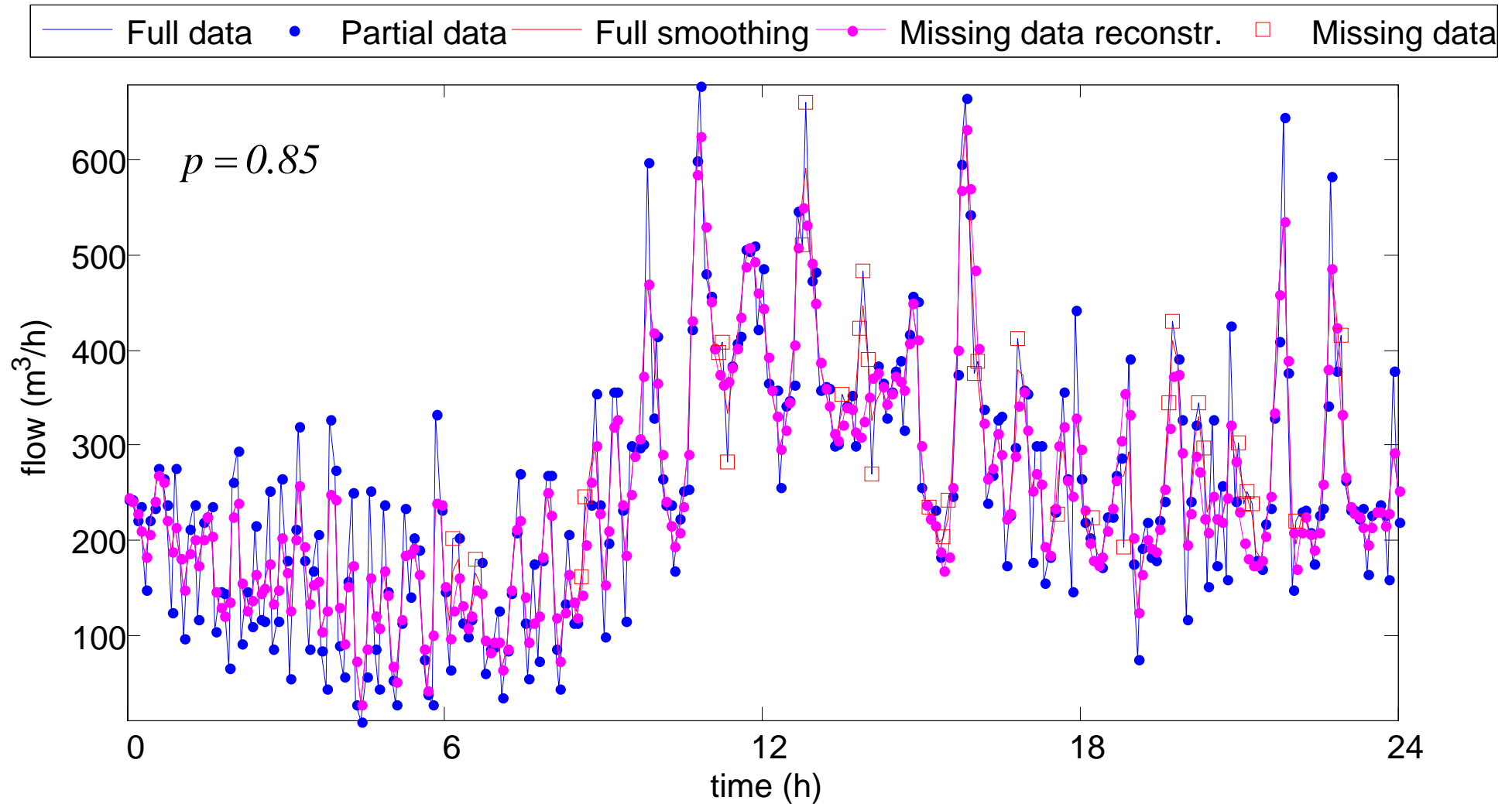
Smoothing



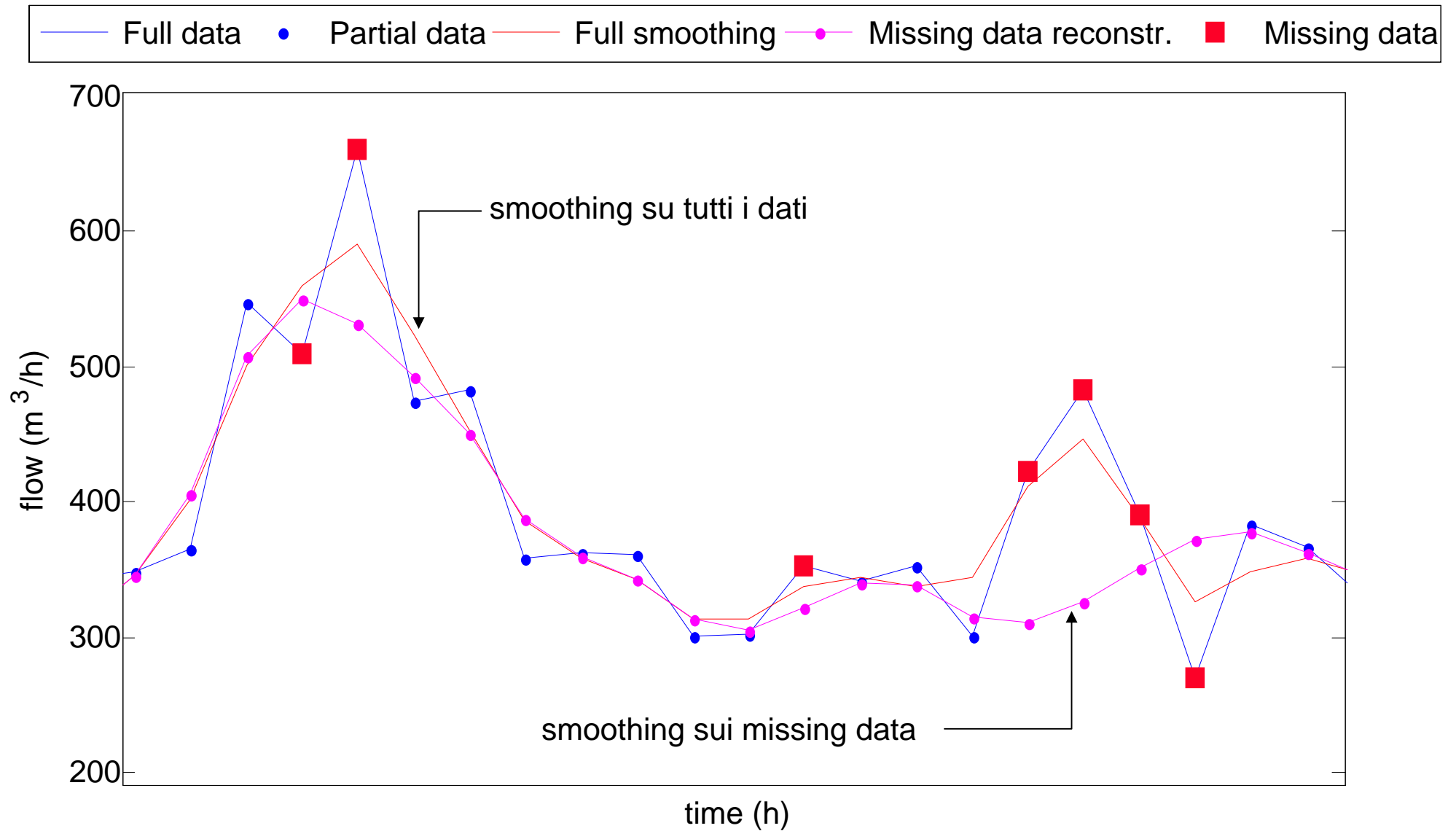
Serie con dati mancanti



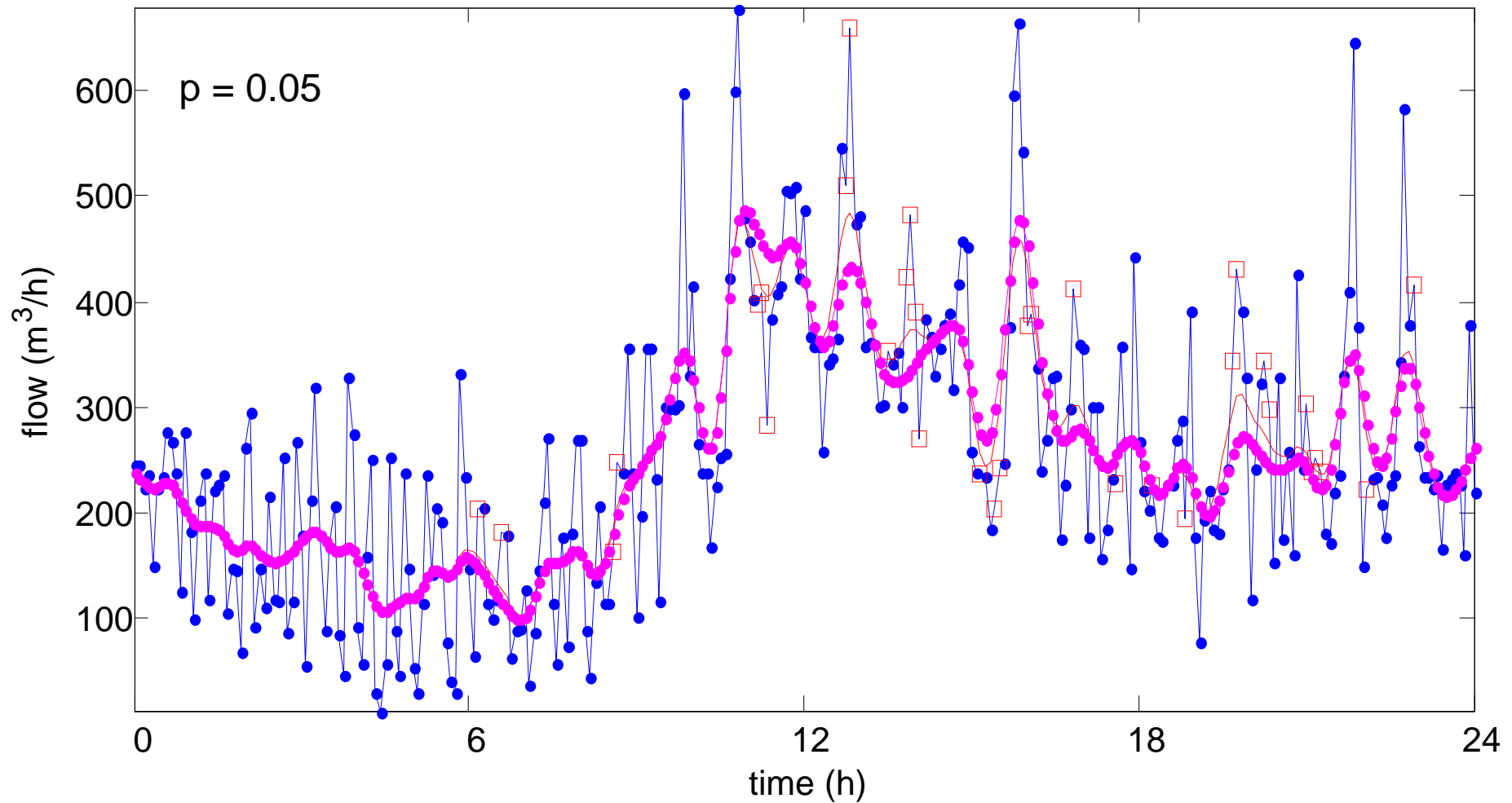
Usò delle splines per ricostruzione dati mancanti



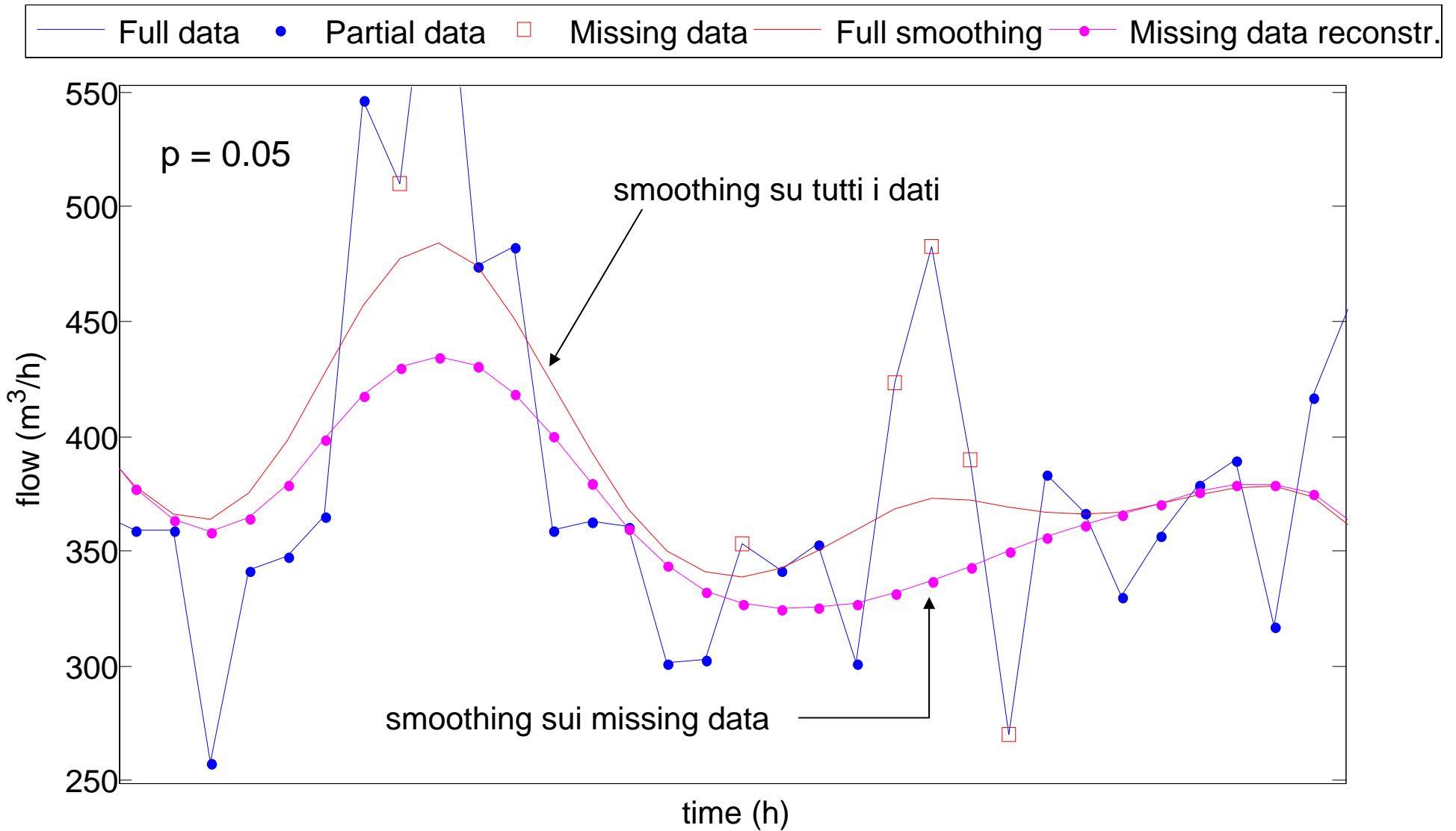
Particolare della ricostruzione



Divergenze per p piccolo

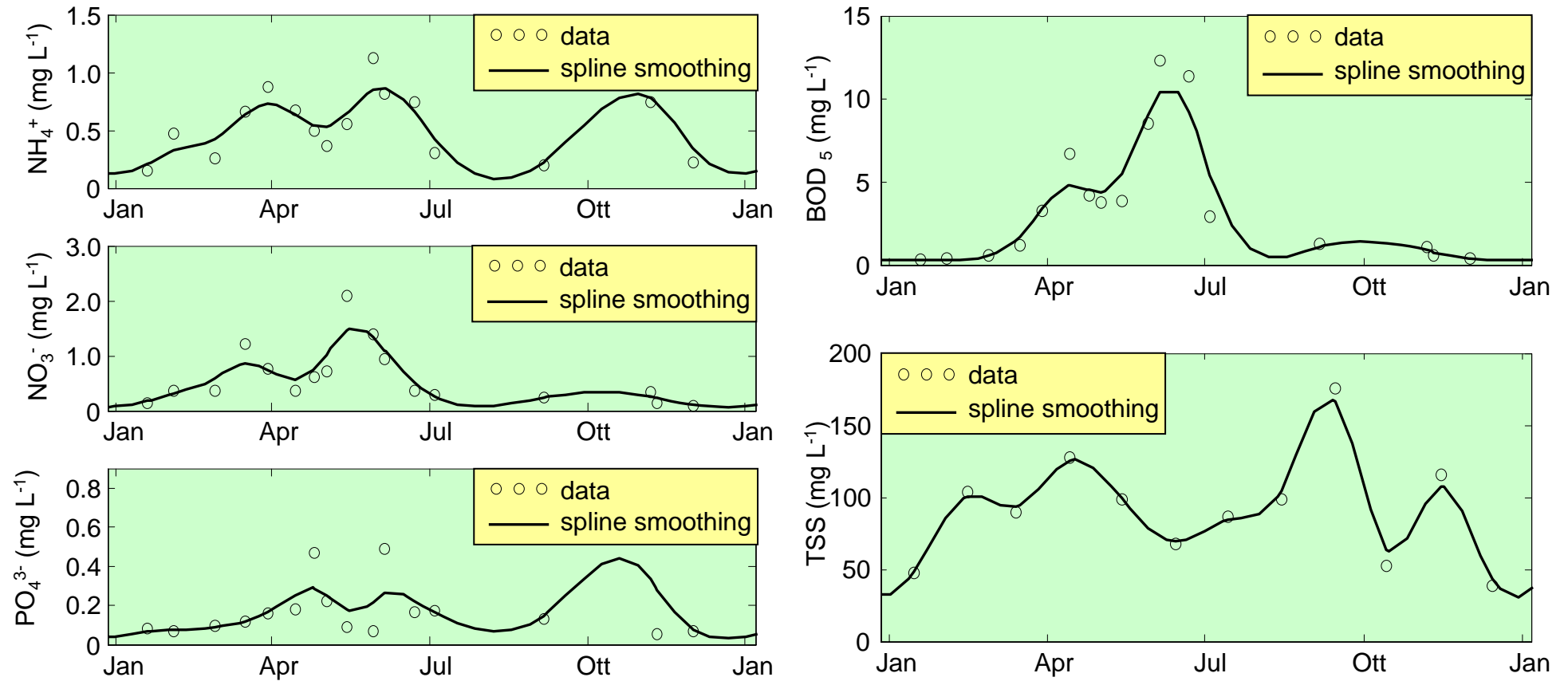


Divergenze per p piccolo (dettagli)



Applicazione

Ricostruzione di serie storiche di qualità dell'acqua nel Lago di Massaciuccoli per alimentazione di un modello Aquatox

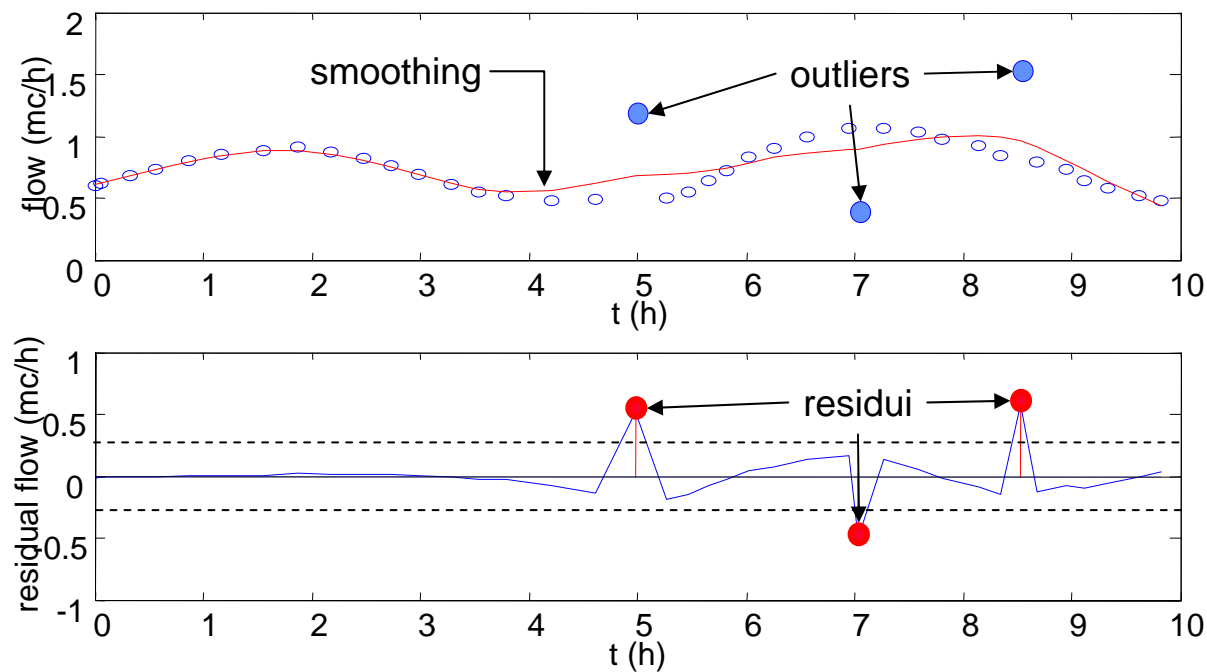


Outliers

👉 Dati *apparentemente* fuori dal range ammissibile

👉 Ricerca degli Outliers:

- Filtrare i dati con un semplice modello o effettuare uno smoothing
- Considerare i residui = differenze fra segnale originale e filtrato
- Si considerano Outliers i dati i cui residui superano una soglia prefissata



Sui dati è stato effettuato uno smoothing con spline cubica con $p = 0.9$. La scelta di p va fatta per tentativi tenendo conto delle caratteristiche dei dati.

Una prima scelta può essere

$$p = \frac{1}{1 + \frac{h^3}{0.6}}$$

h
spaziatura
media fra i
dati

Valutazione dei residui

👉 Analisi dei residui: Paragone fra il segnale originario e quello con smoothing attraverso la loro differenza

➤ Residui superiori ad una data soglia: Outliers

➤ Distribuzione statistica dei residui

✎ Analisi della distribuzione approssimata dall'istogramma

✎ Paragone della distribuzione con la distribuzione gaussiana

✎ Test di Kolmogorof-Smirnov (Lilliefors)

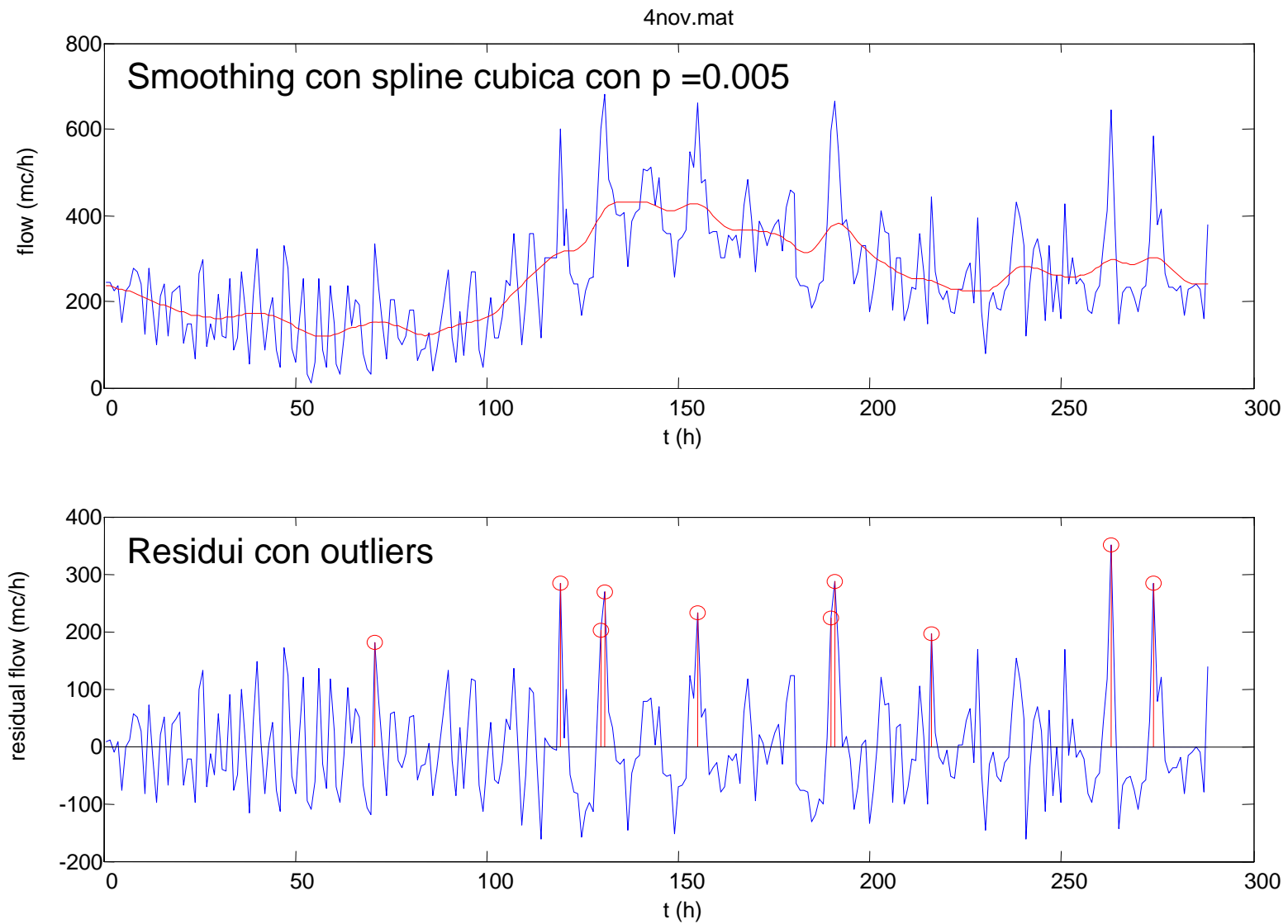
➤ Analisi dell'autocorrelazione dei residui

✎ Test di “bianchezza” sulla correlazione dei residui: il valore dell'autocorrelazione deve essere contenuto nella fascia di “zero statistico”

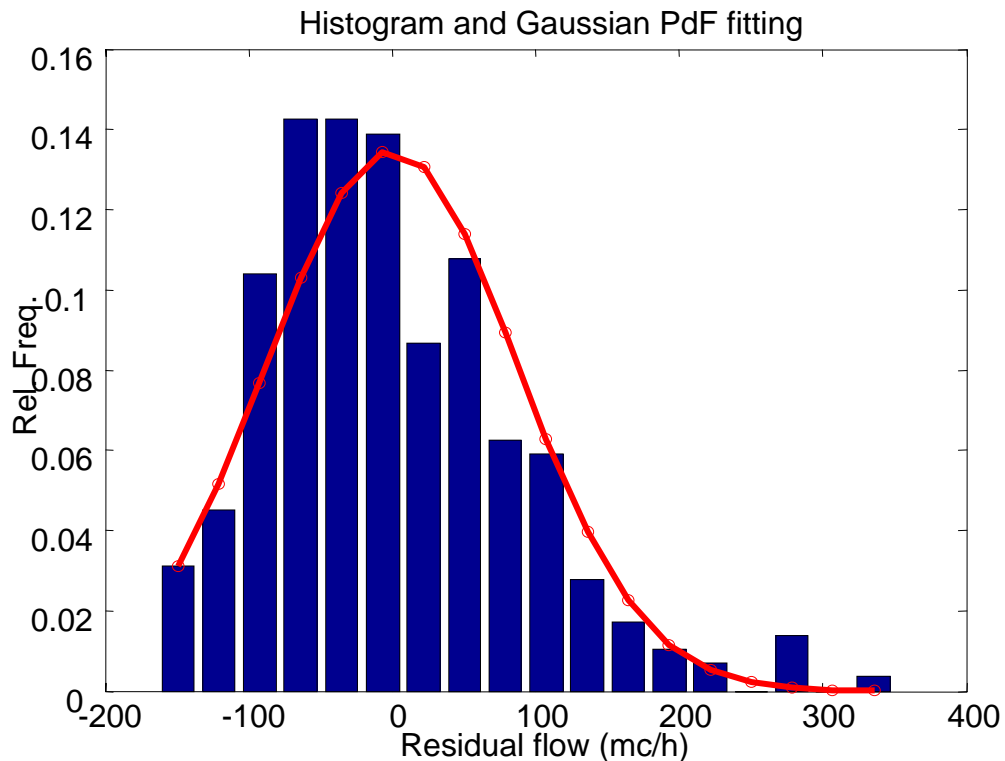
$$\rho(k) < \frac{1.96}{\sqrt{N}} \quad \forall k > 1$$

👉 Non è detto che il migliore smoothing produca residui gaussiani e incorrelati

Esempio di analisi dei residui

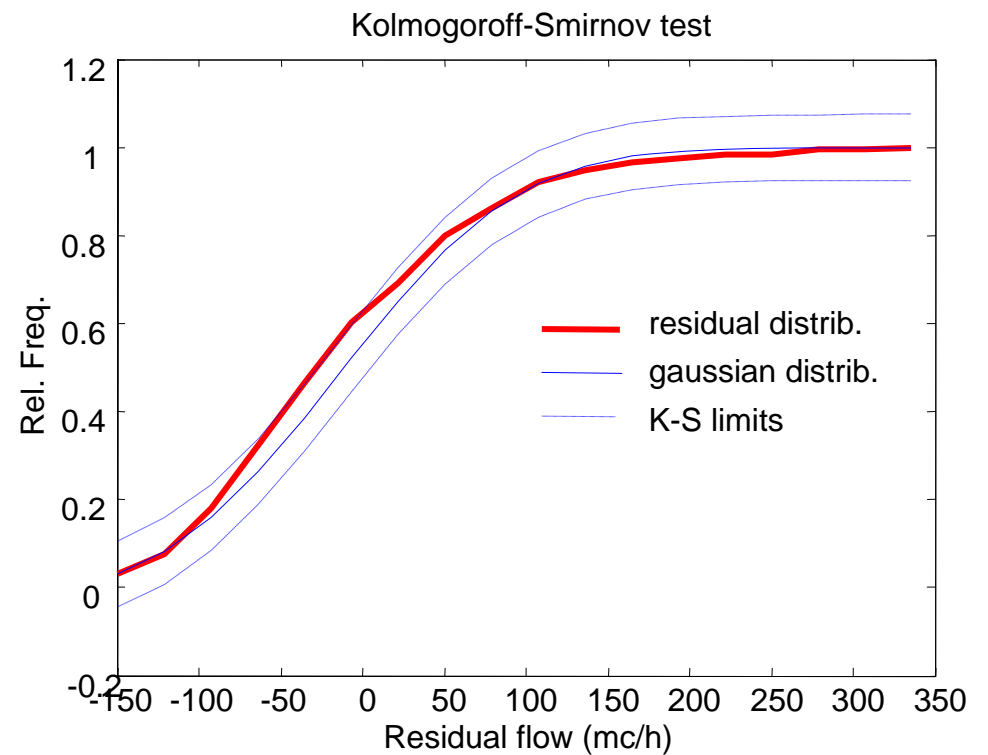


Paragone con la distribuzione gaussiana



L'integrale delle due distribuzioni dà la statistica cumulata su cui effettuare la valutazione in relazione ai limiti di Kolmogorof-Smirnov

L'istogramma è stato ricavato direttamente dalla distribuzione dei residui
La distribuzione gaussiana ha media e varianza ricavate dai residui



Test di Lilliefors

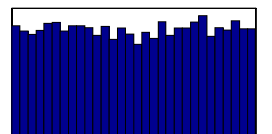
- Il test valuta l'ipotesi che un insieme di dati X sia distribuito gaussianamente, senza riferimento alla sua media e varianza
- Il test paragona la distribuzione X valuta gli scostamenti da un'equivalente distribuzione gaussiana di pari media e varianza
- Rispetto a Kolmogorov-Smirnov ha il vantaggio che la gaussiana di confronto è adattata ad X

$$H = \text{lillietest}(X)$$

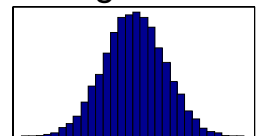
- Se $H = 1$ si può rifiutare l'ipotesi che X sia una distribuzione gaussiana, se $H = 0$ no.

Es: `X=rand(10000,1);hist(X);lillietest(X) ans = 1`

distr. uniforme



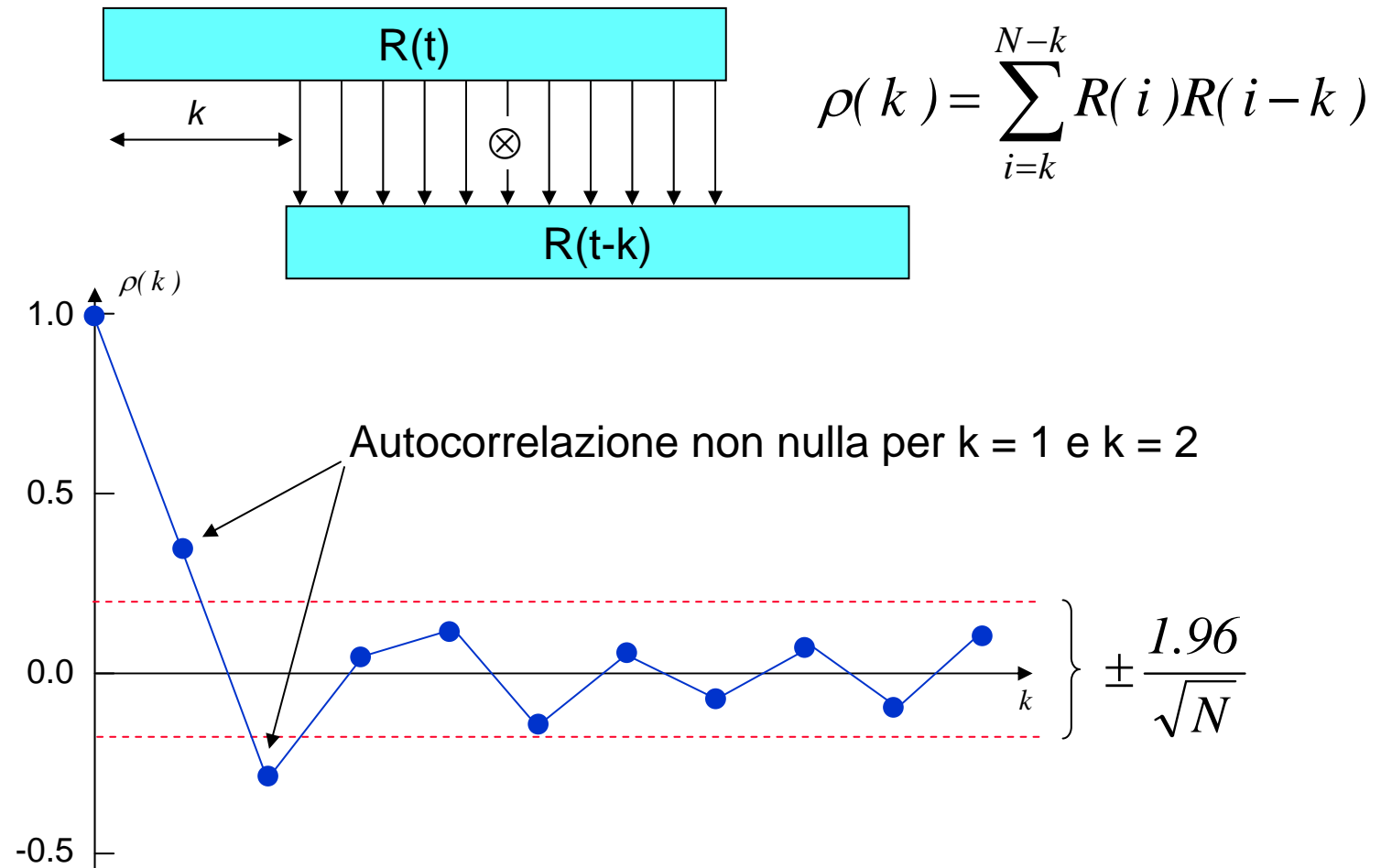
distr. gaussiana



`X=randn(10000,1);hist(X);lillietest(X) ans = 0`

Autocorrelazione

👉 Analisi di correlazione dei residui al variare del ritardo k



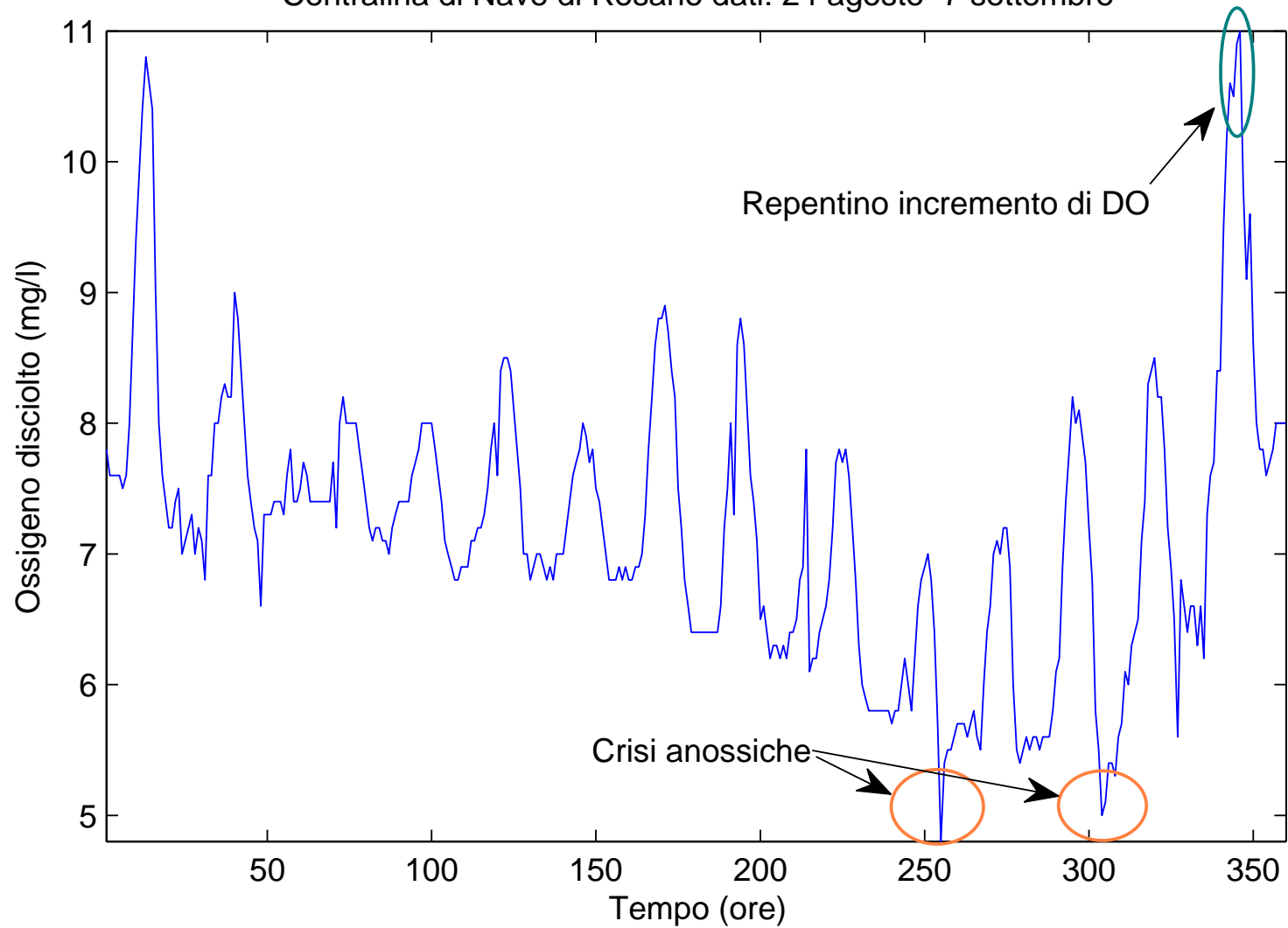
Analisi di dati di Ossigeno Disciolto

dall'elaborato di Chiara Arrighi

- 👉 I dati analizzati provengono dalla centralina situata sull'Arno a Nave di Rosano e coprono il periodo 24 agosto-7 settembre 2002 per un totale di 360 dati.
- 👉 Essi sono stati raccolti con un intervallo di un'ora
- 👉 I valori di ossigeno disciolto variano fra 4.8 e 11 mg/l
- 👉 E' evidente la periodicità circadiana della serie dovuta al ciclo circadiano della produzione fotosintetica, funzione dell'irraggiamento solare.
- 👉 Nel periodo si sono avute due crisi anossiche con valori di ossigeno disciolto di 4.8 mg/l e 5 mg/l mentre è presente una forte risalita alla fine della serie con un picco di 11 mg/l.

Serie di dati analizzati

Serie Temporale di Ossigeno disciolto
Centralina di Nave di Rosano dati: 24 agosto–7 settembre

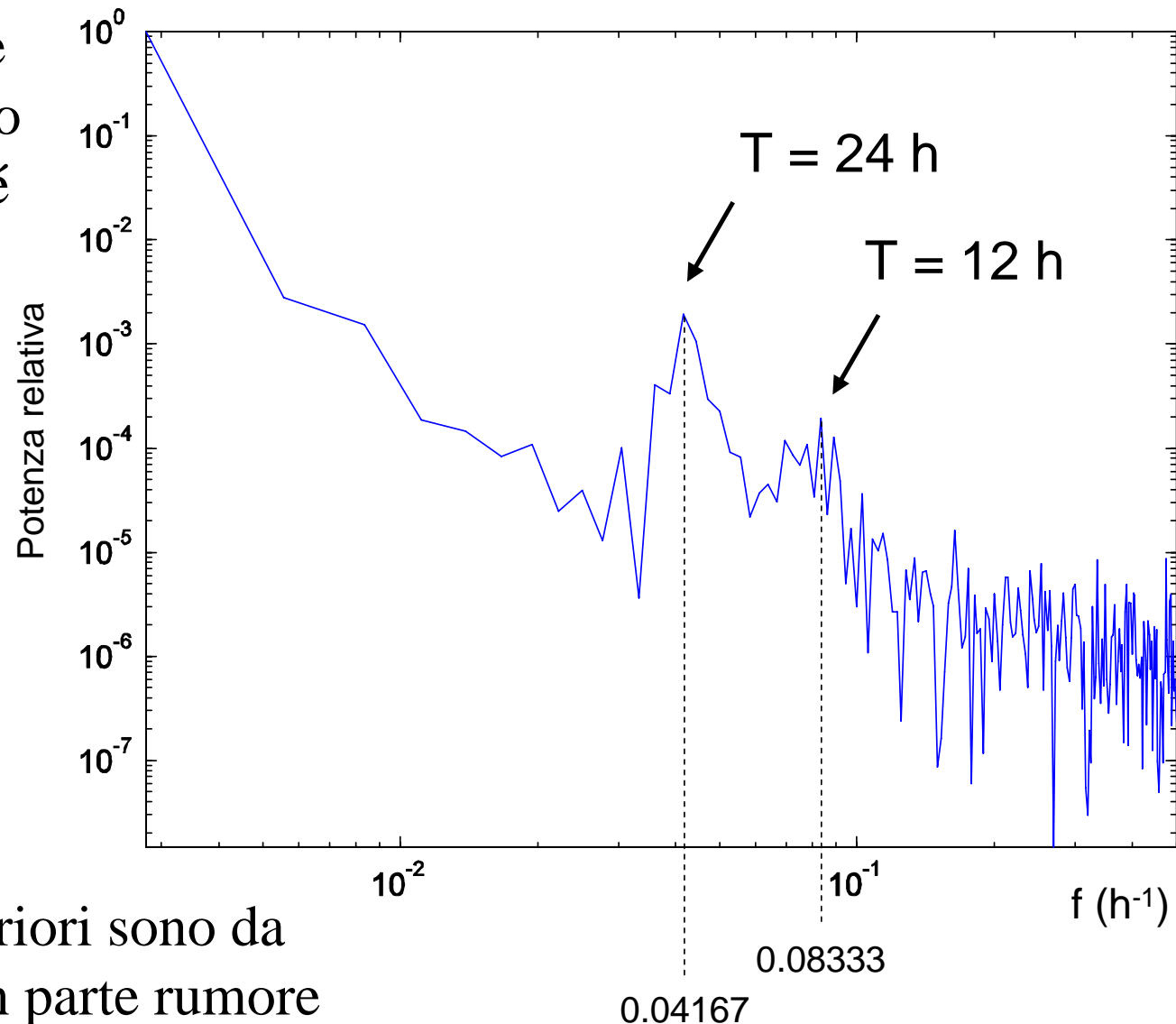


Analisi in frequenza con FFT

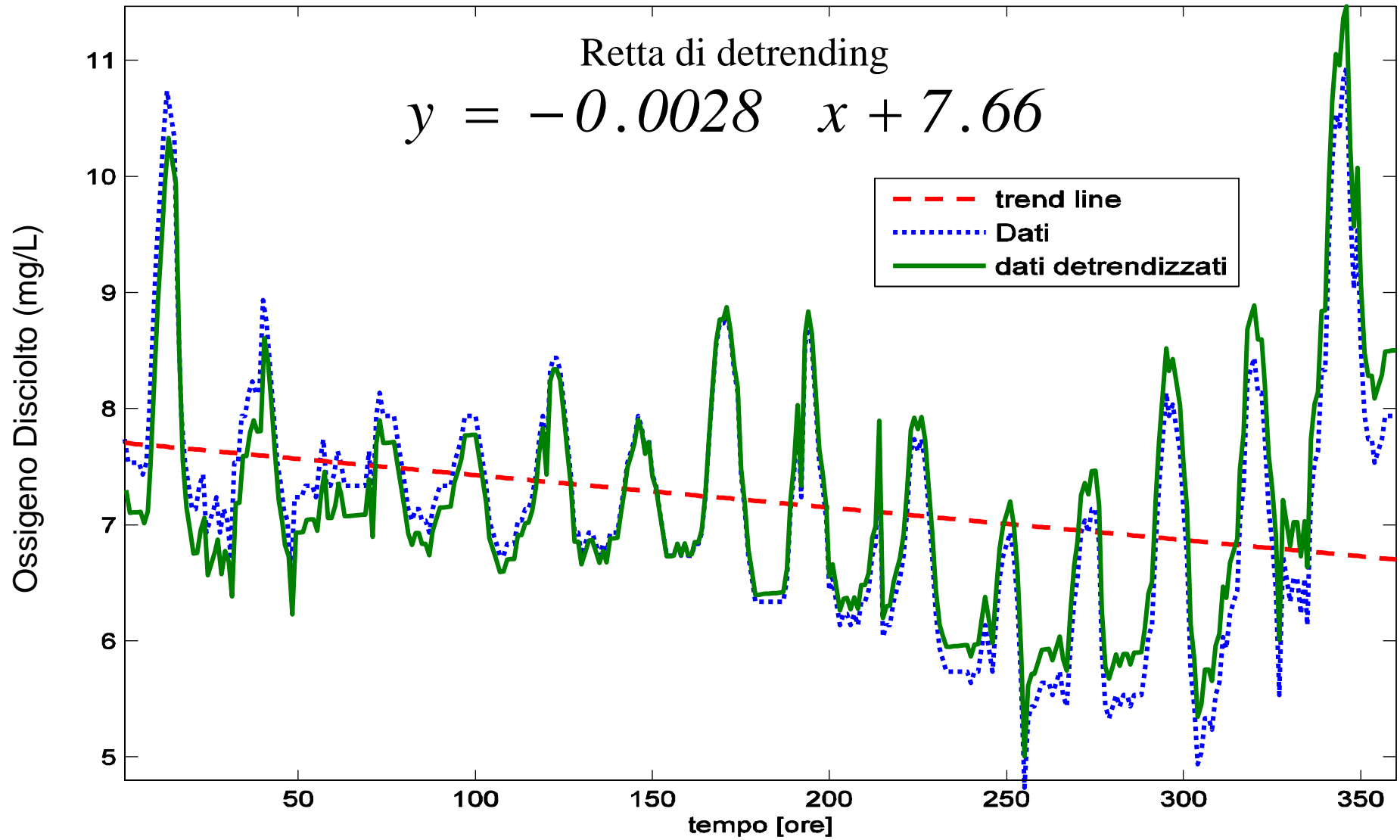
La frequenza limite di Nyquist in questo caso è 0.5 h, poiché i dati sono campionati a intervalli orari.

Sono evidenti le armoniche a 24 h e 12 h relative ai ritmi circadiani

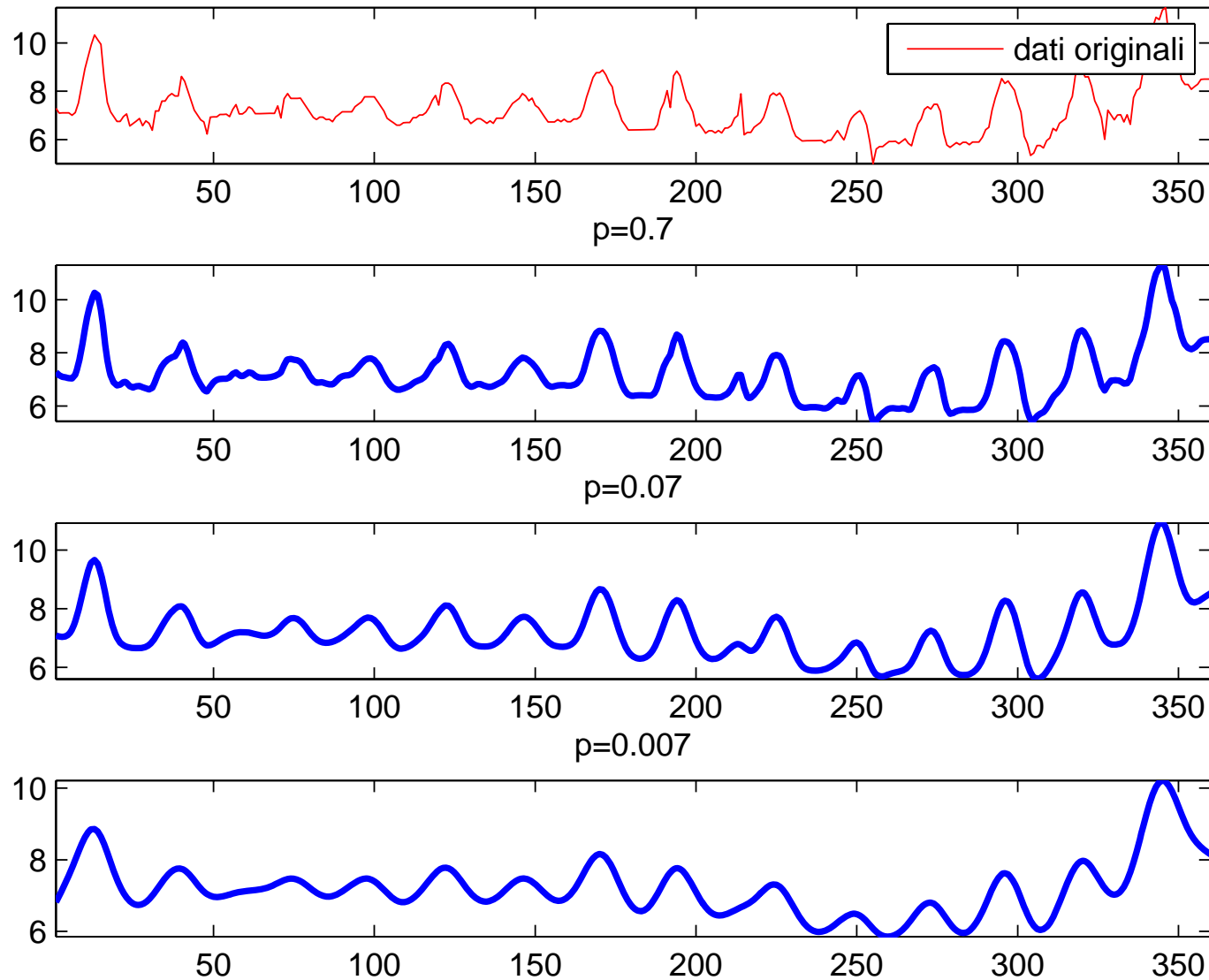
Le armoniche superiori sono da considerarsi in gran parte rumore



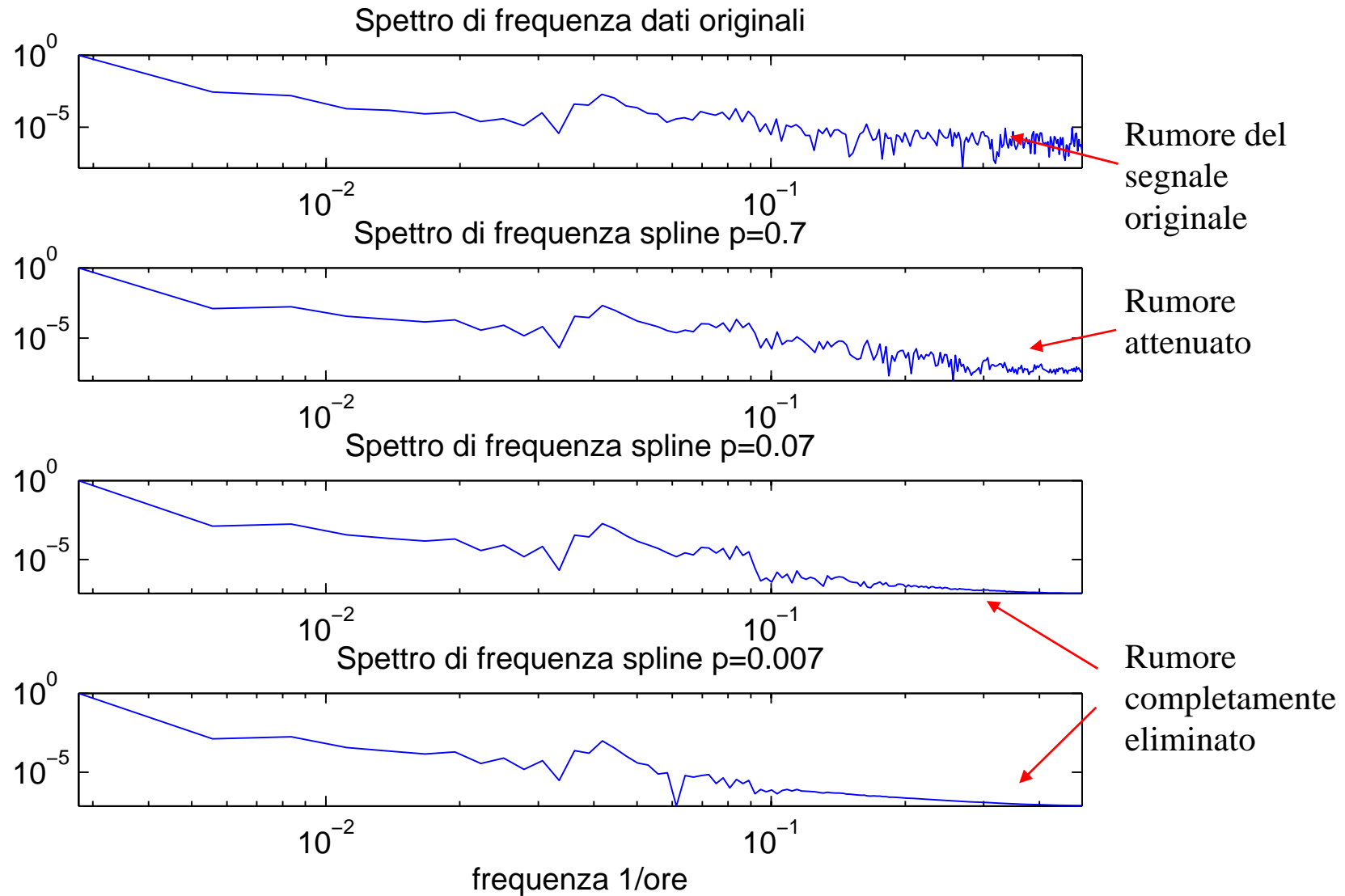
Detrending



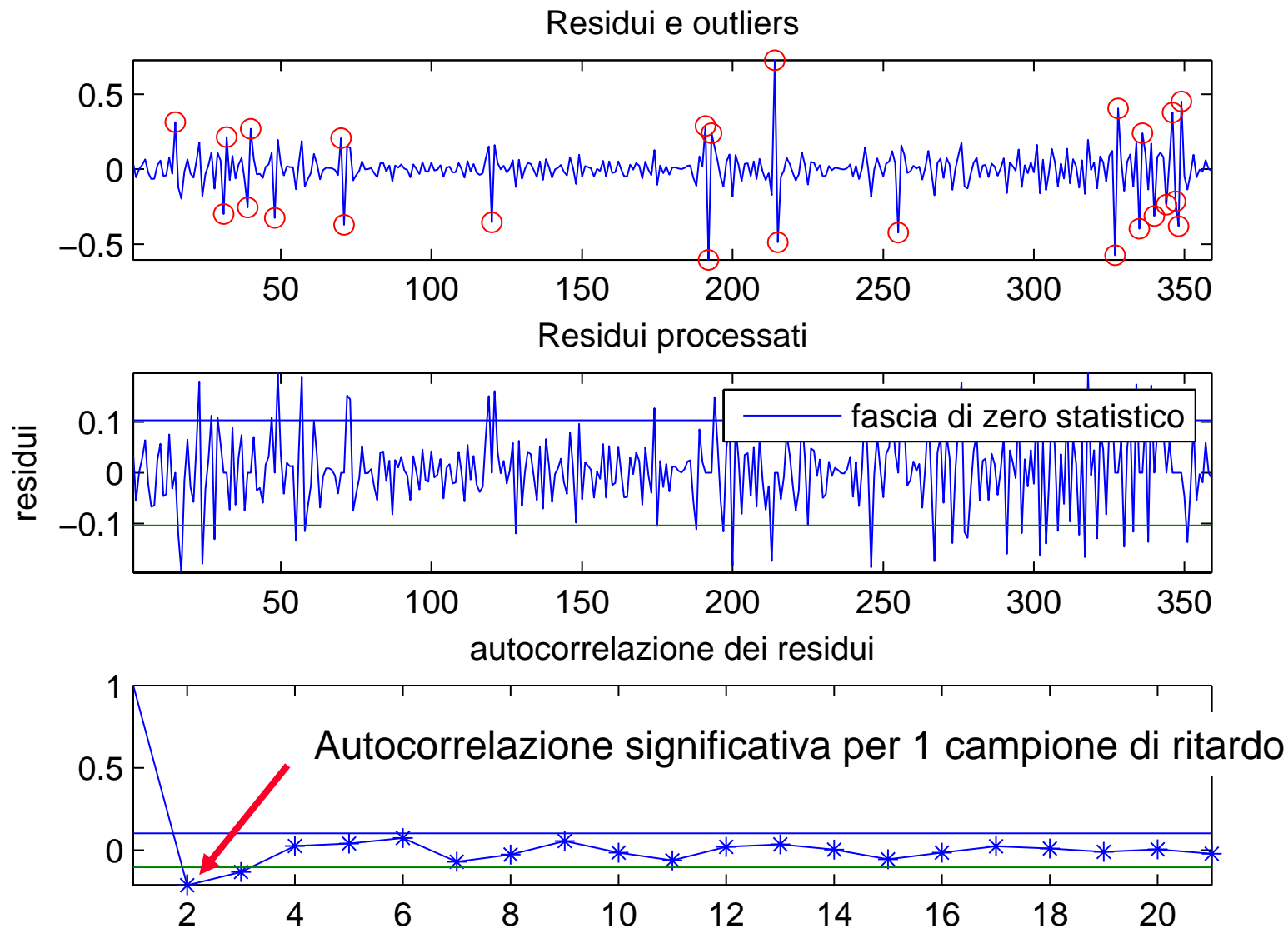
Smoothing mediante spline cubica



Analisi in frequenza dello smoothing



Residui e outliers



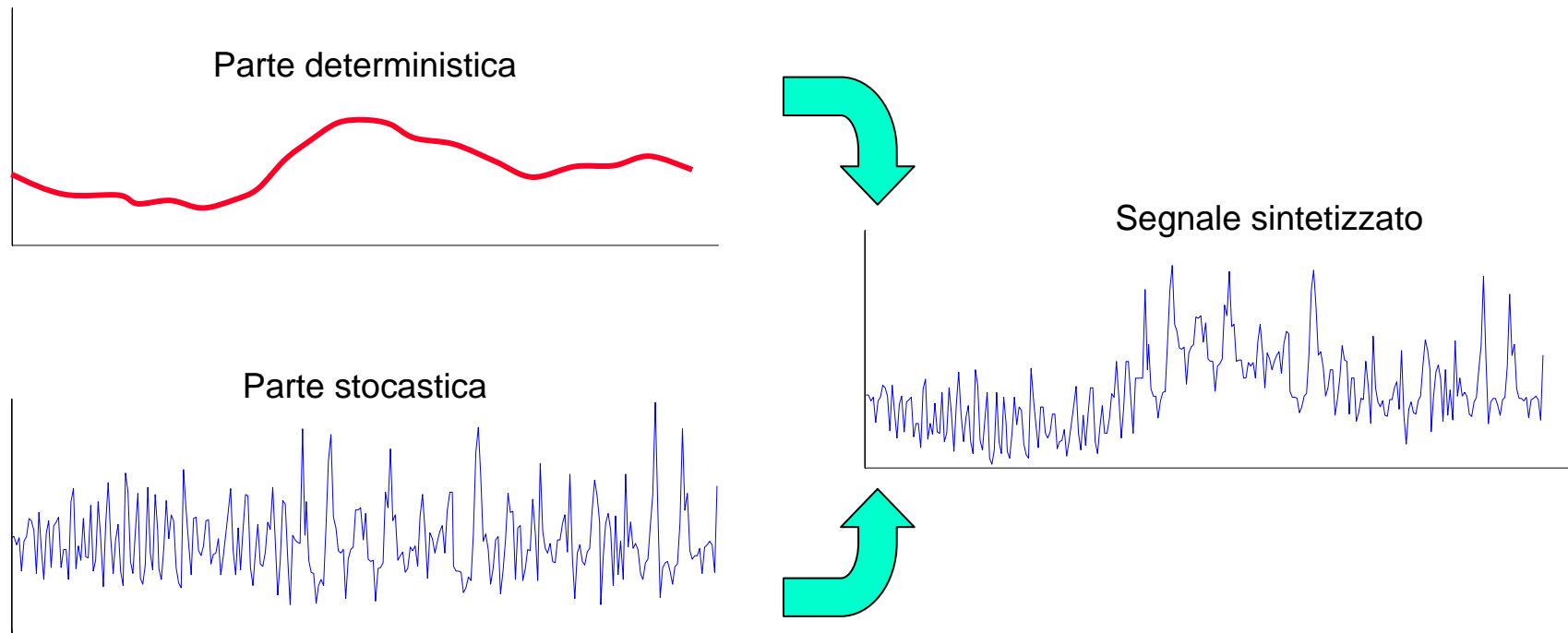
Spingendo il denoising della serie verso valori di p più piccoli, si ha un aumento della correlazione fra i residui anche in maniera periodica.

Inoltre dal test di Lilliefors risulta che i residui **non sono gaussiani**.

Sintesi di serie temporali

👉 Il segnale è composto da due parti:

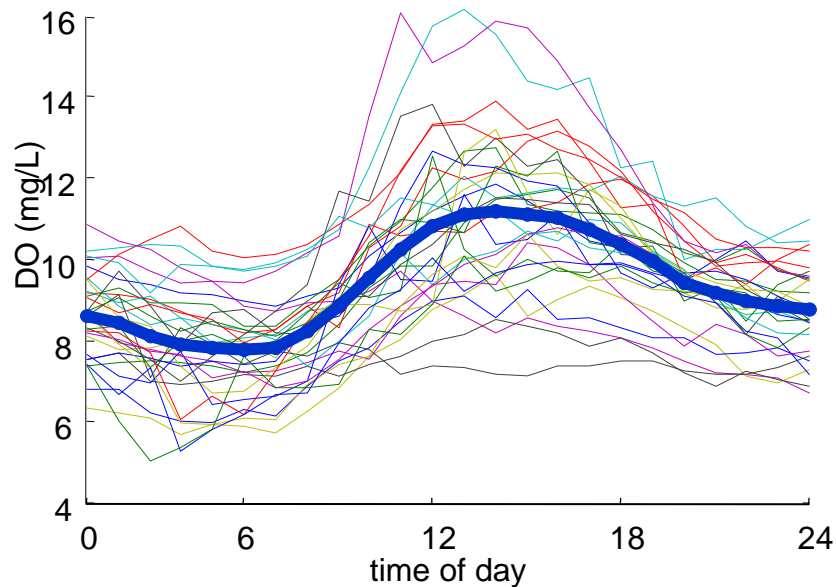
- ⇒ **Parte deterministica:** rappresenta l'andamento “medio” nel periodo, determinato dagli effetti ambientali *primari*, predicibili sulla base di un numero di osservazioni sufficientemente ampio (*comportamenti tipici*)
- ⇒ **Parte stocastica:** componente casuale, determinata dagli effetti ambientali *secondari*, non predicibili



Parte deterministica

- ☞ Le serie di dati ambientali presentano una periodicità *circadiana* dovuta ai cicli giornalieri delle variabili ambientali. Ad es.
 - ⇒ Periodicità giornaliera degli scarichi civili legata alle attività umane
 - ⇒ Periodicità giornaliera dell'ossigeno disciolto dovuta all'irraggiamento solare
- ☞ Normalmente si possono isolare dei comportamenti *tipici* rappresentativi di diverse situazioni. Ad es.
 - ⇒ Negli scarichi civili, diversità fra giorni lavorativi e festivi
 - ⇒ Nell'ossigeno disciolto, diversità stagionali
- ☞ E' importante disporre di un criterio per decidere sulla rappresentatività di ciascun comportamento
 - ⇒ Frequenza di ripetizione
 - ⇒ Tipicità delle condizioni in cui è osservato
- ☞ Dall'osservazione ripetuta di un grande numero di cicli simili, si può ricavare il comportamento *tipico* di quei cicli ed usare questo dato *sintetico* per la costruzione di nuove serie temporali

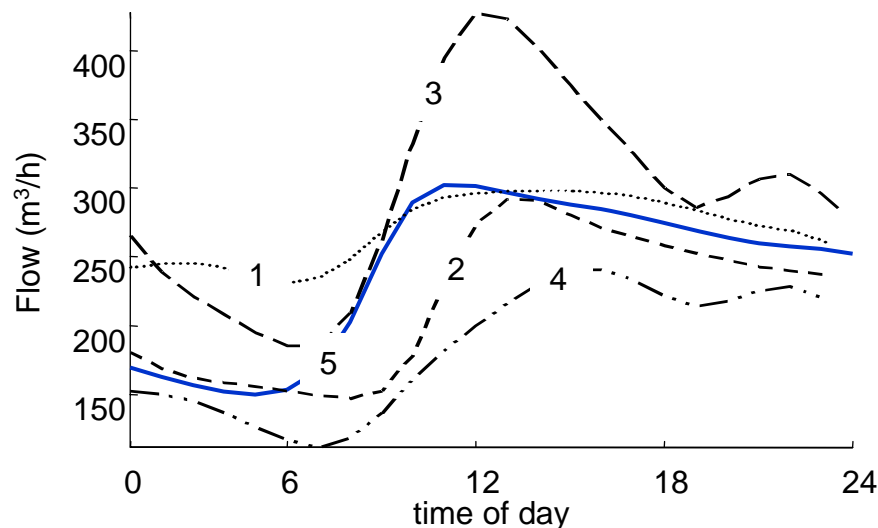
Esempi di comportamenti deterministici



Andamento giornaliero dell'ossigeno disciolto nella laguna di Orbetello nel mese di Aprile.

Si nota il forte aumento di DO nelle ore centrali della giornata dovuta all'irraggiamento solare ed alla conseguente attività algale.

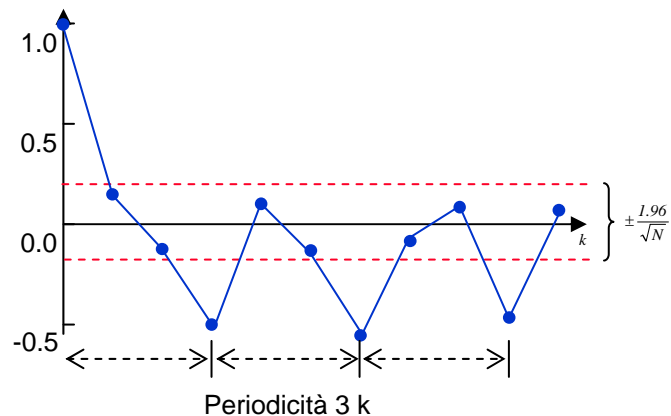
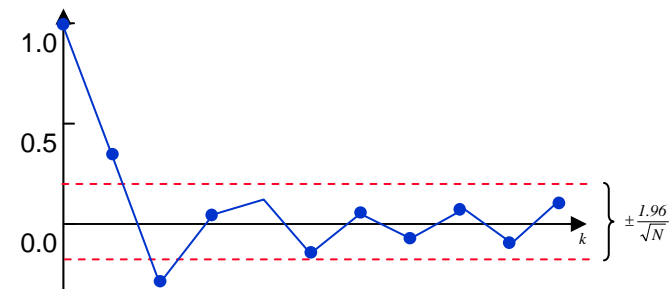
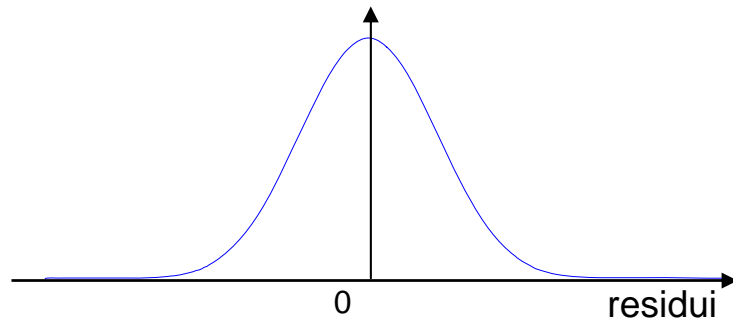
L'andamento medio (curva blu) è stato ricavato come media dei profili giornalieri osservati.



Andamento giornaliero della portata di reflui civili all'ingresso del depuratore di San Giusto (FI):

- 1 - Basso carico (estivo)
- 2 - Medio carico con discreta variazione circadiana
- 3 - Alto carico con forte variazione circadiana
- 4 - Basso carico con discreta variazione circadiana
- 5 - Medio carico con media variazione circadiana (il più frequente)

Parte stocastica



Distribuzione di probabilità:

Si può assumere una distribuzione gaussiana a media nulla, anche se in pratica si è visto che non sempre è così.

Nota: Nell'analisi di serie reali la distribuzione è funzione del metodo usato per estrarre la parte deterministica (smoothing)

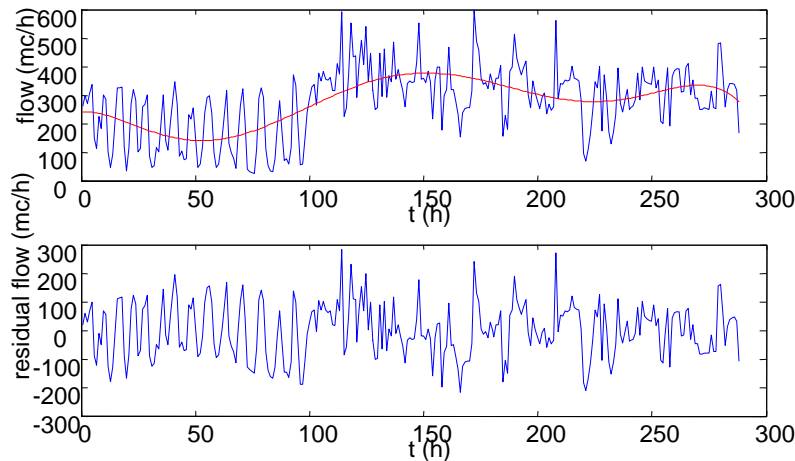
Autocorrelazione:

Generalmente i residui sono correlati fra loro, specialmente se il modello è insufficiente.

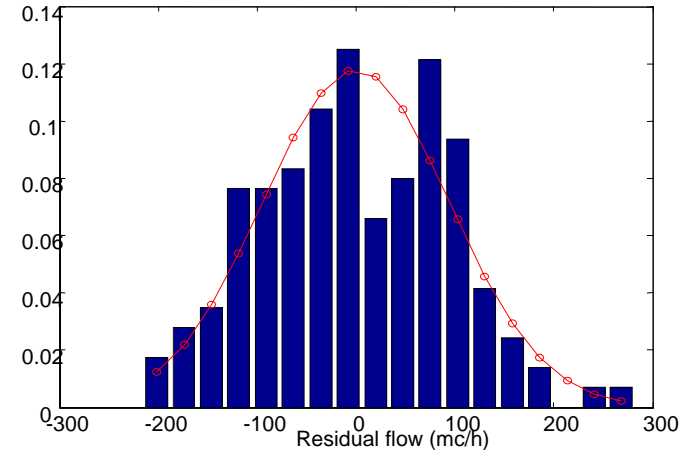
Nota: Se c'è da riprodurre una componente periodica ad alta frequenza, essa andrà simulata introducendo una periodicità nei residui.

Studio di caso: portate sintetiche per l'impianto di San Giusto

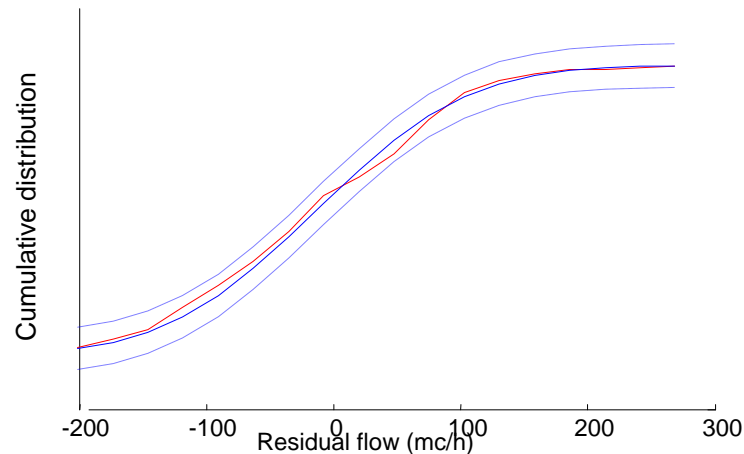
1 – Smoothing per isolare la parte deterministica e calcolo dei residui



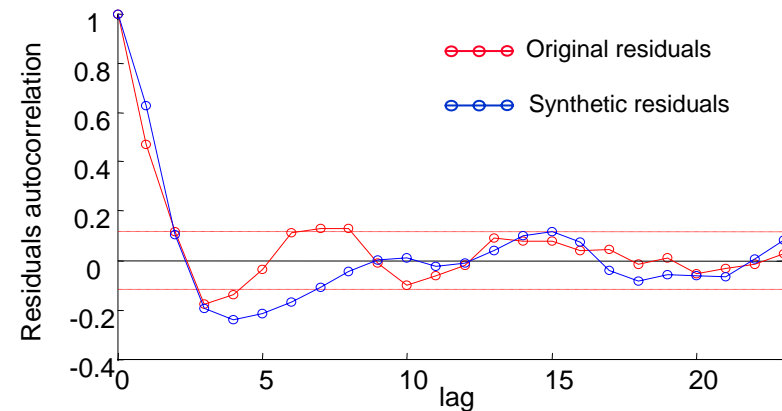
2 – Istogramma dei residui e fitting di una distribuzione gaussiana



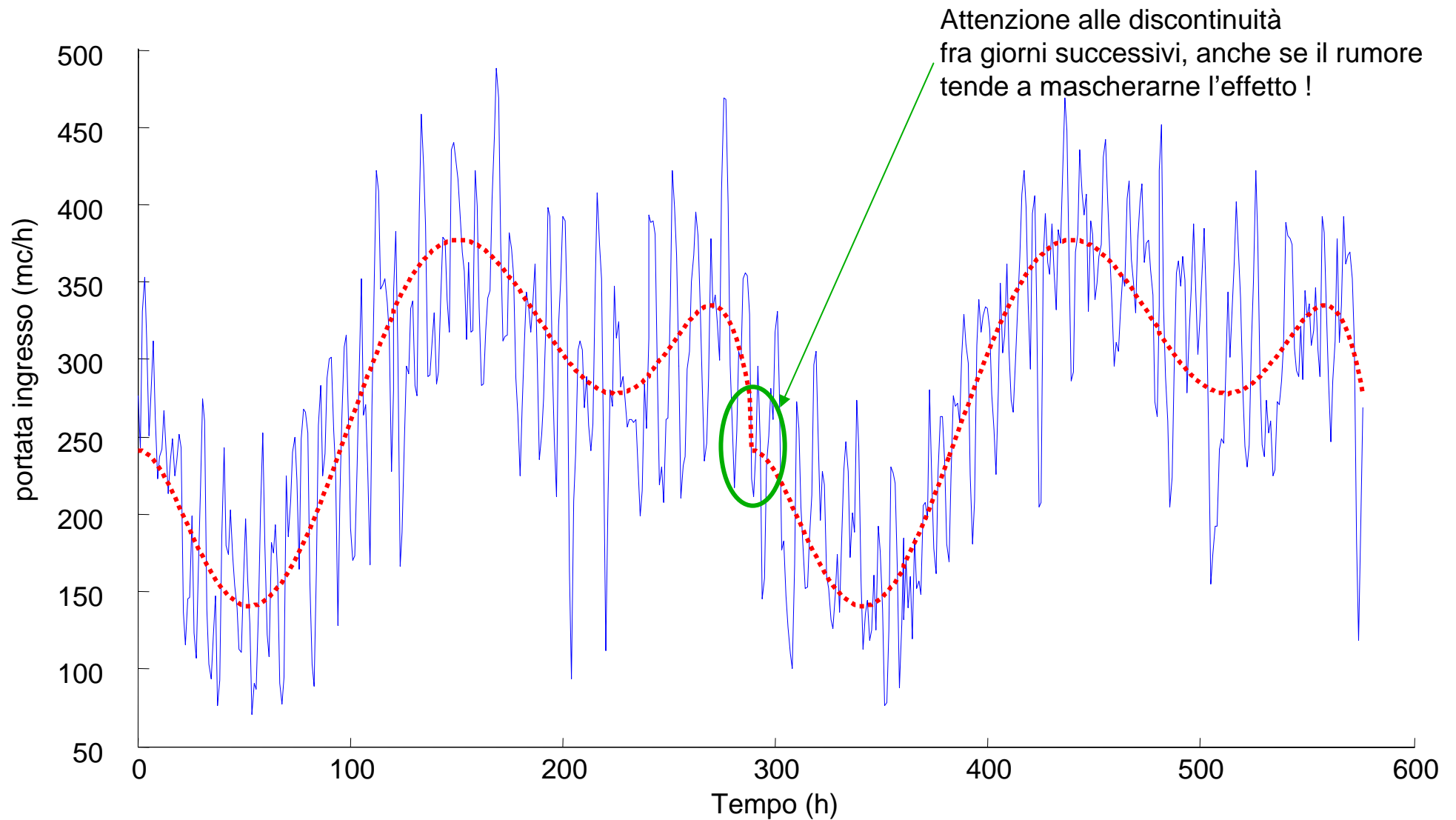
3 – Test di gaussianità della distribuzione con Kolomogov - Smirnov



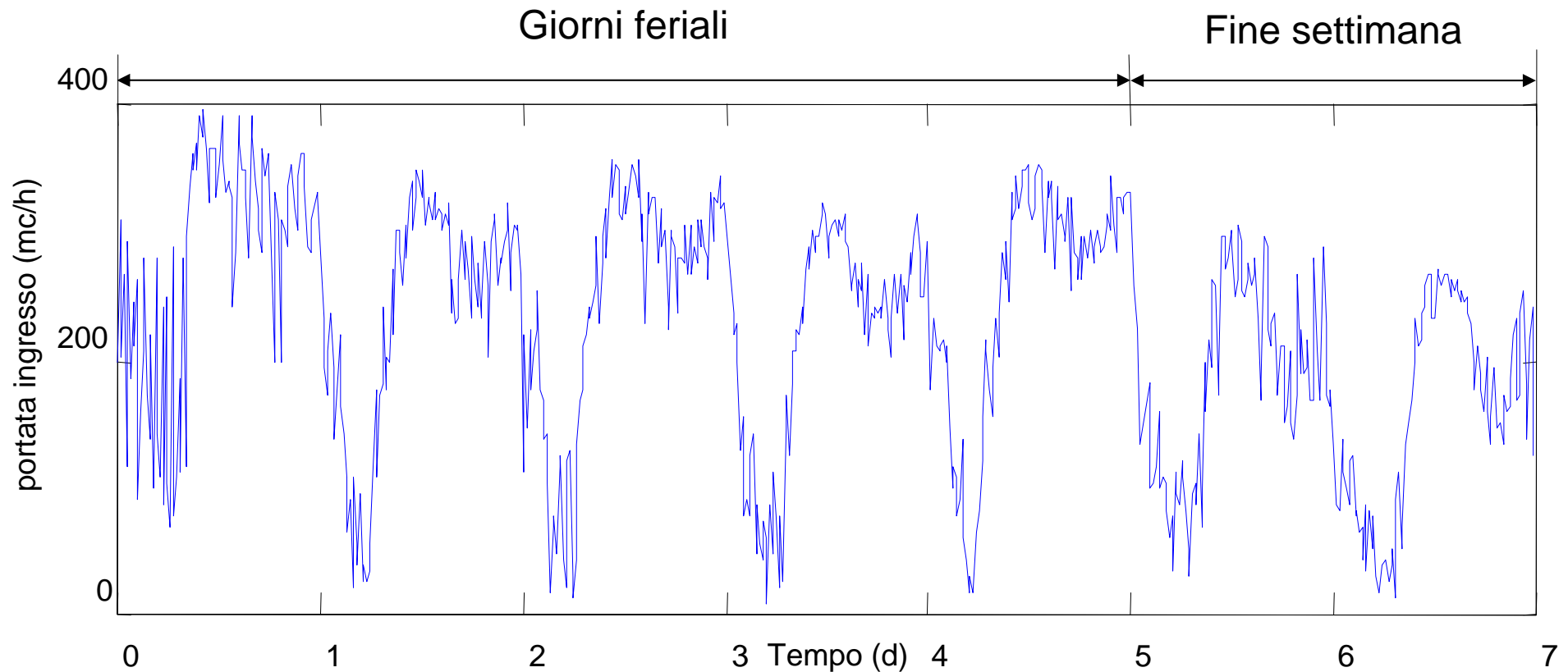
4 – Autocorrelazione dei residui per evidenziare eventuali correlazioni e periodicità (in questo caso pari a 1 ora)



Due giorni di dati sintetici



Serie sintetica



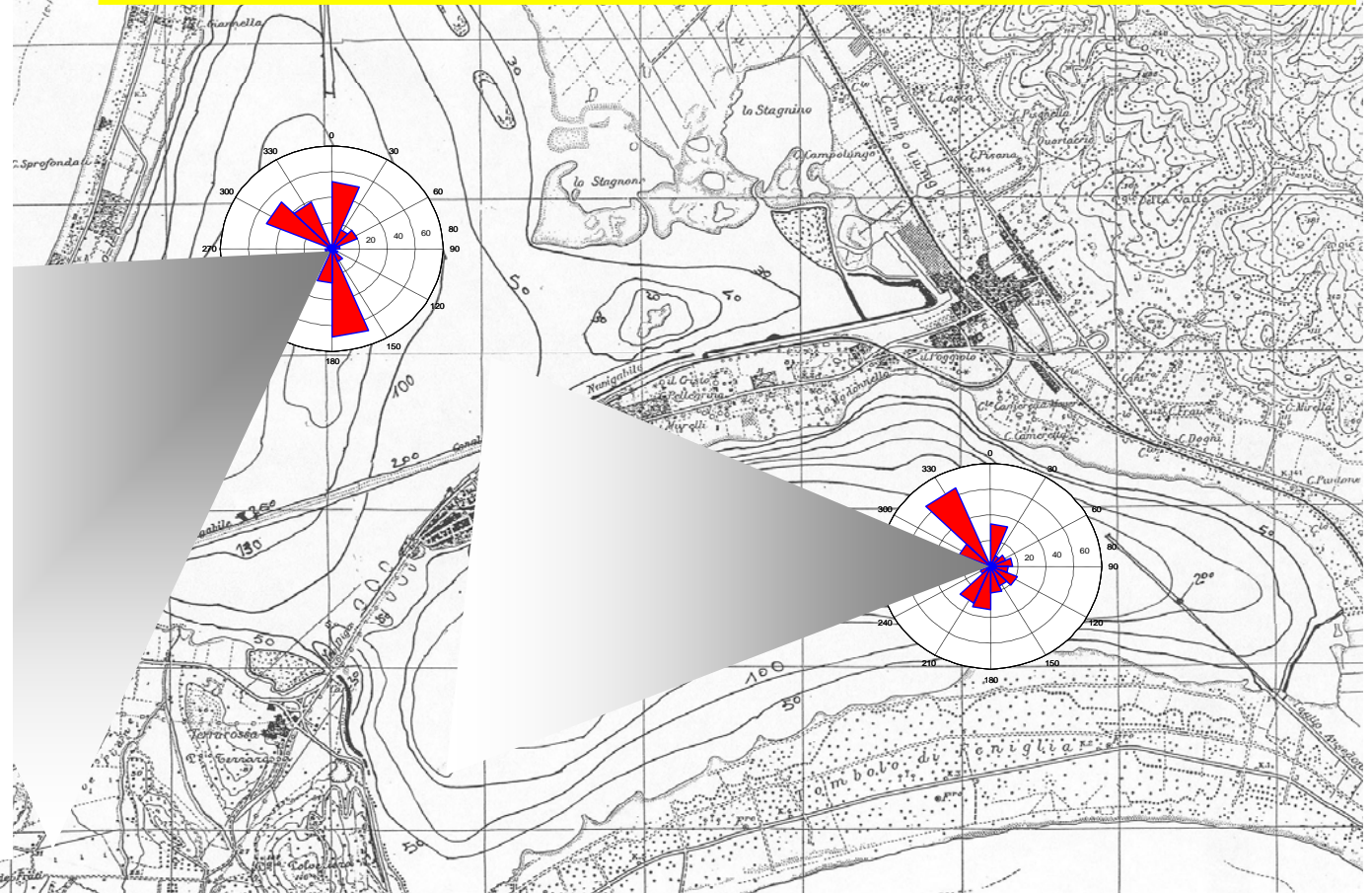
Avvertenze:

- 1 – Porre attenzione ai raccordi fra i giorni successivi: i valori iniziale e finale di ciascun giorno dovrebbero essere quasi uguali.
- 2 – Usare due basi deterministiche diverse per i giorni feriali e per quelli festivi per tener conto del diverso regime.

Applicazione: sintesi di serie di vento

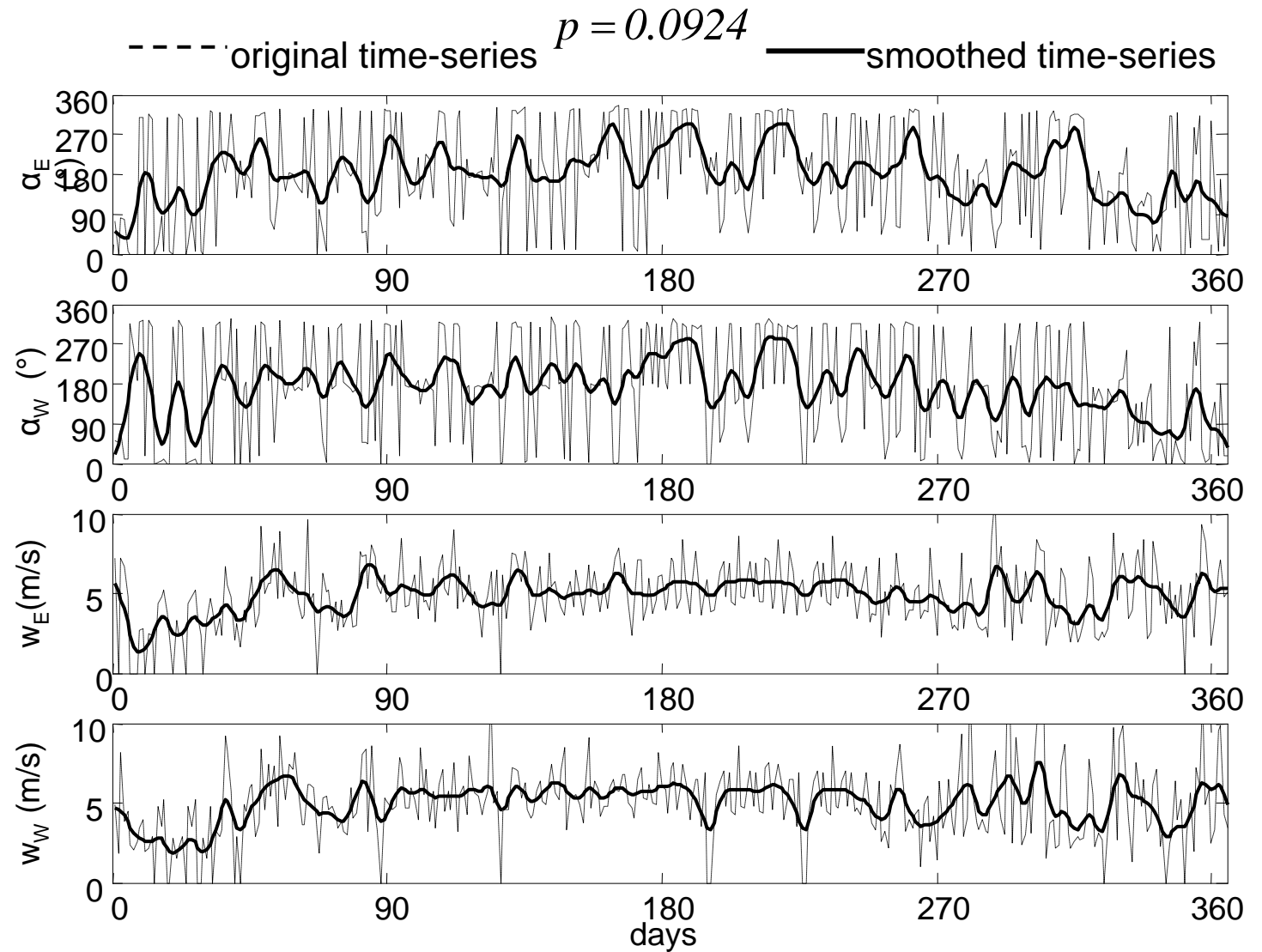
- 👉 La forzante primaria nella laguna di Orbetello è il vento
- 👉 Per alimentare il modello di simulazione della qualità in laguna servono molte serie di venti
- 👉 Si ricavano dalle serie osservate

Giusti E., Marsili-Libelli S. An integrated model for the Orbetello lagoon ecosystem. *Ecological Modelling*, **196**: 379-394 (2006).

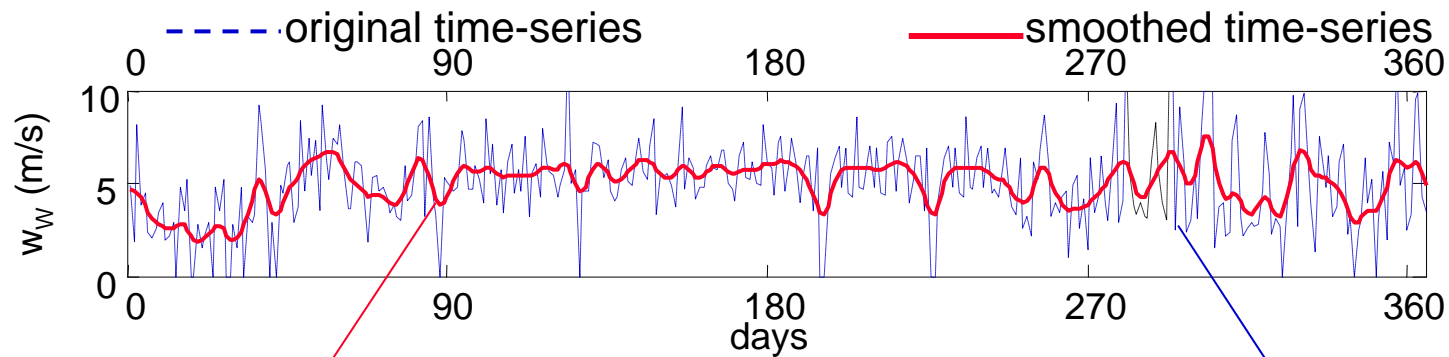


Smoothing dei dati

- ☞ Si inizia regolarizzando le serie osservate
- ☞ Attraverso lo smoothing con splines si riduce il rumore
- ☞ Poi si isolano le statistiche delle serie



Decomposizione in parte deterministica e stocastica



Smoothed time-series

Parte deterministica

Mantenere come base

Sintesi serie sintetiche

Residuals

Parte stocastica

Autocorrelazione
=
Ordine del modello

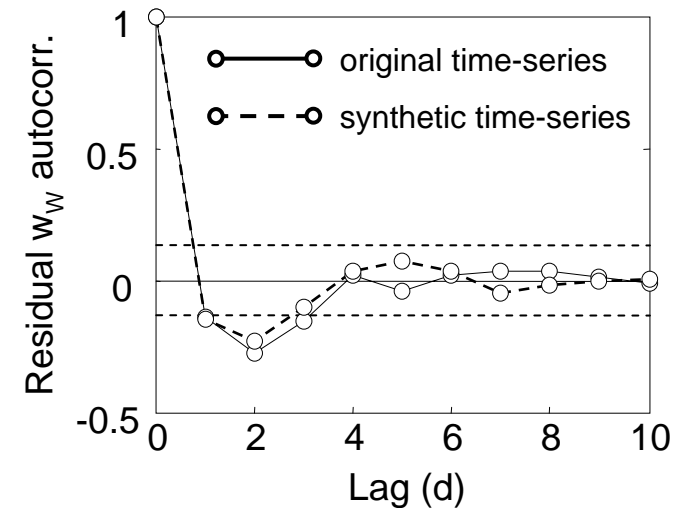
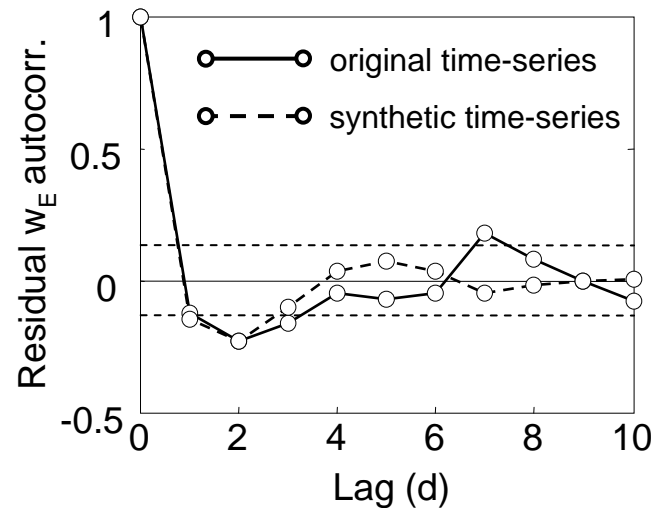
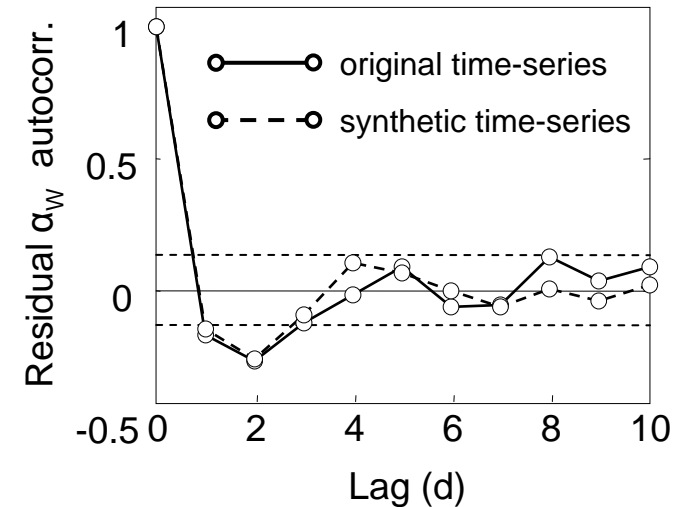
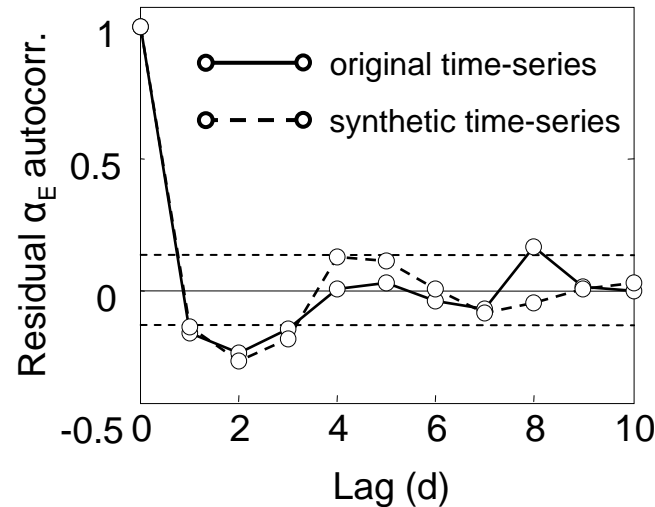
Gaussianità
=
Forzante

Modello
stocastico

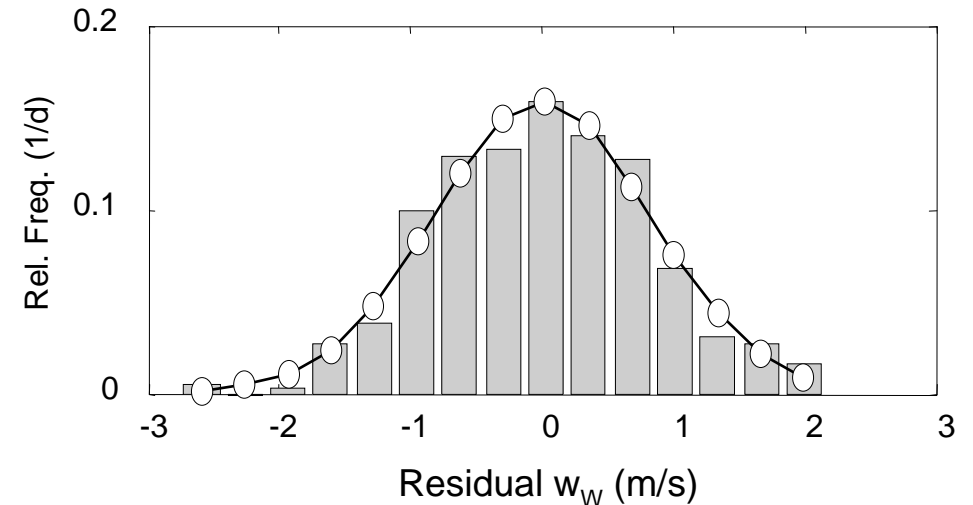
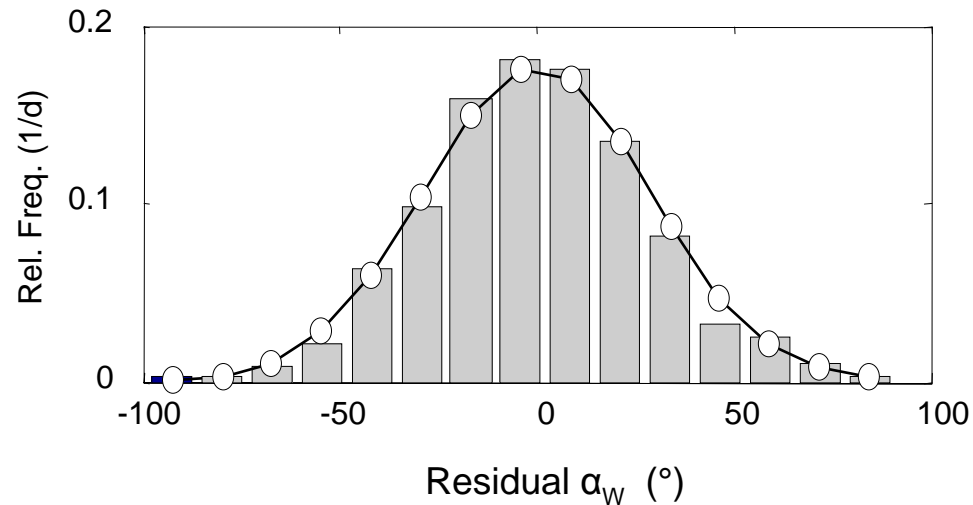
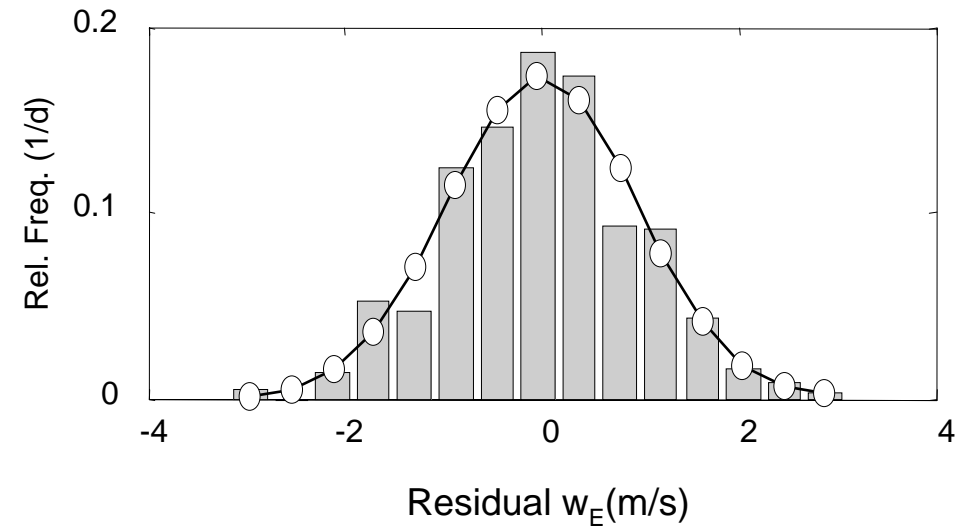
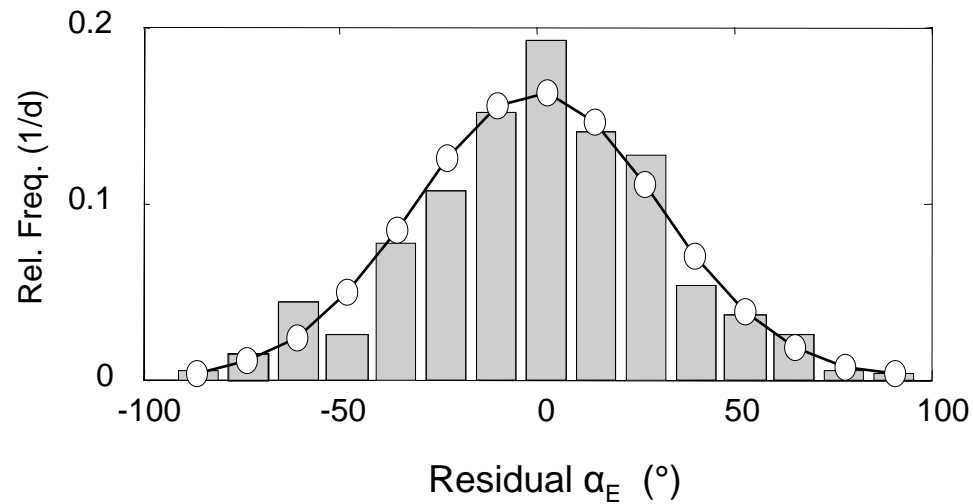
Autocorrelazione della parte stocastica

Le serie sintetiche devono avere caratteristiche di autocorrelazione simili a quelle delle serie osservate

In particolare l'ordine del modello stocastico è dato dai residui non nulli (Lag=3)



Gaussianità dei residui



Sintesi dei modelli di vento

☞ Sulla base delle statistiche delle serie sperimentali si sono ipotizzati i seguenti modelli di vento (modelli stocastici Auto Regressivi)

$$\text{Angle East} \quad \tilde{\alpha}_E(i) = -0.31863 \cdot \tilde{\alpha}_E(i-1) - 0.37667 \cdot \tilde{\alpha}_E(i-2) - 0.27547 \cdot \tilde{\alpha}_E(i-3) + \sigma_E^\alpha \cdot e_E(i)$$

$$\text{Angle West} \quad \tilde{\alpha}_W(i) = -0.29189 \cdot \tilde{\alpha}_W(i-1) - 0.33872 \cdot \tilde{\alpha}_W(i-2) - 0.27405 \cdot \tilde{\alpha}_W(i-3) + \sigma_W^\alpha \cdot e_W(i)$$

$$\text{Speed East} \quad \tilde{w}_E(i) = -0.28069 \cdot \tilde{w}_E(i-1) - 0.36070 \cdot \tilde{w}_E(i-2) - 0.28083 \cdot \tilde{w}_E(i-3) \\ + (1-\nu)\sigma_W^w \cdot e_W(i) + \nu \cdot \sigma_E^w \cdot e_E(i)$$

$$\text{Speed West} \quad \tilde{w}_W(i) = -0.22924 \cdot \tilde{w}_W(i-1) - 0.29776 \cdot \tilde{w}_W(i-2) - 0.25496 \cdot \tilde{w}_W(i-3) \\ + (1-\nu)\sigma_W^w \cdot e_W(i) + \nu \cdot \sigma_E^w \cdot e_E(i)$$

$i = 1, \dots, 365$

☞ Le serie di velocità e di angolo sono pilotate da due sorgenti gaussiane incorrelate $e_E(i)$ e $e_W(i)$ con *s.d.* $(\sigma_W^\alpha, \sigma_E^\alpha, \sigma_W^w, \sigma_E^w)$

☞ Ma così si perde la correlazione fra i due bacini.....

Sintesi della forzante comune

- ☞ Per riprodurre la correlazione giornaliera osservata fra i due bacini, è stata costruita una forzante comune con la stessa correlazione $\nu = 0.732$.
- ☞ Le serie sintetiche sono state ottenute sommando alla parte deterministica (*trend data*) la parte stocastica (slide precedente), ottenendo

		<i>parte deterministica dallo smoothing</i>	<i>parte stocastica</i>
<i>Angle East</i>	$\alpha_E(i) =$	$\alpha_E^S(i)$	$+ \tilde{\alpha}_E(i)$
<i>Angle West</i>	$\alpha_W(i) =$	$\alpha_W^S(i)$	$+ \tilde{\alpha}_W(i)$
<i>Speed East</i>	$w_E(i) =$	$w_E^S(i)$	$+ \tilde{w}_E(i)$
<i>Speed West</i>	$w_W(i) =$	$w_W^S(i)$	$+ \tilde{w}_W(i)$

Esempio di serie sintetica

