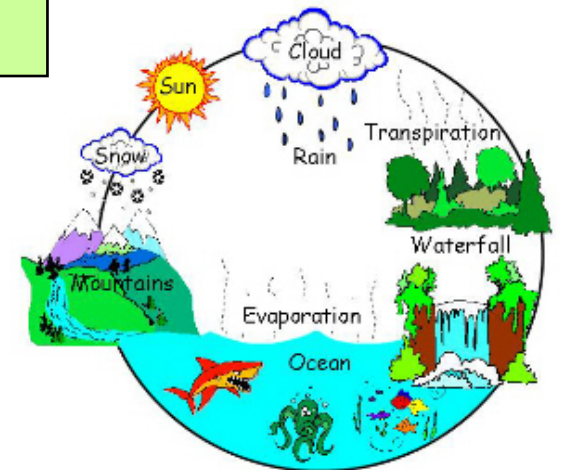
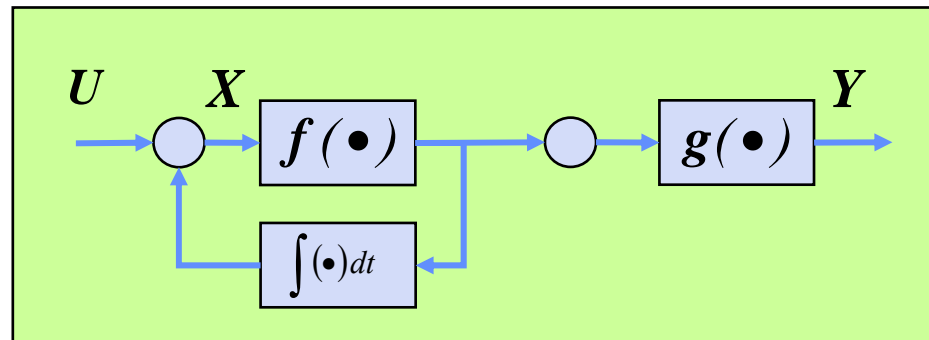


Introduzione all'Analisi dei Sistemi Ambientali



Definizione di Sistema Dinamico

Sistema

- ⇒ Insieme complesso e articolato di elementi interagenti capace di produrre un comportamento che dipende dalle sollecitazioni esterne e dallo stato passato del sistema

Sistema Dinamico

- ⇒ Il comportamento ha un'evoluzione temporale complessa che è determinata dalla struttura interna del sistema, oltre che dagli stimoli esterni

Conseguenze della natura Dinamica del sistema

- ⇒ L'effetto degli stimoli esterni sul sistema è visibile solo dopo un certo tempo
- ⇒ L'effetto degli stimoli esterni sul sistema produce una risposta diversa da quella che ci si potrebbe aspettare (comportamento contro-intuitivo)

I sistemi ambientali hanno tutti le seguenti proprietà

- ⇒ Sono *Dinamici*
- ⇒ Sono *Complessi*
- ⇒ Hanno spesso un comportamento *contro-intuitivo*

Classificazione dei Sistemi Dinamici

Caratterizzazione nel tempo

Tempo-continui

La variabile tempo
è continua

Tempo-discreti

L'evoluzione avviene
ad istanti distinti nel tempo

A eventi discreti

L'evoluzione non dipende
dal tempo
ma dal verificarsi di
determinate condizioni
(eventi)

Struttura

Lineare

Il modello è costituito
da
equazioni lineari

Nonlineare

Il modello è costituito
da
equazioni nonlineari

Parametrizzazione

A parametri concentrati

Localizzati nello spazio
(modello nel tempo)

A parametri distribuiti

Distribuiti nello spazio
(modello spazio-temporale)

Impostazione

Meccanicistici

La loro struttura interna
è descritta da principi già
noti (Fisica, Chimica, etc.)

Data-driven

La loro struttura è
determinata dai dati
usati per definire
il modello

Sono modelli
computazionalmente
molto
“intensi”

Sistema = Modello

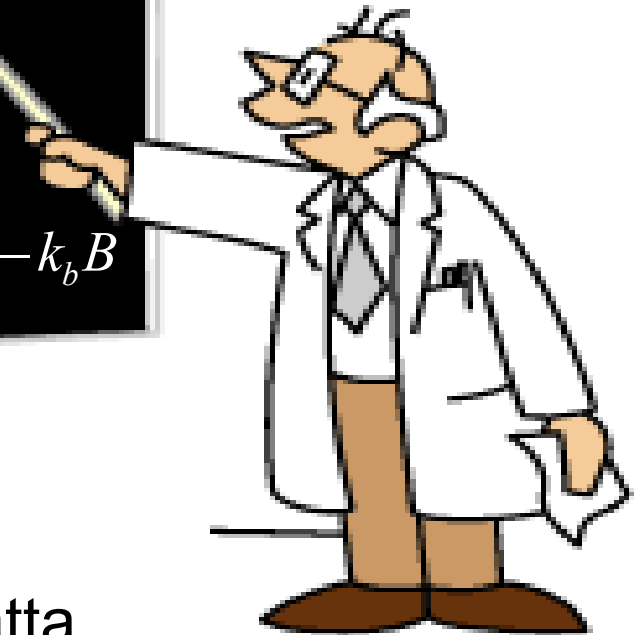
Sistema



Modello



$$\frac{dB}{dt} = -k_b B$$
$$\frac{dC}{dt} = k_c (C_{sat} - C) - k_b B$$

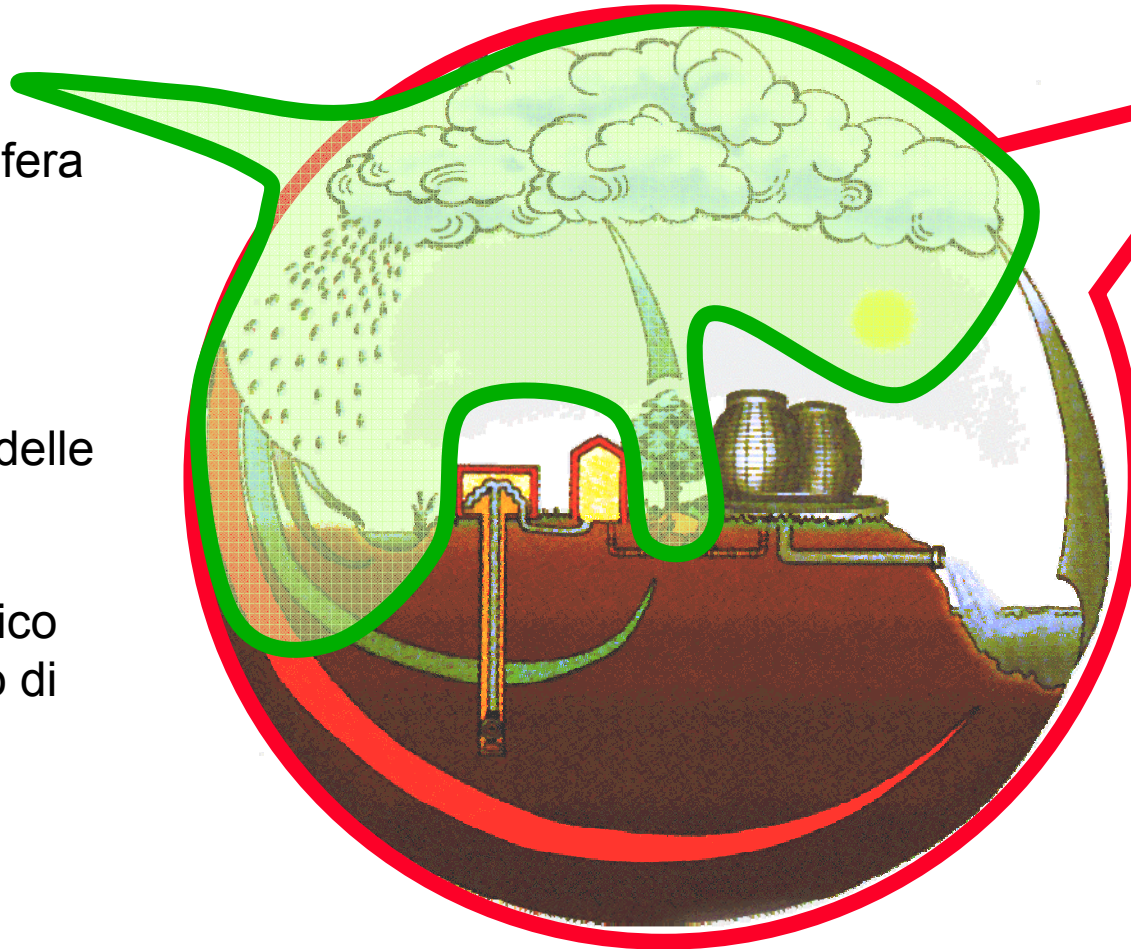


Il modello è una rappresentazione astratta della realtà che ci permette di capire il suo funzionamento

Sistema Ambientale o Ecosistema?

Ecosistema:

Porzione di biosfera ospitante una comunità e l'ambiente fisico circostante. Fra questi esistono delle interazioni reciproche in equilibrio dinamico basate su flusso di energia e circolazione di materia



Sistema Ambientale:

Insieme di interazioni fra sistemi naturali ed attività umane con l'obiettivo della tutela dei cinque comparti fondamentali: atmosfera, acqua, suolo, sedimento, biota.

Come rappresentare un Sistema Ambientale

- ☞ L'**Ecosistema** è soggetto ai forzanti esterni

$$\frac{dx}{dt} = g(x, u)$$

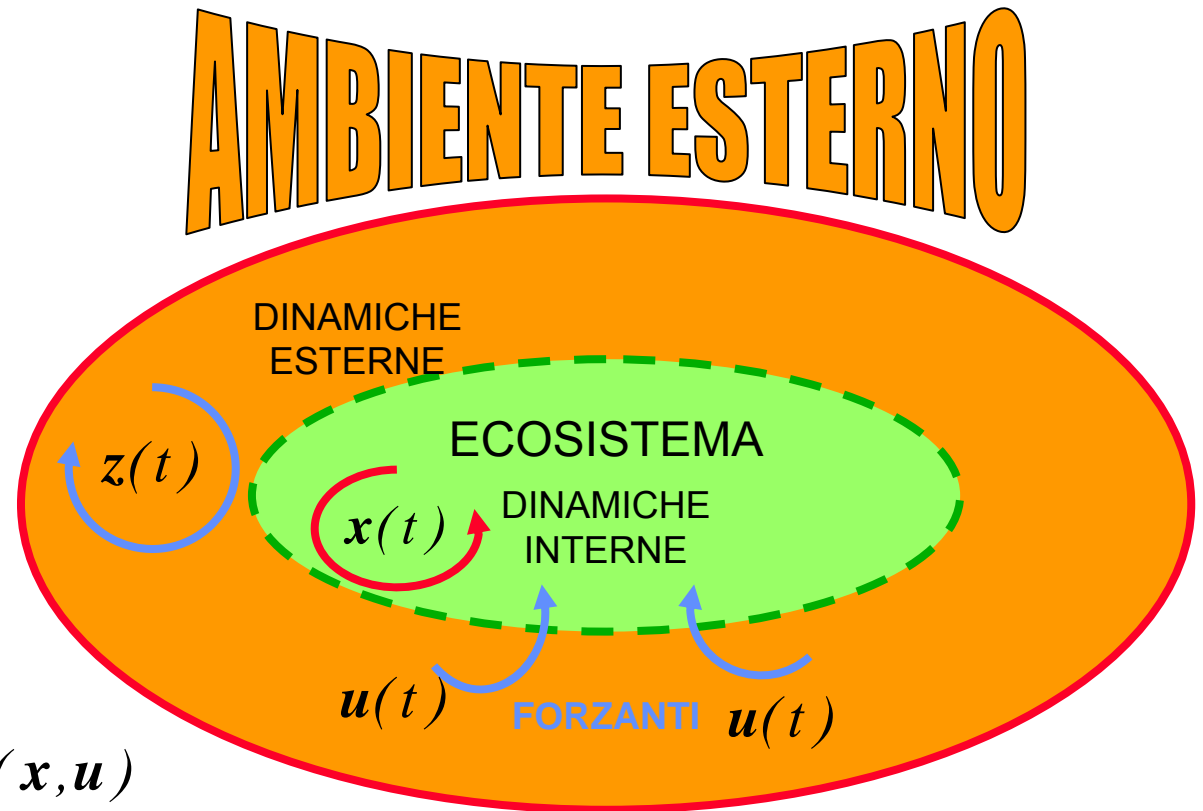
- ☞ Chiedersi **cosa** e **come** genera i forzanti u

$$\frac{dz}{dt} = h(z)$$

$$u = f(z)$$

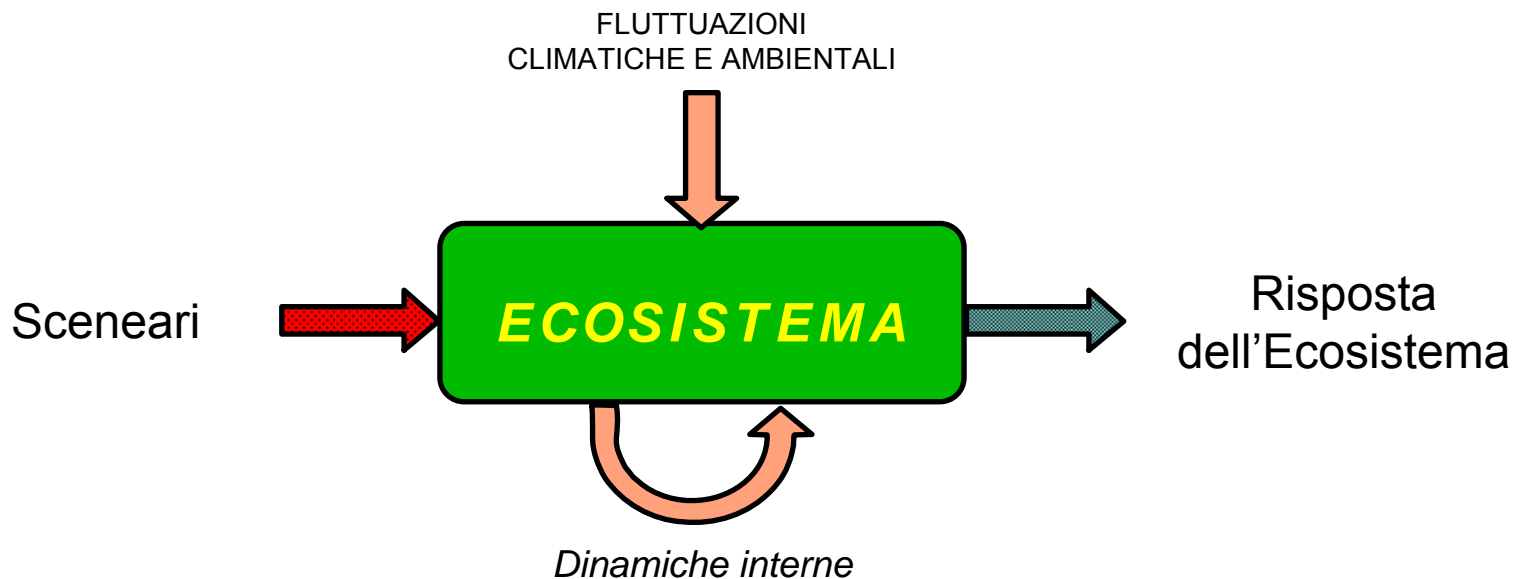
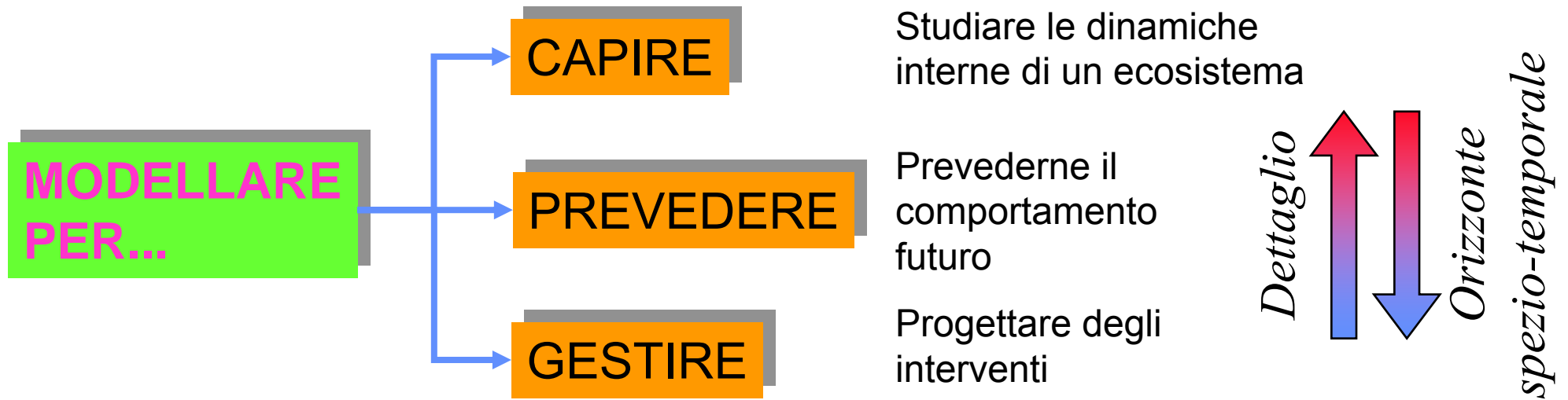
- ☞ Schematizzare **l'Ambiente Esterno** come generatore di forzanti, insieme all'**Ecosistema**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = g(x, u) \\ \frac{dz}{dt} = h(z) \\ u = f(z) \end{array} \right.$$

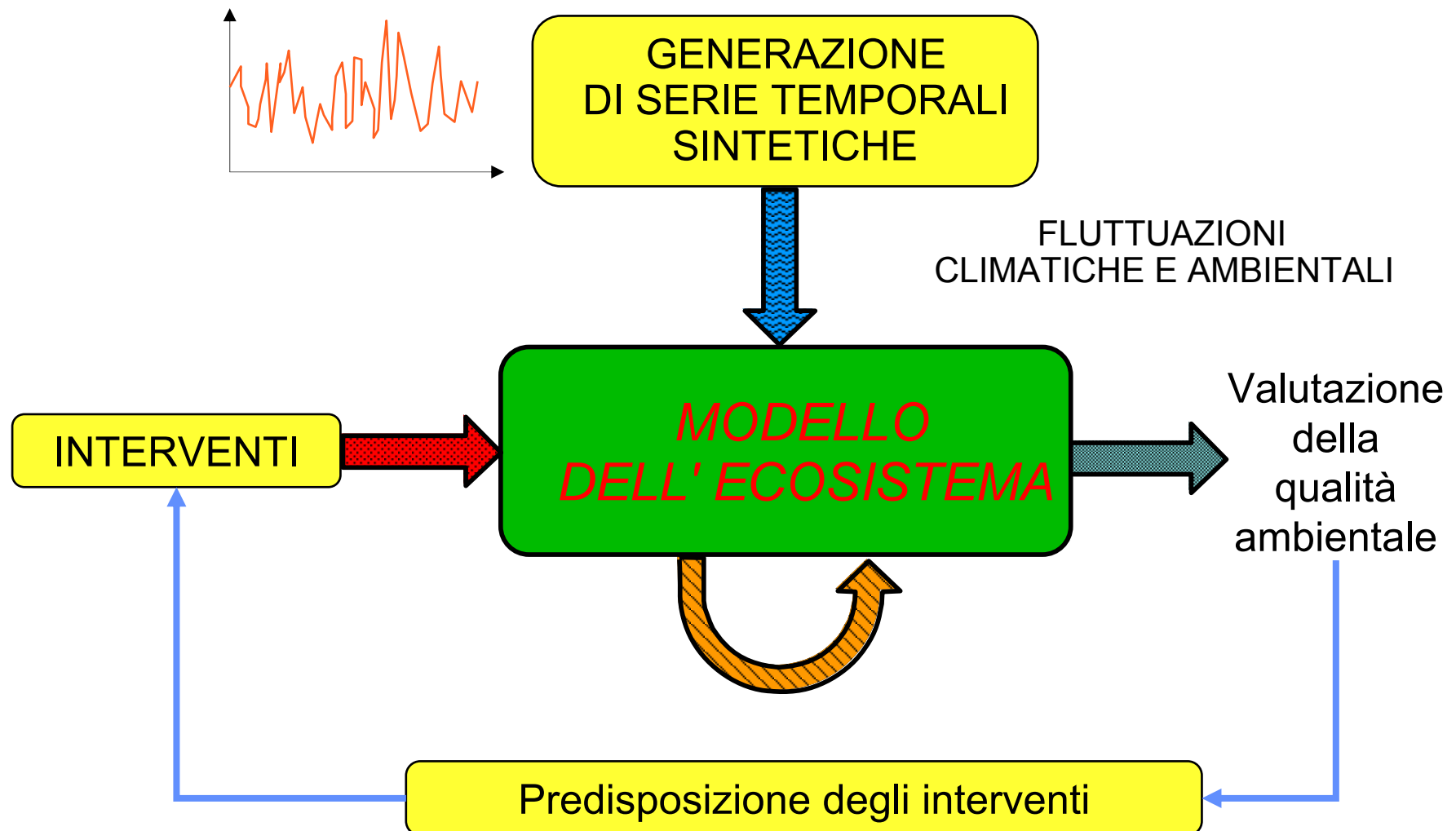


Nota: il confine fra Ecosistema ed Ambiente esterno non è sempre facilmente definibile

Usi di un Sistema Ambientale



Controllo di un Sistema Ambientale



Sistemi ambientali come bilanci

- Esprimono la conservazione della massa entro un particolare ecosistema (*sistema aperto*)



- Bilancio statico:*

- ⇒ Pareggio fra masse entranti e uscenti (totale e per componenti) su un lungo periodo, tenendo conto delle trasformazioni interne

- Bilancio dinamico:*

- ⇒ Pareggio fra i *ratei* di massa entrante ed uscente (totale e per componenti), tenendo conto delle trasformazioni interne

Bilanci fondamentali di un ecosistema

Bilancio Statico

Bilancio di massa

- ⇒ Il modello deve garantire la *conservazione* della massa

Bilancio di energia

- ⇒ Il modello deve tener conto delle *trasformazioni* di energia

Orizzonte lungo

Bilancio Dinamico

Variazioni nel tempo

- ⇒ Il modello descrive la *variazione* nel tempo delle variabili di stato, senza riferimento allo spazio

Variazioni spazio-temporali

- ⇒ Le *variazione* nel tempo e nello spazio sono collegate fra di loro

Orizzonte corto

Bilanci statici o dinamici?

☞ Non c'è contraddizione fra i due

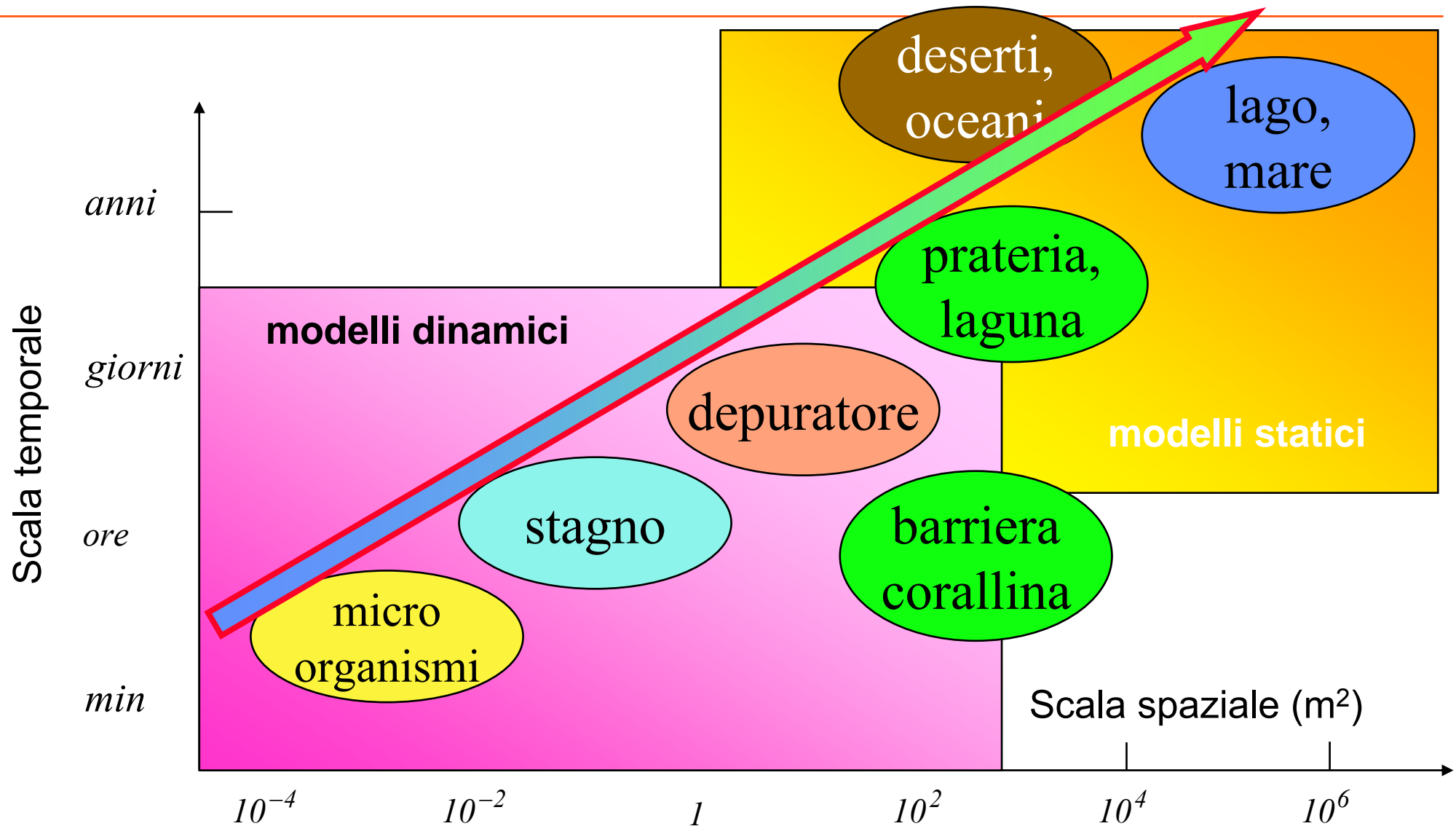
⇒ Bilanci statici

- ✎ Orizzonte lungo
- ✎ Minore dettaglio
- ✎ Maggiore scala Spazio-Tempo
- ✎ Minore informazione richiesta, perché aggregata
- ✎ **Utili quando il sistema è quasi a regime o ha dinamica molto lenta**

⇒ Bilanci dinamici

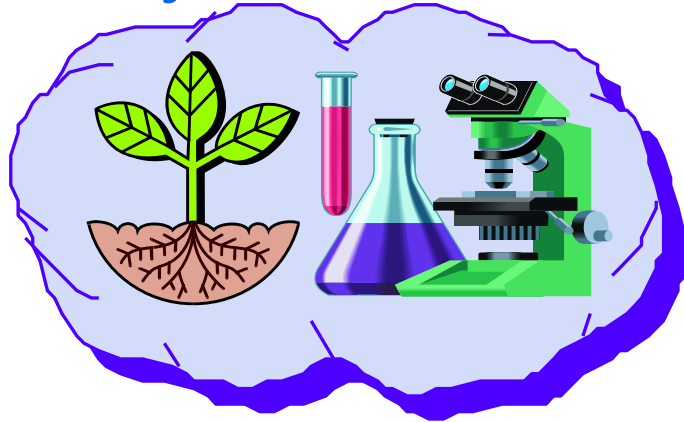
- ✎ Orizzonte corto
- ✎ Maggiore dettaglio
- ✎ Minore scala Spazio-Tempo
- ✎ Maggiore informazione richiesta, perché disaggregata
- ✎ **Necessari quando il sistema è soggetto a forti variazioni e ha dinamica veloce**

Scala spazio/tempo dei sistemi ambientali



Dati contro Teoria

Theory-driven Models

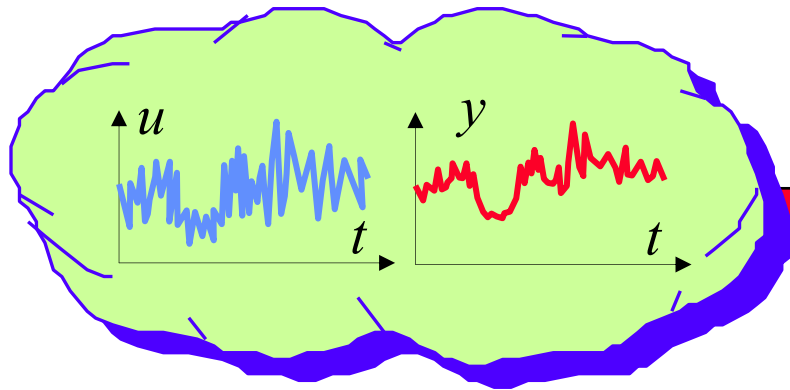


Le equazioni del modello sono determinate in base alla conoscenza di leggi naturali

MODELLI
DETERMINISTICI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

Data-driven Models



Le equazioni del modello hanno una struttura predeterminata con dei parametri per l'adattamento ai dati

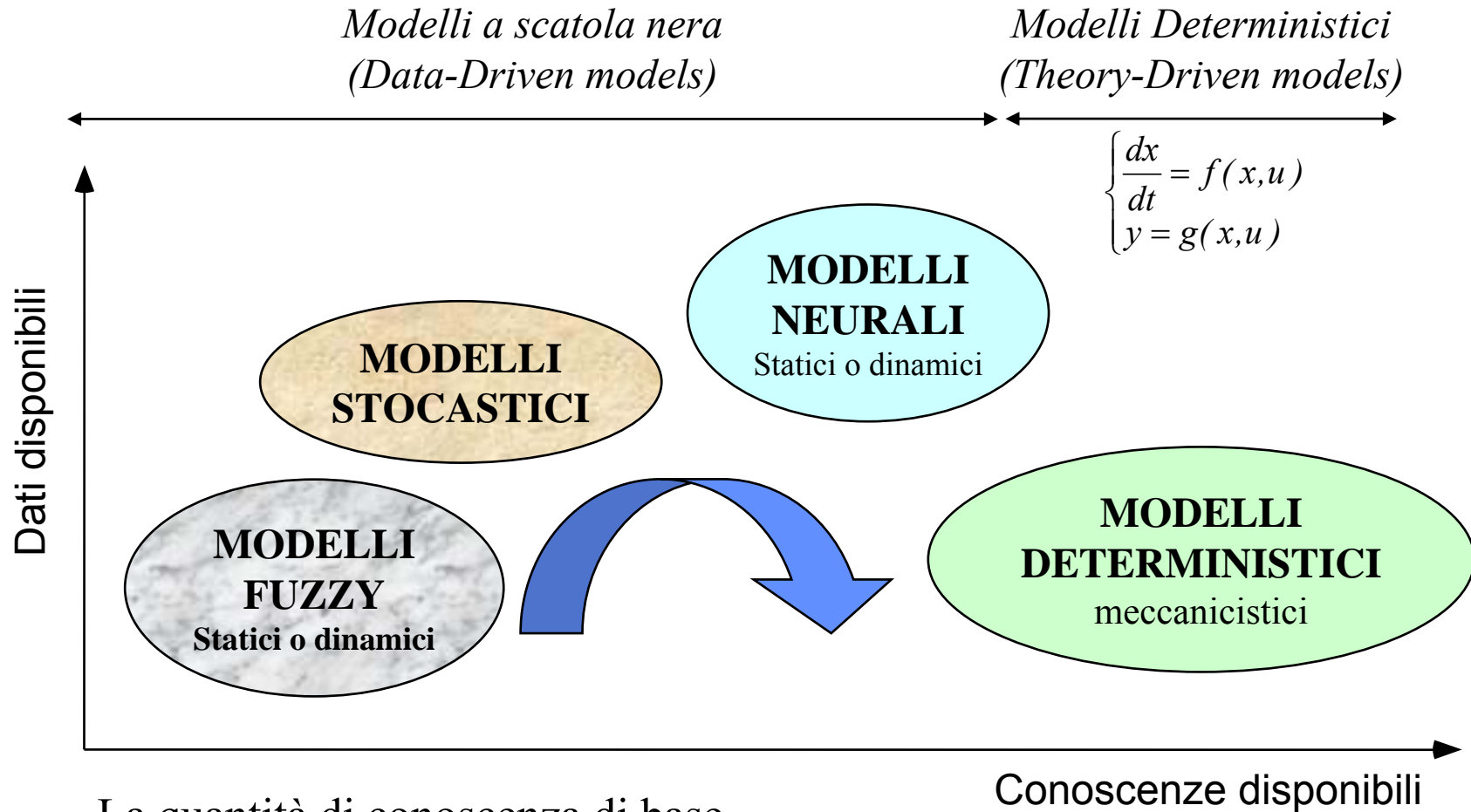
MODELLI
A SCATOLA NERA

MODELLI
STOCASTICI

MODELLI
FUZZY

RETI
NEURALI

Tipi di Modelli Numerici



La quantità di conoscenza di base necessaria per costruire un modello deterministico riduce la necessità dei dati

Modelli Fuzzy

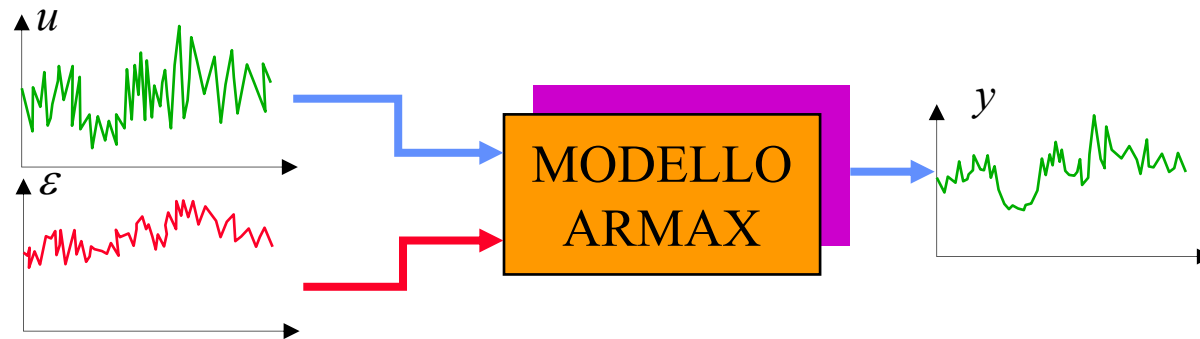
- ☞ Permettono il trattamento di concetti definiti in forma “discorsiva” (Es. Alto, Basso, Molto, Poco...)
- ☞ Sono basati su “ragionamenti” logico-deduttivi basati su categorie “sfumate”
- ☞ Sono formati da una serie di “regole” del tipo

$$\text{IF } \underbrace{\langle \text{accade questo} \rangle}_{\text{antecedente}} \text{ THEN } \underbrace{\langle \text{è vero questo} \rangle}_{\text{conseguente}}$$

- ☞ Ciascuna proposizione non è o VERA o FALSA, ma il suo grado di verità $\mu(x)$ può variare con continuità da 0 (falsa) a 1 (vera)
- ☞ Per sviluppare i ragionamenti fuzzy ci si serve di un'algebra fuzzy per “incrociare” i vari gradi di verità $\mu(x)$
- ☞ Il risultato è un oggetto fuzzy che deve essere “defuzzificato” per essere comprensibile nel mondo deterministico

Modello Stocastico

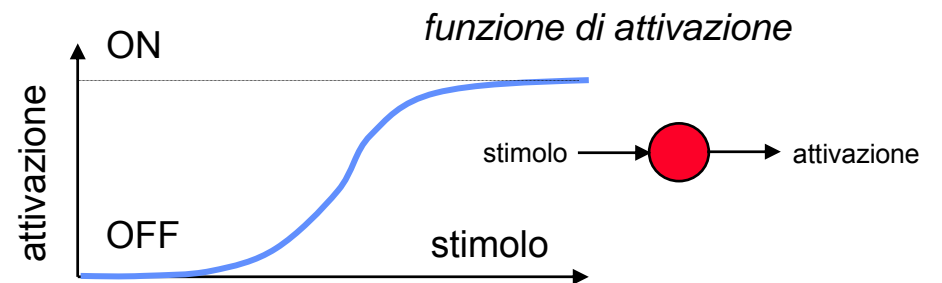
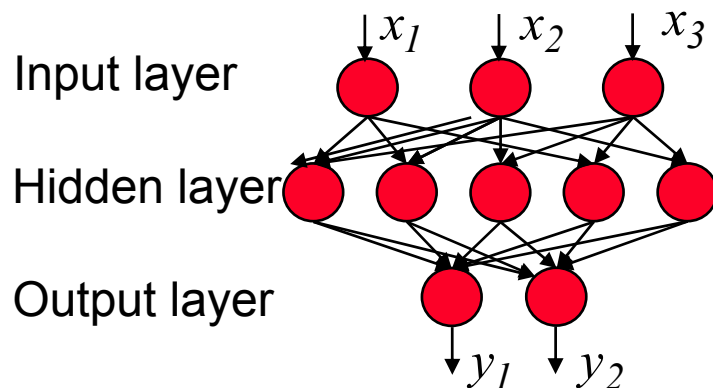
- ☞ Riproduce l'andamento temporale dei dati senza fornire informazioni sulla struttura interna del sistema
- ☞ Il suo uso deve essere preceduto da un'analisi strutturale in grado di stabilire corrispondenze ingresso/uscita di tipo causale.
- ☞ Per la sua taratura ha normalmente bisogno di una grande quantità di dati anche se la sua struttura è molto semplice.
- ☞ E' vantaggioso quando si desidera ottenere un strumento operativo che riproduca al meglio l'andamento osservato dell'uscita.



$$y_t = \underbrace{a_1 y_{t-1} + \dots + a_n y_{t-n}}_{\text{Parte Auto-Regressiva (AR)}} + \underbrace{b_1 u_{t-1} + \dots + b_m u_{t-m}}_{\text{Ingresso Esogeno (X) deterministico}} + \underbrace{\varepsilon_t + c_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + c_n \varepsilon_{t-n}}_{\text{Parte a Media Mobile (MA) (rumore colorato)}}$$

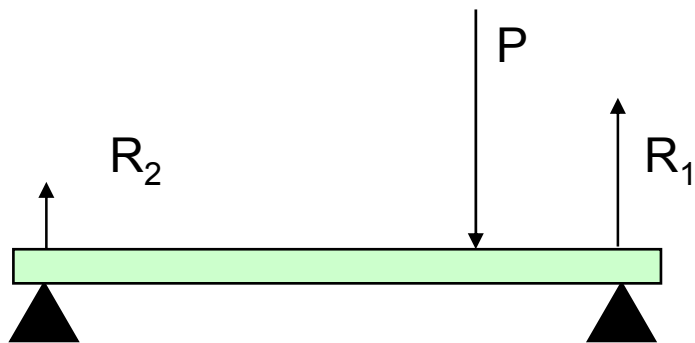
Reti Neurali

- ☞ Strutture di calcolo capaci di “apprendere” dei comportamenti sulla base di esempi (allenamento)
- ☞ Il funzionamento è basato sull’attivazione di ciascun neurone rispetto ad uno stimolo, secondo una “funzione di attivazione”
- ☞ La tipica struttura delle Reti Neurali (Neural Networks) è a tre strati (layers)
 - ⇒ **Input layer** dal quale entrano le variabili di ingresso
 - ⇒ **Hidden layer** (Strato nascosto) contenente i neuroni che aggregano le percezioni
 - ⇒ **Output layer** dal quale si ricavano le variabili di uscita



- ☞ E' necessario disporre di un algoritmo di ottimizzazione per l'allenamento della rete, generalmente del tipo back-propagation.

Sistemi statici e dinamici



Sistema statico

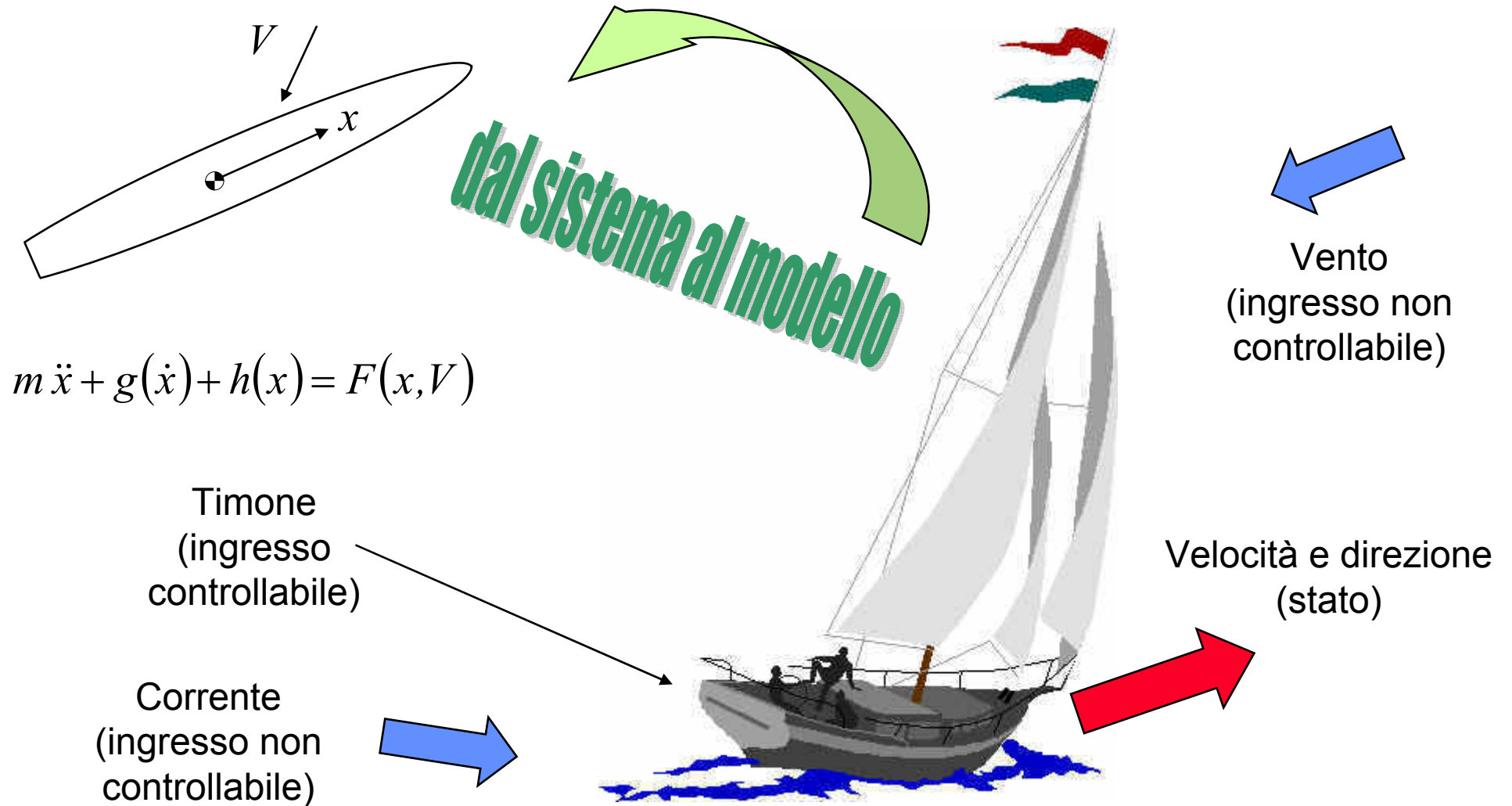
- Il sistema si porta immediatamente nella condizione di equilibrio imposta dagli ingressi esterni
- Il sistema non ha storia né memoria
- Il comportamento del sistema non varia nel tempo***



Sistema dinamico

- Il sistema segue un'evoluzione nel tempo che è funzione degli ingressi esterni e ***del suo stato passato***
- Il sistema ha memoria del suo stato passato***
- Il comportamento del sistema varia nel tempo***

Sistema dinamico



Sistema dinamico

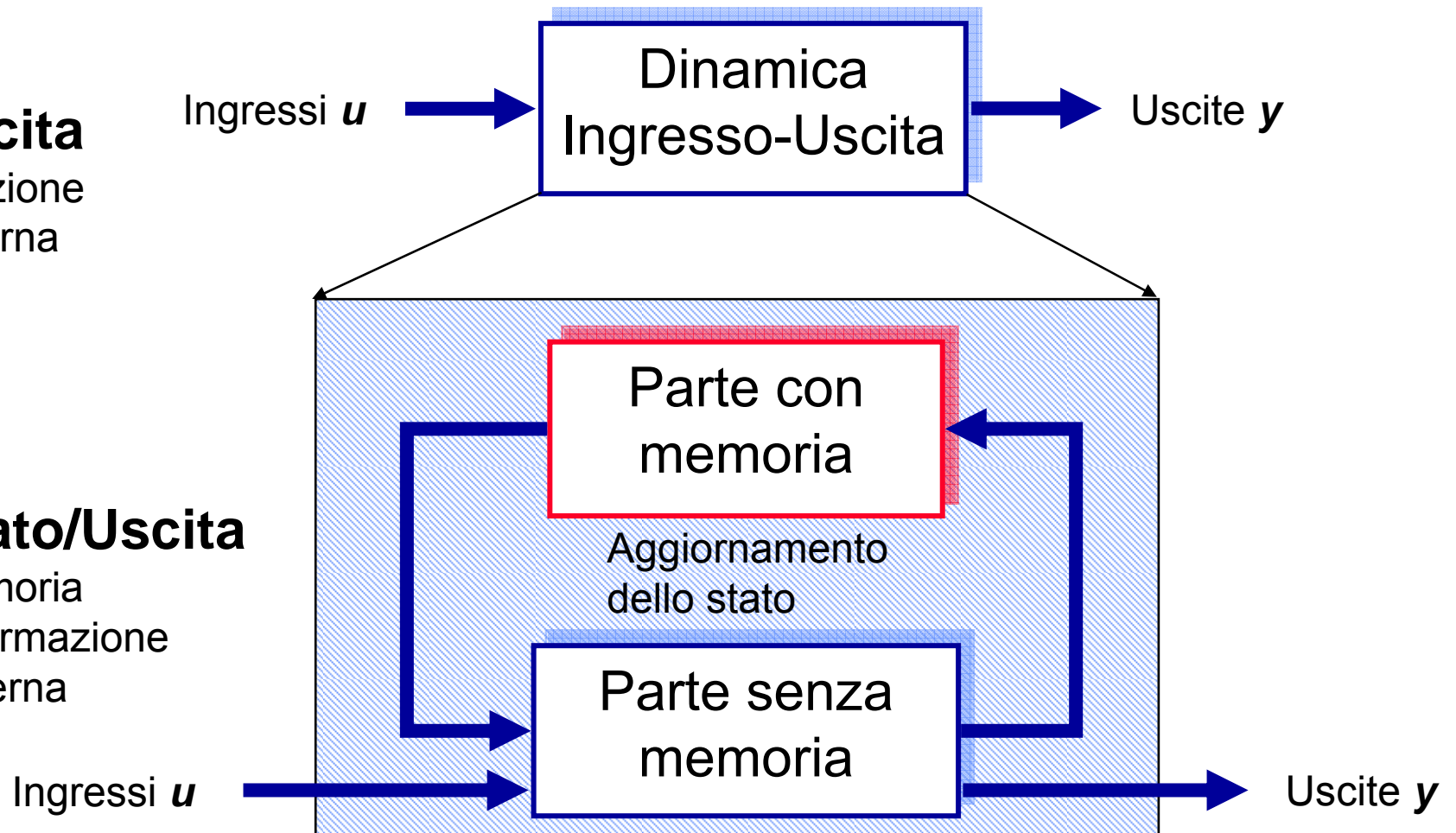
Proprio perché ha una sua dinamica, il sistema dinamico non fa sempre ciò che volete voi....



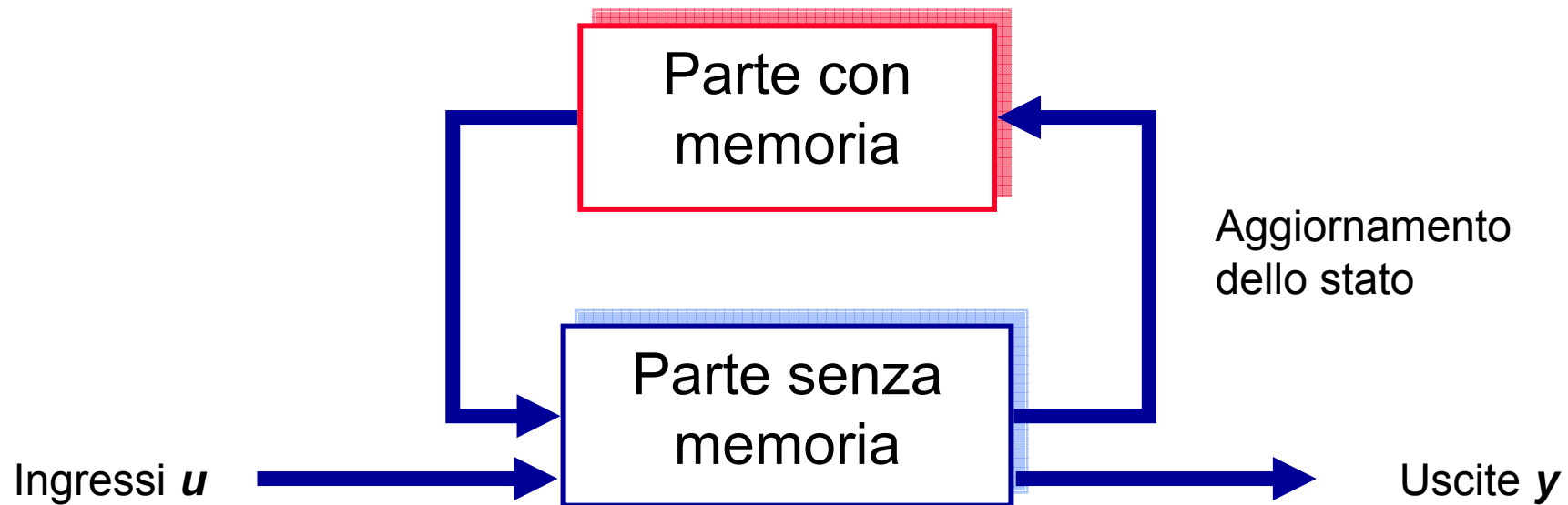
Rappresentazione esterna ed interna

Esterna =
Ingresso/Uscita
Nessuna informazione
sulla struttura interna

Interna =
Ingresso/Stato/Uscita
La parte con memoria
rappresenta l'informazione
sulla struttura interna

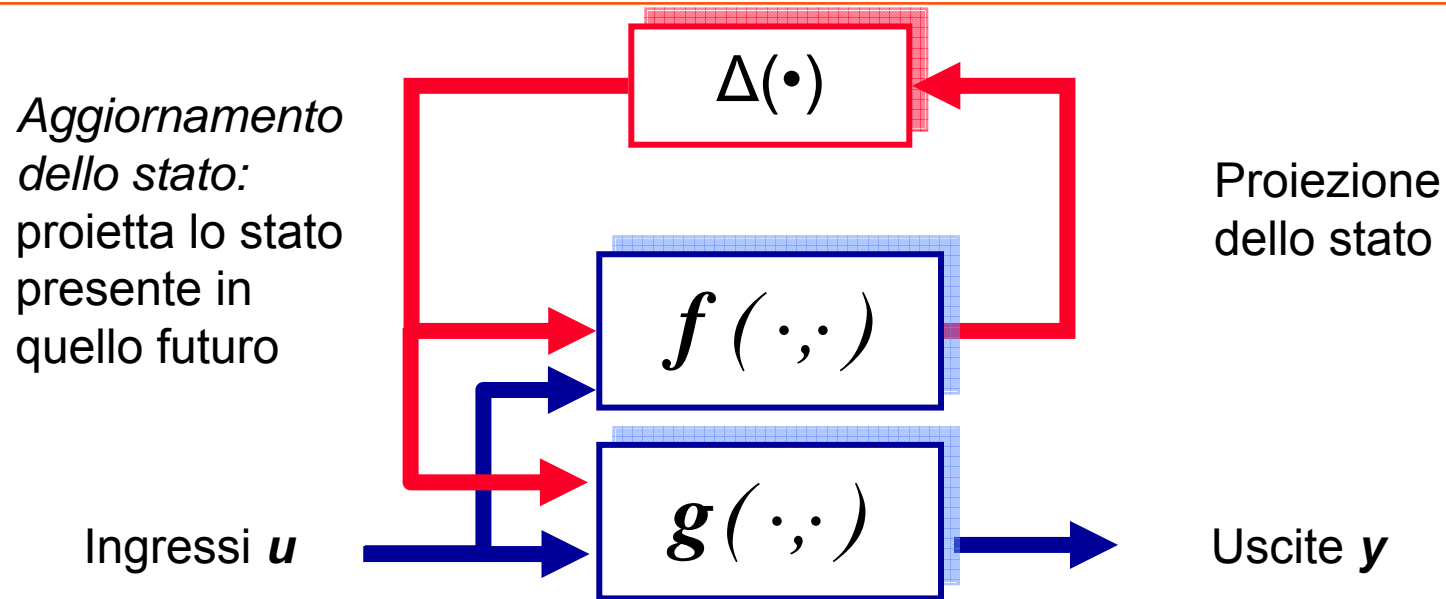


Struttura interna di un sistema dinamico



- ☞ L'*ingresso* u agisce sulla parte senza memoria
- ☞ L'*uscita* y è generata dalla parte senza memoria
- ☞ Lo *stato* x rappresenta la memoria del sistema
 - Tutta la storia passata del sistema è contenuta nello stato al tempo presente
 - Il contributo degli ingressi passati è già incluso in $x(t)$

Meccanismi di aggiornamento dello stato



Parte con memoria: $x(t) \xrightarrow{f(\cdot, \cdot)} \left\{ \begin{array}{l} x(t + \Delta) \\ \frac{dx}{dt} \end{array} \right\}$

Parte senza memoria: $m(t) = f(x(t), u(t))$
 $y(t) = g(x(t), u(t))$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t + \Delta) \\ \frac{dx}{dt} \end{array} \right\} = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Sistemi tempo-continui o tempo discreti?

☞ Differiscono nel meccanismo di aggiornamento dello stato

☞ *Sistema tempo-discreto:*

⇒ Il tempo varia in modo unidirezionale ed è vincolato a valori discreti, intervallati di Δ : $t, t+\Delta, t+2\Delta, \dots$

⇒ L'aggiornamento dello stato avviene a intervalli discreti

⇒ La funzione di aggiornamento $f(\dots)$ fornisce lo stato al istante successivo

$$\mathbf{x}(t) \xrightarrow{f} \mathbf{x}(t + \Delta)$$

⇒ Fra t e $t+\Delta$ lo stato non è definito

☞ *Sistema tempo-continuo:*

⇒ Il tempo varia in modo continuo e unidirezionale

⇒ L'aggiornamento dello stato avviene in continuo

⇒ La funzione di aggiornamento $f(\dots)$ fornisce la derivata dello stato

$$\mathbf{x}(t) \xrightarrow{f} \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

⇒ Lo stato è definito per ogni valore di $t \in \mathbb{R}^+$

Rappresentazione *locale* di sistemi continui o discreti

 **Sistema tempo-discreto:**

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t + \Delta) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}^+$$

Si dicono rappresentazioni *locali* perché il meccanismo di aggiornamento dello stato è *locale*, in quanto *descrive l'evoluzione dello stato nell'intorno locale dello stato corrente*.

 **Sistema tempo-continuo:**

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+$$

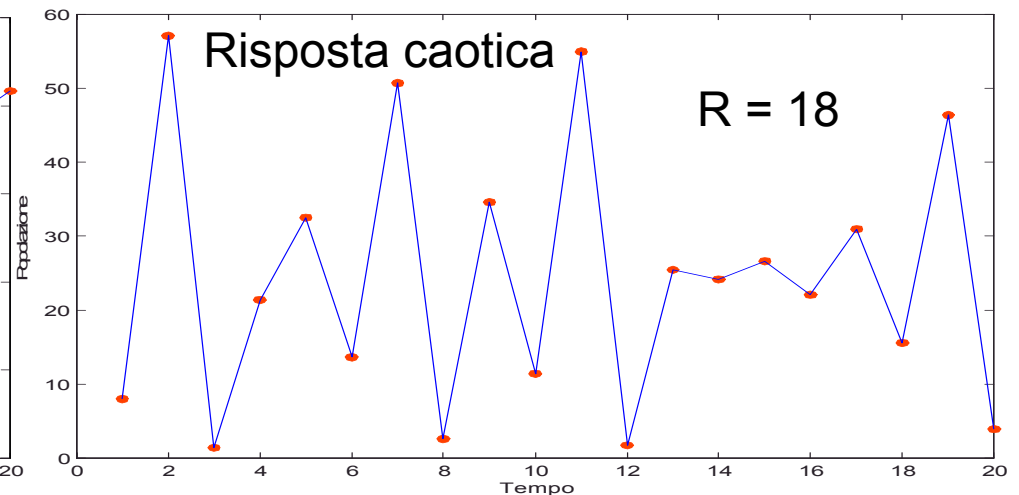
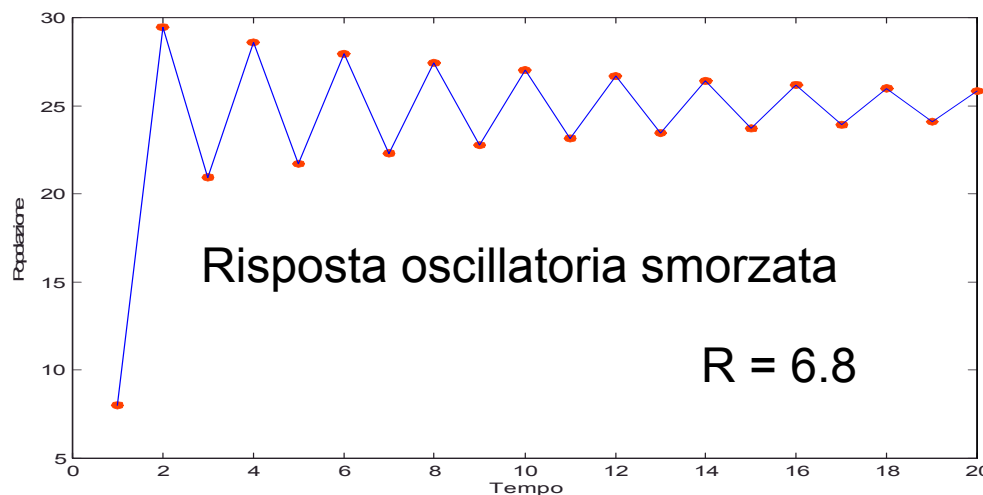
Dal passo t al passo successivo $(t+\Delta)$ o nella direzione corrente (dx/dt)

Esempi di sistema dinamico tempo-discreto

- 👉 Dinamica di crescita di una popolazione (modello di Rickert)

$$x(t + \Delta) = x(t) \times R \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

- 👉 Lo stato futuro viene aggiornato in funzione del precedente in modo **nonlineare** (termine esponenziale)
- 👉 La risposta può essere molto diversa a seconda del valore di R (rateo massimo di crescita)



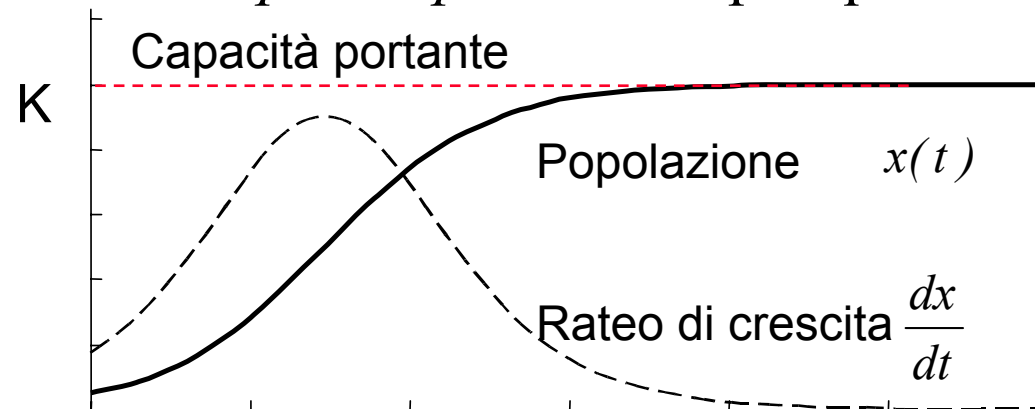
Esempi di sistema dinamico tempo-continuo

👉 Dinamica di crescita logistica di una popolazione

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \text{rateo di crescita} \\ K = \text{capacità portante} \end{array} \right.$$

👉 La funzione di aggiornamento dello stato (a destra dell'= $)$ fornisce la derivata = velocità di variazione dello stato = rateo di crescita della popolazione

👉 La risposta dipenda dal *rateo di crescita* r , ma termina al livello di popolazione pari alla *capacità portante* K per qualsiasi r



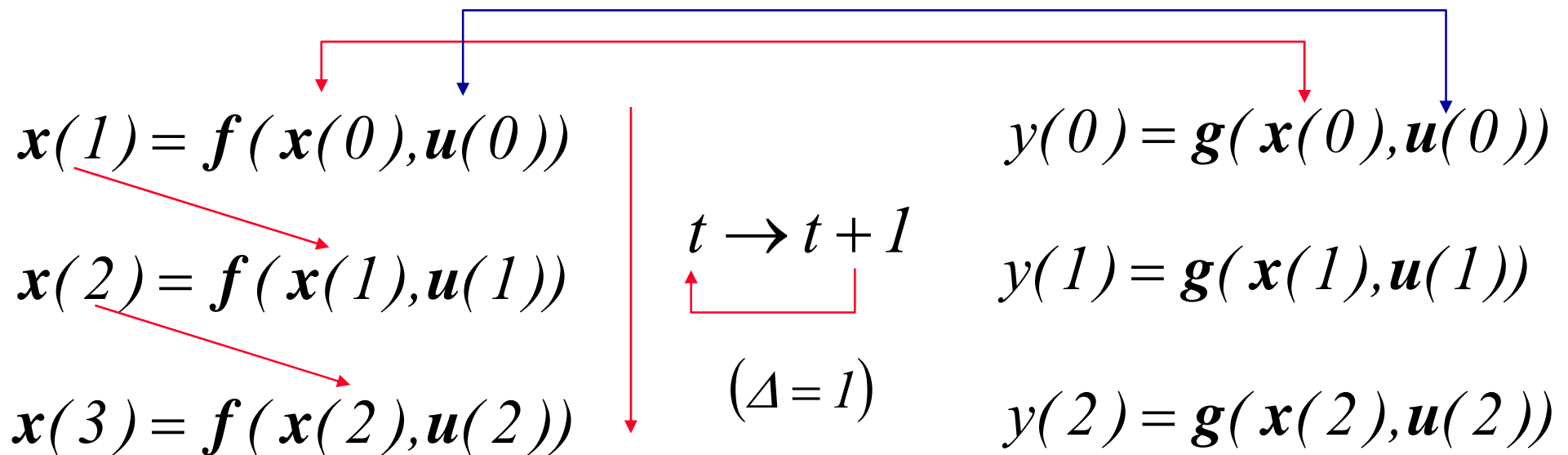
Scopi e limiti dell'Analisi dei Sistemi

- ☞ L'Analisi dei Sistemi fornisce strumenti per prevedere il comportamento di un sistema, nota la sua struttura e le influenze esterne (ingressi e/o disturbi)
- ☞ L'AdS si basa su un *modello*, che è una rappresentazione astratta e quantitativa del sistema reale (modello matematico)
- ☞ L'AdS fa previsioni sul comportamento futuro del sistema note (o presunte) le influenze esterne che agiranno su di esso
- ☞ Per fare questa previsione l'AdS si basa più *sull'analisi della struttura* del sistema che non sulla conoscenza diretta della sua evoluzione nel tempo

Evoluzione di un sistema dinamico t-d

☞ Nel caso tempo-discreto si può risolvere l'equazione dinamica in modo iterativo

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t + \Delta) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}^+$$

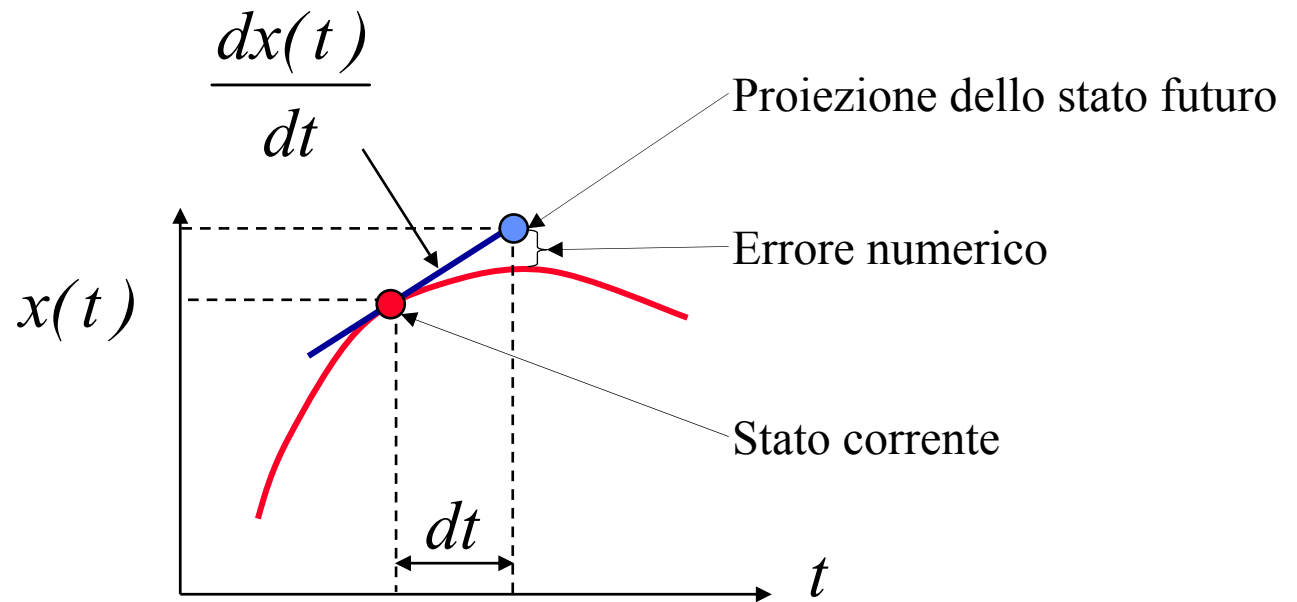


Evoluzione di un sistema dinamico t-c

- ☞ Nel caso tempo-continuo la derivata dello stato indica la direzione di cambiamento del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+$$

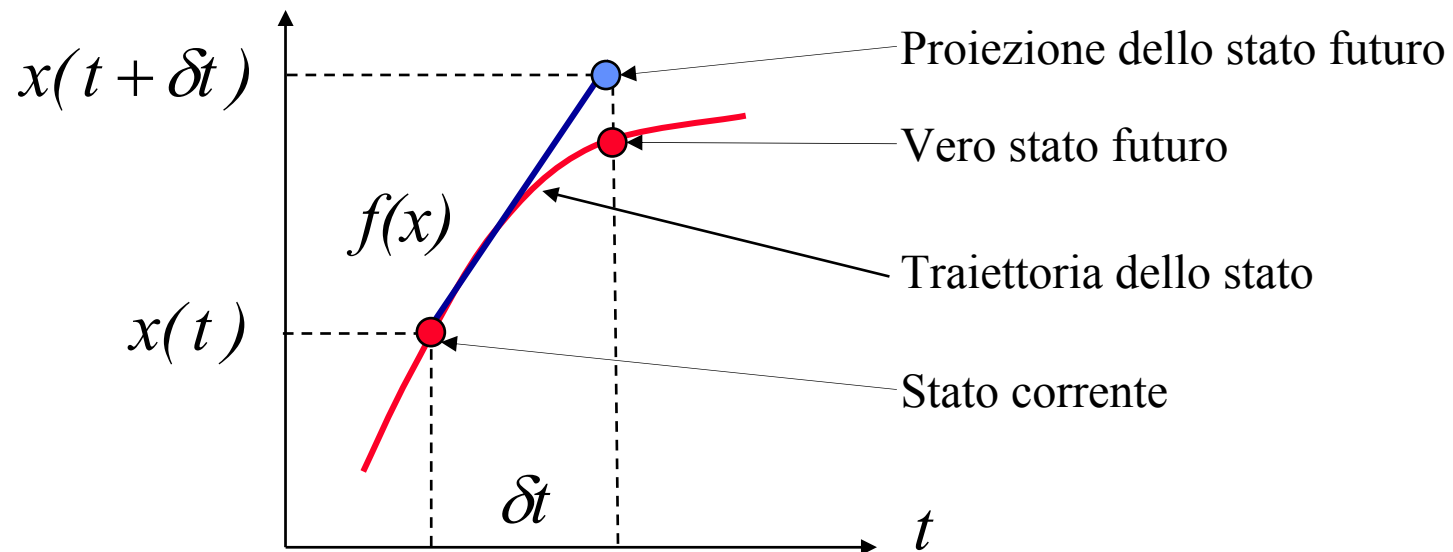
- ☞ La soluzione del sistema consiste nell'integrare l'equazione differenziale
- ☞ Ciò richiede l'uso di **metodi numerici** salvo casi specifici (sistemi lineari)



Metodi numerici di integrazione

- 👉 Proiettano lo stato nel futuro approssimando numericamente la derivata
- 👉 **Metodo di Eulero**: approssimazione (*molto cruda*) della derivata con il rapporto incrementale

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} = f(x) \rightarrow x(t + \delta t) \cong x(t) + f(x) \cdot \delta t$$

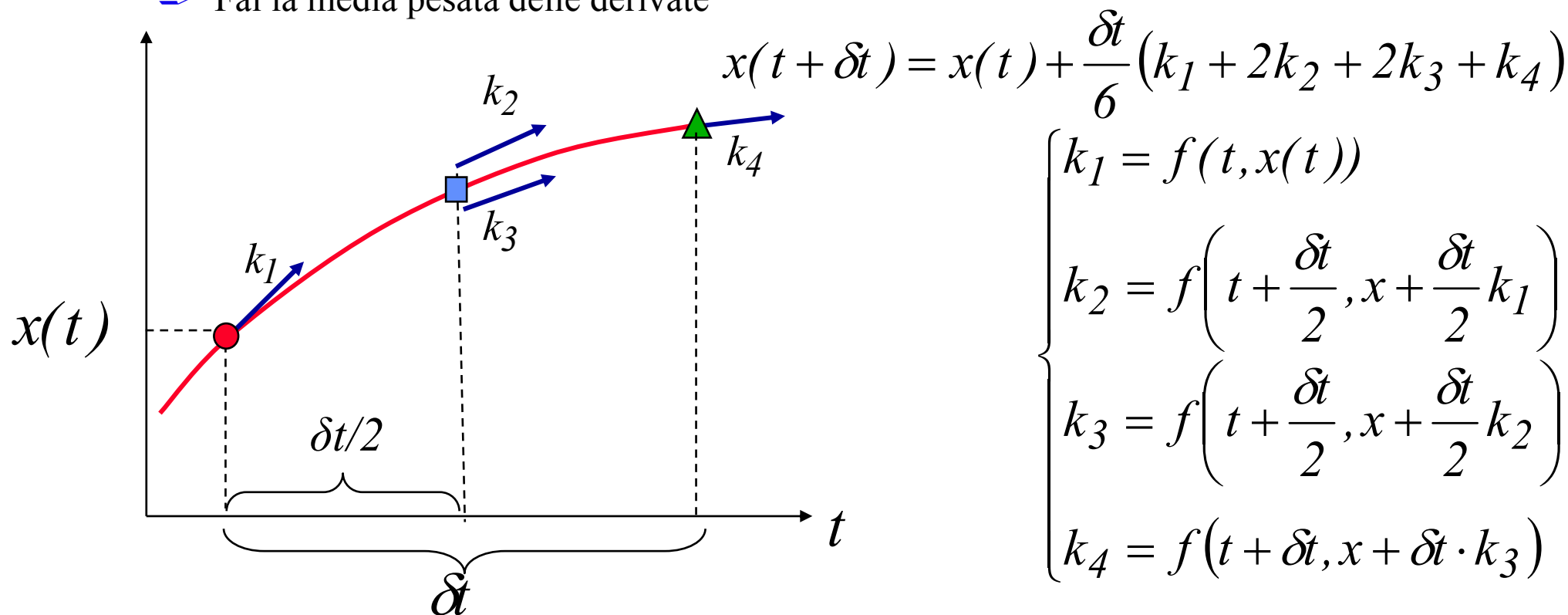


Metodo di Runge-Kutta

Il Metodo di Runge-Kutta migliora la proiezione della derivata in avanti:

- ⇒ Calcola la derivata in t (k_1) e proietta a $\delta t/2$ ■
- ⇒ Usa la nuova derivata k_2 , riparti di nuovo fino a $\delta t/2$ ■
- ⇒ Usa la nuova derivata k_3 , riparti di nuovo fino a $\delta t/2$ ■
- ⇒ Usa la nuova derivata k_4 , riparti di nuovo fino a δt ▲
- ⇒ Fai la media pesata delle derivate

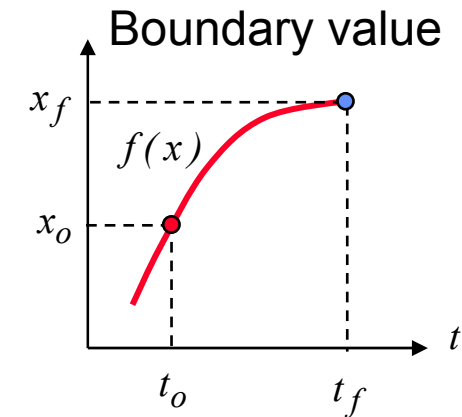
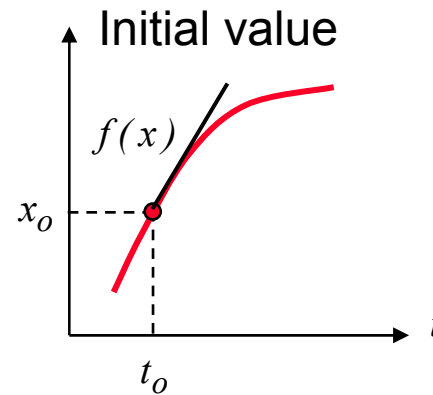
$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$



Limiti del metodo Runge-Kutta

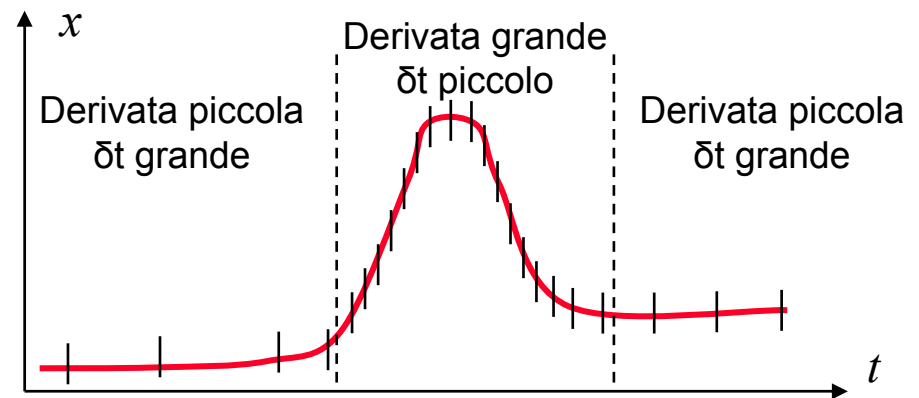
☞ E' un metodo "in avanti"

- ☞ Data la condizione iniziale x_0 al tempo iniziale t_0 procede in avanti fino al tempo finale t_f
- ☞ Perciò è adatto a risolvere problemi di valore iniziale (problema "Initial value")
- ☞ Non può risolvere problemi con condizioni al contorno (problema "boundary value")



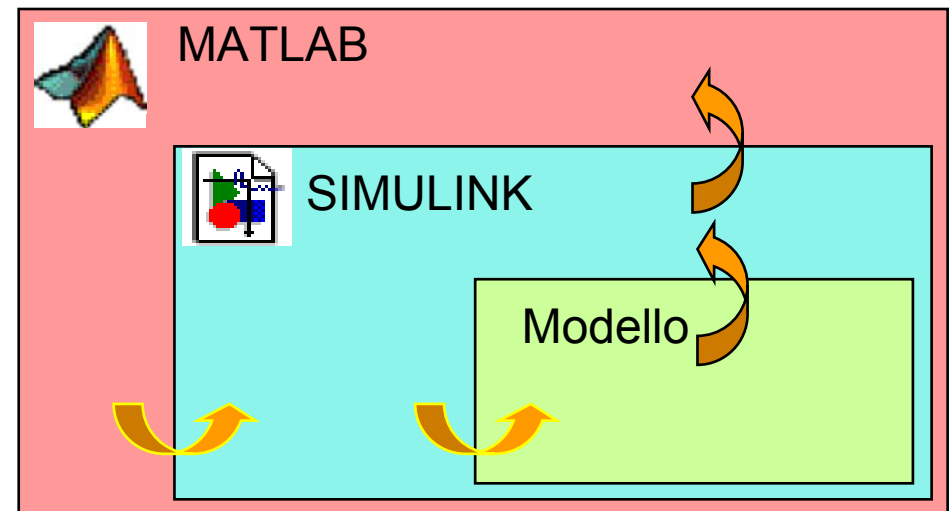
☞ Il passo di integrazione fisso può essere inadatto al problema

- ☞ Variabilità della derivata
→ passo variabile
- ☞ Adattamento a problemi "stiff" (sistema di equazioni con costanti di tempo molto diverse)



Simulazione e metodi numerici

- ☞ L'evoluzione di un sistema viene normalmente ottenuta per simulazione numerica
- ☞ I metodi numerici utilizzati sono versioni molto perfezionate del metodo di Runge-Kutta con
 - ⇒ Adattamento del passo in funzione della difficoltà di integrazione
 - ⇒ Natura “stiff” del sistema (equazioni con dinamiche molto diverse)
 - ⇒ Questi metodi vanno usati “bene” nel senso di scegliere le condizioni più opportune per l'integrazione
- ☞ Uno degli ambienti più versatili per la simulazione di sistemi dinamici è la toolbox Simulink di Matlab
 - ⇒ Si sviluppa il modello in ambiente Simulink e si sfruttano gli algoritmi numerici di Matlab



Bibliografia

-  Athans, M., Dertouzos, M.L., Spann, R.N., Mason, S.J., *Systems, Networks, and Computation: multivariable methods*, McGra-Hill, 1974.
-  Casti, J., *Connectivity, Complexity and Catastrophes in Large Scale Systems*, Wiley IIASA, 1979.
-  Dercole F., Piccardi C. e Rinaldi S., *Fondamenti di automatica*, Città Studi Edizioni, Milano.
-  Ginzburg, L.R. e Golenberg, E.M., *Lectures in Theoretical Population Biology*, Prentice-Hall, 1985.
-  Renshaw, E., *Modelling Biological Populations in Space and Time*, Cambridge Univ. Press, 1991.
-  Rinaldi S. e Piccardi C., *I sistemi lineari*, Città Studi Edizioni, Milano.